NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06911252 6

Digitized by Google

050

Hanse

Digitized by Google

Untersuchung

über

die gegenseitigen Störungen

des

Jupiters und Saturns.

Digitized by Google

Digitized by Google

Untersuchung

über

die gegenseitigen Störungen

des

Jupiters und Saturns.

Von

P. A. Hansen,

Professor und Director der Ernestinischen Sternwarte Seeberg.

Eine von der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 8. Juli 1830 gekrönte Preisschrift.

Opinionum commenta delet dies,
naturae iudicia confirmat.

ASTOR LIBRARY
NEW-YORK

Berlin.
Gedruckt in der Akademischen Druckerei.

1831.

Digitized by Google

Digitized by Google

Vorwort.

Ich kann mit dieser Abhandlung der Königl. Akademie keine vollständige Beantwortung der aufgegebenen Preisfrage vorlegen. Es ist mir von dem Zeitpunkte an, wo ich zur Kenntniſs der angewandten Methode gelangte, bis jetzt nicht Zeit genug geblieben, um die numerischen Rechnungen in der Ausdehnung, die mir für eine zweckmäſsige Bearbeitung nothwendig schien, auszuführen. Der gröſste Theil der Arbeit ist jedoch vollbracht, und mit ihm der schwierigste. Es fehlen einige der kleineren Glieder der Störungen dritter Ordnung in der Bewegung des Saturns, so wie die Störungen zweiter und dritter Ordnung des Jupiters. Die Berechnung der Störungen des Saturns ist schwieriger wie die des Jupiters, weil die Kraft, welche auf jenen Planeten störend einwirkt, gröſser ist als die, welche diesen von der reinen Ellipse ablenkt. Ich glaube daher durch die in dieser Abhandlung ausgeführten Rechnungen zur Genüge gezeigt zu haben, daſs meine Methode die verlangte Aufgabe vollständig zu lösen im Stande ist, und habe

Digitized by Google

somit das Wesentlichste vollbracht. Aus diesem Grunde habe ich nicht unterlassen wollen, der Akademie meine Arbeiten zu überreichen. Ich werde übrigens ungesäumt fortfahren, die noch fehlenden Störungen des Jupiters zu berechnen.

Die Differentialgleichungen, von welchen ich für die Berechnung der Störungen ausgegangen bin, sind diejenigen, welche in der Abhandlung: *Disquisitiones circa theoriam perturbationum etc.* in Schumachers Astronomischen Nachrichten gegeben werden. Ich transformire erstens die Differentialgleichung für die Länge in eine andere, welche nur für die Störungen erster Ordnung in Beziehung auf die Massen gebraucht werden kann, aber bei der Berechnung dieser Störungen vor jener den Vorzug hat, daſs sie auf mehr convergirende Reihen führt, und auch weniger Arbeit verursacht, wenn die gegenseitigen Störungen zweier oder mehrerer Planeten berechnet werden sollen; sie hat überdies das Merkwürdige, daſs sie auſser den betreffenden Differentialquotienten der Gröſse Ω nur die Coëfficienten der Entwickelung des Quadrats des Radius Vectors verlangt, nicht aber die Coëfficienten der Mittelpunktsgleichung. Die Formeln, welche hieraus für die numerische Rechnung erfolgen, verlangen eine doppelte Summation, so wie diejenigen, welche der Herr Professor Bessel in seiner vortrefflichen, den Abhandlungen der Königl. Akademie aus dem

Digitized by Google

Jahre 1824 einverleibten Abhandlung gegeben hat, aber die Convergenz der Glieder, in Beziehung auf welche man summiren muſs, ist in den in dieser Abhandlung angewandten Formeln für eine gegebene Excentricität weit stärker, als dies der Fall ist, wenn man die Störungen der wahren Länge berechnet. Ich zeige ferner, daſs man die eine Summation nur für die drei Werthe — 1, 0, und + 1 des Index auszuführen braucht; die übrigen Glieder kann man nach der Integration aus diesen auf eine höchst einfache Weise berechnen. Aber nicht nur die Berechnung der Störungen selbst wird durch diese Art sie zu berücksichtigen einfacher und kürzer, sondern auch ihre nachherige Anwendung, denn es hat sich mir *a posteriori* ergeben, daſs die Anzahl der Argumente der Störungen der mittleren Länge bis zu einer gewissen numerischen Grenze herab kleiner ist als die Anzahl der Argumente der Störungen der wahren Länge. Bevor ich nach dieser Methode die Störungen zu berechnen anfing, hatte ich schon die Störungen der wahren Länge erster Ordnung in Beziehung auf die Massen bis auf 0",1 herab berechnet, und für den Saturn 49, für den Jupiter 54 Argumente bekommen. Wenn man die in Artikel 16. befindlichen Störungen bis zu 0",1 herab nachzählt, so wird man finden, daſs für den Saturn nur 38, und für den Jupiter nur 43 verschie-

Digitized by Google

dene Argumente vorhanden sind, und für die Störungen des Radius Vectors findet eine ähnliche Verminderung statt. Hieraus folgt, daſs meine Art die Störungen anzubringen überhaupt ein genaueres Resultat giebt, als die bisher gebräuchliche. Der Umstand nemlich, daſs die Störungen der mittleren Länge bis zu einer gewissen numerischen Rechnung herab aus einer kleineren Anzahl von Gliedern bestehen wie die Störungen der wahren Länge bis zur nämlichen Grenze, rührt nur davon her, daſs die unendliche, nach den Vielfachen der mittleren Anomalien oder mittleren Bewegungen geordnete Reihe in jenem Falle mehr convergirt als in diesem. Aber bei einer mehr convergirenden Reihe ist auch die Summe der unterhalb der festgesetzten numerischen Grenze liegenden, und daher vernachlässigten Glieder, kleiner, und folglich wird die Gesammtheit der Störungen, d. i. die Störungen für irgend eine bestimmte Zeit, durch meine Methode genauer gefunden als durch die alte. — Wollte man statt dessen die Störungen der Elemente nach den La Grangeschen Formeln in Anwendung bringen, so würde man auf weit weniger convergirende Reihen geführt werden, oder man müſste mit andern Worten, um dieselbe Genauigkeit in die Gesammtheit der Störungen zu legen, eine weit gröſsere Anzahl von Störungs-Coëfficienten in Rechnung ziehen.

Digitized by Google

Die Gröſse Ω, und deren Differentialquotienten habe ich durch specielle Werthe der in ihnen enthaltenen Gröſsen entwickelt. Diese Methode läſst hinsichtlich der Genauigkeit, die man dadurch erlangen kann, nichts zu wünschen übrig; aber man kann die Rechnungen, die sie erfordert, nicht kurz nennen, und es ist damit die Unbequemlichkeit verbunden, daſs man, wenn nur einige wenige Entwickelungs-Coëfficienten verlangt werden, die Rechnung dennoch auf eine weit gröſsere Anzahl derselben einrichten muſs, um die gewünschte Genauigkeit zu erlangen. Es bleibt daher immer noch eine rein analytische Entwickelung dieser Gröſse (*) wünschenswerth, nur muſs sie, wenn dadurch reeller Vortheil erwachsen soll, so beschaffen sein, daſs man durch dieselbe mit geringerer Arbeit wie durch jene Methode die Genauigkeit bis zu jedem wünschenswerthen Grade steigern kann, und sie muſs, so wie jene, mit Hülfsmitteln verbunden sein, wodurch man sich der Richtigkeit der Ausführung der numerischen Rechnungen versichern kann.

Die in dieser Abhandlung überhaupt angewandte Methode bietet vollständige Mittel dar, um die numerischen Rechnungen zu controlliren. Für die Störungen erster Ord-

(*) Oder vielmehr überhaupt eine Entwickelungsmethode, die von dem genannten Nachtheile frei ist.

nung ist im Artikel 11. die Hauptbedingungs-Gleichung entwickelt, und weiterhin auf die Störungen des Jupiters und Saturns angewandt. Im Artikel 27. ist dieselbe Bedingungsgleichung auf die Störungen zweiter Ordnung ausgedehnt, und es sind diese Bedingungsgleichungen, so wie die übrigen, von denen ich Gebrauch mache, strenge.

Im Artikel 20. der mehrmals angeführten Abhandlung aus Schumacher's Astron. Nachr. ist bei der Ableitung der Ausdrücke für die Störungen der Gröſsen p und q ein Versehen begangen worden, welches ich um so viel mehr nicht unerwähnt lassen darf, weil es in früheren Schriften über diesen Gegenstand auch vorkommt. Bei der Ableitung der Differentialquotienten von Ω nach p und q durch den gewöhnlichen Algorithmus der partiellen Differentiale werden daselbst $\left(\frac{d\Omega}{dp}\right)$ und eben so $\left(\frac{d\Omega}{dq}\right)$ als alleinige Functionen von I, Θ, $I_{,}$, $\Theta_{,}$, etc. angesehen. Aber wenn in Ω die Gröſse p oder q, und demzufolge I und Θ sich ändern, so wird die gegenseitige Durchschnittslinie der beiden Planetenbahnen in jeder derselben sich nicht um einen gleichen Winkel geändert haben; man wird also nach der Veränderung von p oder q in dem neuen Durchschnittspunkte der beiden Ebenen nicht mehr eine gleiche Zahl von Graden etc. zählen, wie dies vorher der Fall war. Um diese Ungleichförmigkeit,

Digitized by Google

wie es nothwendig ist, wegzuschaffen, muſs man zugleich v oder v' ändern; man muſs mit andern Worten $\left(\frac{d\Omega}{dp}\right)$ und $\left(\frac{d\Omega}{dq}\right)$ auch als Functionen von $\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)$ oder $\left(\frac{d\Omega}{dv'}\right)$ betrachten. In der gegenwärtigen Abhandlung habe ich mich von diesem Umstande dadurch unabhängig gemacht, daſs ich im Artikel 10., von den Gleichungen (II. 19.) ausgehend, die genannten Differentialquotienten direct entwickelt habe.

Bei der Berechnung der Störungen zweiter Ordnung wende ich das Taylorsche Theorem an, aber die Art, wie dies geschieht, ist mir eigenthümlich und hat mir gestattet, eine gröſsere Genauigkeit in diese Rechnungen zu legen als man durch die früheren Methoden erlangt hat. Hier, so wie nach meiner Methode überall, sind die Störungen nicht nach gewissen Ordnungen in Beziehung auf die Excentricitäten und Neigungen abgemessen, sondern bis auf eine gewisse numerische Granze herab vollständig berechnet. Bei dieser Rechnung hat die Differentialgleichung, von welcher ich ausgegangen bin, vor den Gleichungen, durch welche die Störungen der Elemente bestimmt werden müssen, den wesentlichen Vorzug, daſs sie, mit einer einzigen Ausnahme, nirgends auf Glieder führt, die aus Differenzen von Gröſsen einer niedrigeren Ordnung in Beziehung auf die Excentricitäten beständen. Diese einzige Ausnahme macht das Glied, welches

Digitized by Google

mit cos $(\gamma - g)$ multiplicirt ist. Der Coëfficient dieses Gliedes ist von der zweiten Ordnung in Beziehung auf die Excentricitäten, obgleich er aus Gliedern zusammengeseszt ist, von denen einige von der 0ten Ordnung, oder unabhängig von den Excentricitäten sind. Diese heben sich in dem genannten Coëfficienten gegenseitig auf, und er macht also eine Ausnahme von der allgemeinen Regel, zufolge welcher er von der Ordnung $(1 - 1)$, das ist von der 0ten Ordnung sein sollte.

Im Gegentheil, wenn man nach den Formeln für die Störungen der Elemente die Störungen zweiter Ordnung in Beziehung auf die Massen berechnet, so erzeugen sich in der Excentricität Störungen von der Ordnung $\frac{1}{e}$, und in der Länge des Perihels Störungen von der Ordnung $\frac{1}{e}$ und $\frac{1}{e^2}$, welche also, wenn die Excentricität klein ist, sehr groſs werden. Diese Glieder werden wieder aufgehoben, wenn man von den gestörten Elementen, sei es durch trigonometrische Rechnung oder durch das Taylorsche Theorem, zu den gestörten Polarcoordinaten übergeht; aber ihr Dasein macht die Berechnung der Störungen zweiter Ordnung in Beziehung auf die Massen nach der Theorie der Veränderung der willkührlichen Constanten sehr beschwerlich und unsicher. — Wenn man zur Absicht hat, durch das Taylorsche Theorem von den Störungen der Elemente zu denen der Coordinaten über-

Digitized by Google

zugehen, so kann man zwar die genannten Glieder dadurch vermeiden, daſs man statt der Elemente e und π die folgenden $e \sin \pi$ und $e \cos \pi$ einführt; aber es besteht demohngeachtet jedes Glied in den Coordinaten aus Differenzen von Gliedern einer niedrigeren Ordnung in Beziehung auf die Excentricität. Aber das abgerechnet ist schon die Arbeit, welche diese Methode verursacht, wenn man dieselbe Vollständigkeit und Genauigkeit erlangen will, weit gröſser als die, welche meine Methode erfordert, wie man sich leicht durch eine Vergleichung überzeugen kann.

Wenn wir Einen störenden Planeten annehmen, so ist in Bezeichnungen dieser Abhandlung Ω Function von folgenden 10 Gröſsen a, a', ε, ε', e, e', π, π', I und Θ, und die wahre Länge in der Bahn sowohl, als des Radius Vectors, ist Function von a, ε, e und π. Man muſs also, um die Störungen zweiter Ordnung dieser 4 Elemente in Beziehung auf die Massen zu bekommen, zufolge des Taylorschen Theorems 40 Producte berechnen, wobei noch in Betracht kommt, daſs die mehrsten der 40 Differentialquotienten, wenn man Genauigkeit erlangen will, nur durch eine lange und mühsame Rechnung gefunden werden können. Um von hier zu den Störungen der Länge und des Radius Vectors überzugehen, muſs man erstlich die Störungen zweiter Ordnung der

Digitized by Google

Elemente mit den ersten Differentialquotienten der Länge und des Radius Vectors multipliciren; also noch 8 Producte berechnen. Hierauf muſs man die Quadrate und Producte der Störungen erster Ordnung der Elemente a, ϵ, e und π, also 10 Producte berechnen und diese noch mit den 20 zweiten Differentialquotienten der Länge und des Radius multipliciren; also noch 20 Producte berechnen. Man muſs also auſser der Berechnung von fast eben so vielen Differentialquotienten in Allem 78 Producte berechnen, und man hat wenig oder gar keine Mittel, um sich der Richtigkeit der Rechnung zu versichern.

Nach der in dieser Abhandlung vorgetragenen Methode muſs man, wenn Ein störender Planet vorhanden ist, erstlich 4 Hülfsgröſsen berechnen, die, wenn die 3 zweiten Differentialquotienten, wovon sie abhängen, berechnet sind, wenig Arbeit verursachen; alsdann hat man 8 Producte zu berechnen. Um diese mit den vorigen vergleichen zu können, müssen wir bedenken, daſs in dem einen Factor von 7 dieser Producte, $\varkappa$ die 3 Werthe -1, 0 und $+1$ annimmt. Wenn wir daher jedes dieser Producte dreien der vorigen gleich stellen, so haben wir sie gröſser angesetzt wie sie wirklich sind, weil keine Divisionen mit der Excentricität vorkommen. Das wären also nach dieser Vergleichung 21 Producte. In dem Einen der

Digitized by Google

8 Producte nimmt $\varkappa$ in jedem Factor die 3 genannten Werthe an; wir wollen daher dieses Product gleich 9 der vorigen stellen, und hiermit haben wir nach unserer Methode im Ganzen nur 30 Producte statt der vorigen 78. Wenn man, wie im Art. 30. angeführt ist, das Product $nZ \times n(z)$ statt $nZ \times \int T_1 d\tau$ rechnet, so reducirt sich diese Berechnung bis unter die Hälfte, und wir wollen daher dieses Product gleich 4 der vorigen rechnen, und hiermit haben wir statt der eben genannten 30 nur 25 der jenen 78 einzeln gleich gestellten Producte. Da nun die Integrationen bei beiden Methoden sehr nahe dieselbe Arbeit verursachen, so sieht man hieraus, daſs wenn man auch das vorher Erwähnte, die Divisionen durch die Excentricität betreffende abrechnet, der Vortheil sehr auf Seiten meiner Methode liegt. (S. Art. 17.)

Um der Aufgabe der Königl. Akademie so viel mir möglich Genüge zu leisten, habe ich die Rechnungen für den Coëfficienten des Arguments $5g' - 2g$ mehr umständlich wie die übrigen hingesetzt und zuletzt eine Vergleichung meines Resultats mit denen der Herren Plana und La Place gegeben. Man hat in der letzten Zeit 12 Verbindungen namhaft gemacht, welche einzig und allein im Coëfficienten des Arguments $5g' - 2g$ Gröſsen dritter Ordnung in Beziehung auf die Excentricitäten und Neigungen zu Wege brächten; dieses

ist aber nicht ganz richtig. Man kann sich leicht überzeugen, daſs die Zahl dieser Verbindungen unendlich ist und nur durch die absolute numerische Gröſse, die sie im Resultat hervorbringen, wird ihre Anzahl beschränkt, obgleich sie nicht gerade auf die bezeichneten 12 Verbindungen zurückgeführt wird. (S. Art. 31.)

Die Akademie verlangt überdies noch eine Nachweisung der Ursache, aus welcher die Differenzen in den Resultaten der beiden genannten Geometer entstanden sind; allein da die Herren Plana und Pontécoulant diesen Gegenstand mittlerweile öffentlich abgehandelt haben, so glaube ich darauf verweisen zu können.

Der Ort des Saturns vornehmlich und auch der Ort des Jupiters werden noch von dem Uranus gestört; aber da die Akademie in ihrer Preisfrage diese Störungen nicht verlangt hat, so habe ich keine Rücksicht darauf genommen. Mit der Zeit können sie nach dieser Methode, ohne daſs dadurch etwas von dem schon Berechneten vergeblich gemacht wäre, hinzugefügt werden.

Im März 1830.

Der Verfasser.

Digitized by Google

Untersuchung

über

die gegenseitigen Störungen

Jupiters und Saturns.

Digitized by Google

1.

In meiner Abhandlung, welche in Schumacher's Astron. Nachrichten No. 166 u. f. publicirt ist, wird bewiesen, daſs man die wahre gestörte Länge eines Himmelskörpers bekommt, wenn man in den Formeln für die rein elliptische Länge statt der Zeit eine Function derselben, die z genannt worden ist, anwendet. Dieses z ist der Werth von ζ, welcher aus der Integration der folgenden Gleichung hervorgeht, nachdem man im Integral τ in t verwandelt hat:

$$\frac{d\,.\,\dfrac{\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)}{\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)}}{d\tau} = \left\{2\frac{\rho}{r}\cos(v-\lambda) - 1 \mp 2\frac{\rho}{a(1-e^2)}\left[\cos(v-\lambda)-1\right]\right\}\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dv}\right) \ldots\ldots (1)$$

$$+ \; 2\frac{\rho}{r}\sin(v-\lambda)\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\, r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

Ich halte es für überflüssig, die Bedeutung der Bezeichnungen hierher zu setzen, denn da ich die angeführte Abhandlung oftmals citiren muſs, so muſs ich ohnehin meine Leser bitten, sie im Voraus zur Hand zu nehmen; ich werde, in so weit die dort vorkommenden Gröſsen hier auch gebraucht werden, die nemliche Bezeichnung anwenden. Der Kürze wegen werde ich, wenn ich eine Gleichung oder einen Artikel aus der genannten Abhandlung anführe, dieses durch ein der Nummer vorgesetztes H. anzeigen; die eben hingeschriebene Gleichung also ist die Gleichung (H. 13.).

2.

Zufolge der Bedeutung der Gröſse Ω, (H. Art. 3.), gilt die Gleichung (1) für eine beliebige Anzahl von Planeten; aber wir können uns bei der Entwickelung der Störungen der ersten Ordnung in Beziehung auf die Massen begnügen, nur zwei Planeten, nemlich den

Digitized by Google

gestörten und Einen störenden zu betrachten. Man braucht nur für jeden hinzukommenden störenden Planeten den Formeln ähnliche Glieder hinzuzufügen, in welchen man die Gröſsen, die sich auf jenen beziehen, in die analogen, die sich auf diesen beziehen, abändert; mit andern Worten, die vollständigen Störungen erster Ordnung eines Planeten sind gleich der Summe der Störungen, die jeder einzelne auf ihn einwirkende Planet erzeugt.

Wir wollen nun die Gleichung (1) in eine andere umformen, die aber nur für die Störungen, welche mit der ersten Potenz der störenden Kraft multiplicirt sind, das ist in der ersten Approximation der Störungen gebraucht werden kann. Da

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right) = \left(\frac{d\Omega}{dv}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) + r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\left(\frac{dlr}{dt}\right)$$

so ist nothwendig auch, wenn man die bekannten Werthe von $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ und $\left(\frac{dlr}{dt}\right)$ substituirt:

$$\left(\frac{d\Omega}{dv}\right) = \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)\frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}} - r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\frac{re\sin(v-\pi)}{a(1-e^2)}.$$

Durch Hülfe dieser Gleichung verwandelt man leicht die Gleichung (1), wenn man zur Abkürzung

$$\frac{d\,.\,\dfrac{\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)}{\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)}}{d\tau} = T$$

setzt, in folgende

$$T = an\left\{2\frac{\rho r\cos(v-\lambda)}{a^2(1-e^2)} - \frac{r^2}{a^2(1-e^2)} + 2\frac{\rho r^2\cos(v-\lambda)}{a^3(1-e^2)^2} - 2\frac{\rho r^2}{a^3(1-e^2)^2}\right\}\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)$$

$$(2)\ldots\ldots \quad + an\left\{2\frac{\rho\sin(v-\lambda)}{r\sqrt{1-e^2}} - 2\frac{\rho e\sin(v-\pi)\cos(v-\lambda)}{a(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{re\sin(v-\pi)}{a(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\right.$$

$$\left. - 2\frac{\rho re\cos(v-\lambda)\sin(v-\pi)}{a^2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} + 2\frac{\rho re\sin(v-\pi)}{a^2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\right\} r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

Diese Gleichung läſst sich aber vereinfachen. Es ist leicht zu erkennen, daſs

Digitized by Google

$$\frac{1}{r} = \frac{r}{a^2(1-e^2)^2} + \frac{re\cos(\nu-\pi)}{a^2(1-e^2)^2} + \frac{e\cos(\nu-\pi)}{a(1-e^2)}$$

Wenn man diesen Werth von $\left(\frac{1}{r}\right)$ in das erste Glied des Factors von $r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ der Gleichung (2) substituirt, so bekommt man nach einer leichten Reduction diesen Factor =

$$2\frac{\rho r\sin(\nu-\lambda)}{a^2(1-e^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{re\sin(\nu-\pi)}{a(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} - 2\frac{\rho e\sin(\lambda-\pi)}{a(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} - 2\frac{\rho re\sin(\lambda-\pi)}{a^2(1-e^2)^{\frac{5}{2}}} + 2\frac{\rho re\sin(\nu-\pi)}{a^2(1-e^2)^{\frac{5}{2}}}$$

und wenn man hierzu die folgende Gröſse addirt, welche identisch Null ist,

$$-2\frac{\rho re^2\sin(\nu-\lambda)}{a^2(1-e^2)^{\frac{5}{2}}} + 2\frac{\rho re^2\sin(\nu-\pi)\cos(\lambda-\pi)}{a^2(1-e^2)^{\frac{5}{2}}} - 2\frac{\rho re^2\cos(\nu-\pi)\sin(\lambda-\pi)}{a^2(1-e^2)^{\frac{5}{2}}}$$

so ergiebt sich unser Factor =

$$\frac{2\rho r\sin(\nu-\lambda)}{a^2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{re\sin(\nu-\pi)}{a(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} - 2\frac{\rho e\sin(\lambda-\pi)}{a(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} + 2\frac{\rho re\sin(\nu-\pi)}{a^2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{\frac{1+e\cos(\lambda-\pi)}{1-e^2}\right\}$$
$$-2\frac{\rho re\sin(\lambda-\pi)}{a^2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{\frac{1+e\cos(\nu-\pi)}{1-e^2}\right\}$$

oder =

$$2\frac{\rho r\sin(\nu-\lambda)}{a^2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} + 3\frac{re\sin(\nu-\pi)}{a(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} - 4\frac{\rho e\sin(\lambda-\pi)}{a(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Der Factor von $\left(\frac{d\Omega}{d\epsilon}\right)$ in der Gleichung (2) läſst sich gleichfalls vereinfachen. Wenn man die mittlere Anomalie mit g bezeichnet, nemlich $g = nt + \epsilon - \pi$ setzt, und den genannten Factor in Beziehung auf g differentiirt, so bekommt man, wenn man erwägt daſs

$$\frac{d\nu}{dg} = \frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-e^2} \text{ und } \frac{dr}{dg} = \frac{ae\sin(\nu-\pi)}{\sqrt{1-e^2}}$$

ist, folgenden Ausdruck:

$$-2\frac{\rho}{r}\frac{\sin(\nu-\lambda)}{\sqrt{1-e^2}}dg - 2\frac{\rho\sin(\nu-\lambda)}{a(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}dg + 4\frac{\rho re\cos(\nu-\lambda)\sin(\nu-\pi)}{a^2(1-e^2)^{\frac{5}{2}}}dg - 4\frac{\rho re\sin(\nu-\pi)}{a^2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}dg$$
$$-2\frac{re\sin(\nu-\pi)}{a(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}dg + 2\frac{\rho e\cos(\nu-\lambda)\sin(\nu-\pi)}{a(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}dg.$$

Digitized by Google

Wenn man in dem ersten Gliede dieses Ausdrucks die Gröſse $\left(\frac{1}{r}\right)$ durch den oben dafür angegebenen Werth eliminirt, und das zweite Glied mit dem folgenden Werthe der Einheit multiplicirt:

$$1 = \frac{r}{a} \cdot \frac{1}{1-e^2} + \frac{r}{a} \cdot \frac{e \cos(v-\pi)}{1-e^2}$$

so verwandelt er sich in

$$-4\,\frac{\varrho r \sin(v-\lambda)}{a^2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\,dg + 4\,\frac{\varrho r e \sin(\lambda-\pi)}{a^2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\,dg - 4\,\frac{\varrho r e \sin(v-\pi)}{a^2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\,dg$$
$$+ 2\,\frac{\varrho e \sin(\lambda-\pi)}{a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}\,dg - 2\,\frac{r e \sin(v-\pi)}{a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}\,dg$$

Dieser Ausdruck, wenn er eben so behandelt wird wie vorhin der Factor von $r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$, verwandelt sich in

$$-4\,\frac{\varrho r \sin(v-\lambda)}{a^2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\,dg + 6\,\frac{\varrho e \sin(\lambda-\pi)}{a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}\,dg - 6\,\frac{r e \sin(v-\pi)}{a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}\,dg$$

Es ist also:

$$(3)\ldots\ldots\quad \begin{aligned} T = an&\left\{6\int\frac{\varrho e \sin(\lambda-\pi)}{a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}\,dg - 6\int\frac{r e \sin(v-\pi)}{a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}\,dg - 4\int\frac{\varrho r \sin(v-\lambda)}{a^2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\,dg\right\}\left(\frac{d\Omega}{dt}\right) \\ + an&\left\{3\,\frac{r e \sin(v-\pi)}{a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} - 4\,\frac{\varrho e \sin(\lambda-\pi)}{a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} + 2\,\frac{\varrho r \sin(v-\lambda)}{a^2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\right\} r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\end{aligned}$$

Die Constante welche der Integration des ersten Factors hinzugefügt werden muſs, ist so zu bestimmen, daſs das Integral $= \frac{\varrho^2}{a^2(1-e^2)}$ werde, wenn man darin t in τ verwandelt, denn wenn man in der Gleichung (2) diese Verwandelung vornimmt, so geht der Factor in die genannte Gröſse über.

3.

Die Gleichung (3) läſst sich sehr leicht entwickeln, die Integration des ersten Factors läſst sich, wie die fernere Integration, nach der Reihenentwickelung vornehmen, und die hinzuzufügende Constante

Digitized by Google

kann man in jedem speciellen Falle, nachdem die numerischen Werthe der Entwickelungscoëfficienten berechnet sein werden, der angegebenen Bedingung gemäſs ohne Mühe bestimmen. Aber da der analytische Ausdruck dieser Constante sehr einfach ist, so lohnt es sich der Mühe ihn zu bestimmen. Ich werde zu dem Ende die Gleichung (3) in eine andere umformen, in welcher das im Factor übrig bleibende Integral so genommen werden muſs, daſs es mit der veränderlichen Gröſse zu gleicher Zeit verschwindet; die Reihenentwickelung wird durch diese Transformation auch einfacher auszuführen sein.

Wenn wir den zusammengesetzten Sinus im letzten Gliede des genannten Factors nach $\nu - \pi$ und $\lambda - \pi$ auflösen, und bedenken daſs

$$\frac{d \cdot \frac{r^2}{a^2}}{dg} = 2\, \frac{re \sin(\nu - \pi)}{a\sqrt{1-e^2}}$$

ist, so ergiebt sich leicht der ganze Factor =

$$\text{Const.} - 3\, \frac{r^2}{a^2(1-e^2)} - 2\, \frac{r^2 \rho \cos(\lambda - \pi)}{a^3 e (1-e^2)} + 2\, \frac{\rho \sin(\lambda - \pi)}{a(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \int \left\{ 2\, \frac{r}{a} \cos(\nu - \pi) + 3e \right\} dg \;\ldots\ldots (4)$$

und hieraus bekommen wir für die Bestimmung der Constante, der zu Ende des vorigen Artikels angeführten Bedingung gemäſs, die Gleichung,

$$\text{Const.} - 3\, \frac{\rho^2}{a^2(1-e^2)} - 2\, \frac{\rho^3 \cos(\lambda - \pi)}{a^3 e (1-e^2)} + 2\, \frac{\rho \sin(\lambda - \pi)}{a(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \int \left\{ 2\, \frac{\rho}{a} \cos(\lambda - \pi) + 3e \right\} d\gamma = \frac{\rho^2}{a^2(1-e^2)}$$

wenn man $\gamma = n\tau + \varepsilon - \pi$ macht. Hieraus folgt

$$\text{Const.} = 4\, \frac{\rho^2}{a^2(1-e^2)} + 2\, \frac{\rho^3 \cos(\lambda - \pi)}{a^3 e (1-e^2)} - 2\, \frac{\rho \sin(\lambda - \pi)}{a(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \int \left\{ 2\, \frac{\rho}{a} \cos(\lambda - \pi) + 3e \right\} d\gamma$$

Digitized by Google

und offenbar müssen die beiden Integrale, mit denen wir es jetzt zu thun haben, so genommen werden, daſs sie für $g=\gamma=o$ einerlei Werth bekommen. Wenn wir die Integrationen auf gleiche Weise ausführen würden, so wäre diese Bemerkung überflüssig, da wir sie aber auf verschiedene Arten berechnen werden, so darf man diesen Punkt nicht unberücksichtigt lassen, denn es ist alsdann nicht unmöglich, daſs die Integrale welche wir bekommen, um eine constante Gröſse von einander verschieden seien.

Der obige Ausdruck für die Constante läſst sich vereinfachen; denn man kann das Integral durch einen endlichen Ausdruck haben. Man integrirt am einfachsten, wenn man für einen Augenblick die excentrische Anomalie einführt. Sei also:

$$\begin{aligned}\rho \cos(\lambda-\pi) &= a \cos z - ae \\ \rho \sin(\lambda-\pi) &= a\sqrt{1-e^2}\sin z \\ d\gamma &= (1-e\cos z)\,dz\end{aligned}$$

Hieraus folgt fast unmittelbar

$$(5)\ldots\ldots\int\left\{2\frac{\rho}{a}\cos(\lambda-\pi)+3e\right\}d\gamma=\int\left\{2\cos z-e\cos 2z-e^2\cos z\right\}dz$$

$$=2\sin z-e\sin z\cos z-e^2\sin z=\frac{\rho^2+a\rho(1-e^2)}{a^2\sqrt{1-e^2}}\sin(\lambda-\pi)$$

und dadurch verwandelt sich der obige Werth der Constante in folgenden:

$$\text{Const.}=4\frac{\rho^2}{a^2(1-e^2)}+2\frac{\rho^3\cos(\lambda-\pi)}{a^3e(1-e^2)}-2\frac{\rho^3\sin^2(\lambda-\pi)}{a^3(1-e^2)^2}-2\frac{\rho^2\sin^2(\lambda-\pi)}{a^2(1-e^2)}$$

Wenn man in dieser Gleichung vermittelst $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ die Sinusse in Cosinusse verwandelt, und durch Hülfe der folgenden:

$$1=\frac{\rho}{a(1-e^2)}+\frac{\rho e\cos(\lambda-\pi)}{a(1-e^2)}$$

ρ^3 zum allgemeinen Factor macht, so verwandelt sie sich mit wenig Mühe in

$$\text{Const.}=2\frac{\rho^3\cos(\lambda-\pi)}{a^3e}\left\{\frac{1+e\cos(\lambda-\pi)}{1-e^2}\right\}^2$$

oder in

$$\text{Const.} = 2\,\frac{\rho\cos(\lambda-\pi)}{ae}$$

Wenn wir nun mit Berücksichtigung dieses Werthes der Constante, den unter (4) gegebenen Werth des ersten Factors in (3) substituiren, so erhalten wir:

$$T = an\left\{2\,\frac{\rho\cos(\lambda-\pi)}{ae} - 3\,\frac{r^2}{a^2(1-e^2)} - 2\,\frac{r^2\rho\cos(\lambda-\pi)}{a^3e(1-e^2)} + 2\,\frac{\rho\sin(\lambda-\pi)}{a(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\int\left\{2\,\frac{r}{a}\cos(v-\pi)+3e\right\}dg\right\}\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)\ldots\ldots(6)$$

$$+\,an\left\{3\,\frac{re\sin(v-\pi)}{a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} - 4\,\frac{\rho e\sin(\lambda-\pi)}{a(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} + 2\,\frac{\rho r\sin(v-\pi)\cos(\lambda-\pi)}{a^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} - 2\,\frac{\rho r\sin(\lambda-\pi)\cos(v-\pi)}{a^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

Da das unter (5) gegebene Integral verschwindet, wenn $\gamma = 0$ ist, so muſs das Integral in der vorstehenden Gleichung so genommen werden, daſs es verschwindet, wenn $g = 0$ ist.

Diese Gleichung, obgleich sie weniger einfach erscheint wie die vorhergehenden, läſst sich auf einfachere Art entwickeln. Sie hat vor der Gleichung (1) den Vorzug, daſs sie weit weniger Arbeit verursacht, wenn die gegenseitigen Störungen zweier oder mehrerer Planeten verlangt werden, denn die Gröſsen $\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon'}\right)$ und $r'\left(\frac{d\Omega}{dr'}\right)$ u. s. w., die man alsdann brauchen muſs, lassen sich aus jenen auf eine bekannte sehr einfache Weise berechnen. Sie hat ferner vor allen bekannten Formeln den Vorzug, daſs sie bei der Entwickelung nicht die Coëfficienten der Mittelpunktsgleichung, sondern einzig die Coëfficienten der Entwickelung des Quadrats des Radius Vectors erfordert, und sie führt deshalb auf weit mehr convergirende Reihen, denn diese Coëfficienten convergiren bei einer gegebenen Excentricität nicht nur an sich weit mehr als jene, sondern, worauf es hier eigentlich ankommt, sie bilden unter einander eine weit mehr convergirende Reihe.

Digitized by Google

Wir haben schon angeführt daſs

$$\left(\frac{d\,.\,\frac{r^2}{a^2}}{dg}\right) = 2\,\frac{re\sin(v-\pi)}{a\sqrt{1-e^2}}$$

hierzu kommt noch:

$$(7)\ldots\ldots\quad\left(\frac{d\,.\,\frac{r^2}{a^2}}{de}\right) = -2\,\frac{r}{a}\cos(v-\pi)$$

$$\left(\frac{d\,.\,\frac{\rho^2}{a^2}}{d\gamma}\right) = 2\,\frac{\rho e\sin(\lambda-\pi)}{a\sqrt{1-e^2}}$$

$$\left(\frac{d\,.\,\frac{\rho^2}{a^2}}{de}\right) = -2\,\frac{\rho}{a}\cos(\lambda-\pi)$$

von deren Richtigkeit man sich leicht durch Hülfe der bekannten Differentialquotienten von r überzeugen kann. Durch Hülfe dieser Ausdrücke verwandelt sich aber die Gleichung (6) unmittelbar in

$$(8)\ldots\ldots\quad T = \frac{an}{1-e^2}\left\{\frac{\frac{r^2}{a^2}-1}{e}\left(\frac{d\,.\,\frac{\rho^2}{a^2}}{de}\right) + e\left(\frac{d\,.\,\frac{\rho^2}{a^2}}{de}\right) - 3\,\frac{r^2}{a^2}\right.$$
$$\left. - \frac{1}{e}\left(\frac{d\,.\,\frac{\rho^2}{a^2}}{d\gamma}\right)\int\left\{\left(\frac{d\,.\,\frac{r^2}{a^2}}{de}\right) - 3e\right\}dg\right\}\left(\frac{d\Omega}{ds}\right)$$
$$+ \frac{an}{1-e^2}\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{d\,.\,\frac{r^2}{a^2}}{dg}\right) - 2\left(\frac{d\,.\,\frac{\rho^2}{a^2}}{d\gamma}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2e}\left(\frac{d\,.\,\frac{r^2}{a^2}}{dg}\right)\left(\frac{d\,.\,\frac{\rho^2}{a^2}}{de}\right) + \frac{1}{2e}\left(\frac{d\,.\,\frac{\rho^2}{a^2}}{d\gamma}\right)\left(\frac{d\,.\,\frac{r^2}{a^2}}{de}\right)\right\} r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

4.

Sei nun

$$\frac{r^2}{a^2} = 1 + R' \cos kg$$

$$\frac{\rho^2}{a^2} = 1 + R'' \cos \varkappa\gamma$$

Digitized by Google

wo die Indices k und $\varkappa$ von $-\infty$ bis $+\infty$, die Null einbegriffen, durch alle ganzen Zahlen ausgedehnt werden sollen. Aus diesen Gleichungen ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{d\,.\,\frac{r^2}{a^2}}{dg}\right) &= -\,kR^k \sin kg \\
\left(\frac{d\,.\,\frac{r^2}{a^2}}{de}\right) &= \left(\frac{dR^k}{de}\right) \cos kg \\
\left(\frac{d\,.\,\frac{\rho^2}{a^2}}{d\gamma}\right) &= -\,\varkappa R^\varkappa \sin \varkappa\gamma \\
\left(\frac{d\,.\,\frac{\rho^2}{a^2}}{de}\right) &= \left(\frac{dR^\varkappa}{de}\right) \cos \varkappa\gamma \\
\int\left\{\left(\frac{d\,.\,\frac{r^2}{a^2}}{de}\right) - 3e\right\} dg &= \left(\frac{dR^k}{kde}\right) \sin kg + \left(\frac{dR^0}{de}\right) g - 3eg
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (9)$$

In der letzten dieser Gleichungen muſs unter den Werthen welche k erhält, die Null ausgeschlossen werden, weil wir die dahin gehörigen Glieder schon für sich hingeschrieben haben. Wir werden aber weiter unten sehen, daſs $R^0 = \frac{3}{2} e^2$ ist, daſs mithin

$$\left(\frac{dR^0}{de}\right) = 3e$$

ist, die beiden letzten Glieder des Integrals heben sich also gegenseitig auf, und wir haben

$$\int\left\{\left(\frac{d\,.\,\frac{r^2}{a^2}}{de}\right) - 3e\right\} dg = \left(\frac{dR^k}{kde}\right) \sin kg \qquad \ldots.(10)$$

wo, wie bereits gesagt, $k = 0$ ausgeschlossen ist. Da die rechte Seite Null wird, wenn $g = 0$ ist, so ist ohne Weiteres der im vorigen Artikel ausgesprochenen Bedingung Genüge geschehen. Wir müssen nun die Werthe welche (9) und (10) geben, in die Gleichung (8) substituiren.

Mit Rücksicht darauf daſs:

Digitized by Google

$$(11)\ldots\ \left\{\begin{aligned} u^{(i)}u^{(i')}\cos ix\cos i'x' &= \quad u^{(i)}u^{(i')}\cos(ix+i'x') \\ &= \quad u^{(i+h)}u^{(i')}\cos((i+h)\,x+i'x') = \text{etc.} \\ u^{(i)}u^{(i')}\cos ix\ \sin i'x' &= \quad u^{(i)}u^{(i')}\sin\ (ix+i'x') \\ &= \quad u^{(i+h)}u^{(i')}\sin\ ((i+h)\,x+i'x') = \text{etc.} \\ u^{(i)}u^{(i')}\sin\ ix\ \sin i'x' &= -\ u^{(i)}u^{(i')}\cos(ix+i'x') \\ &= -\ u^{(i+h)}u^{(i')}\cos((i+h)\,x+i'x') = \text{etc.} \end{aligned}\right.$$

wo h eine willkührliche ganze, positive oder negative Zahl bedeutet, wenn, wie im vorliegenden Falle, die Indices i und i', und selbst wenn nur eine dieser Gröſsen von $-\infty$ bis $+\infty$ durch alle ganze Zahlen ausgedehnt wird, bekommt man ohne Mühe:

$$(12)\ldots\quad \begin{aligned} T = \frac{an}{1-e^2}\Big\{\Big[\frac{R^k}{e}\Big(\frac{dR^\varkappa}{de}\Big) - \varkappa\,\frac{R^\varkappa}{e}\Big(\frac{dR^k}{k\,de}\Big)\Big]\cos(\varkappa\gamma+kg) \\ + e\Big(\frac{dR^\varkappa}{de}\Big)\cos\varkappa\gamma - 3R^k\cos kg - 3\Big\}\Big(\frac{d\Omega}{d\epsilon}\Big) \\ + \frac{an}{1-e^2}\Big\{\frac{1}{2}\Big[k\frac{R^k}{e}\Big(\frac{dR^\varkappa}{de}\Big) - \varkappa\,\frac{R^\varkappa}{e}\Big(\frac{dR^k}{de}\Big)\Big]\sin(\varkappa\gamma+kg) \\ + 2\varkappa R^\varkappa\sin\varkappa\gamma - \frac{3}{2}\,kR^k\ \sin kg\Big\}\,r\Big(\frac{d\Omega}{dr}\Big) \end{aligned}$$

Der Coëfficient irgend eines Gliedes, in welchem weder $k=0$ noch $\varkappa=0$ ist, ergiebt sich unmittelbar aus dem ersten Gliede eines jeden der beiden Hauptglieder des vorstehenden Ausdrucks, nicht so aber der Coëfficient eines Gliedes, in welchem entweder $k=0$ oder $\varkappa=0$, diesen erhält man theils aus den genannten Gliedern, theils aus den nachfolgenden. So giebt, wenn wir in dem ersten Hauptgliede $k=0$ machen, das erste Glied den Coëfficienten von $\cos\varkappa\gamma =$

$$\frac{R^0}{e}\Big(\frac{dR^\varkappa}{de}\Big)$$

und das zweite Glied fügt diesem

$$e\Big(\frac{dR^\varkappa}{de}\Big)$$

hinzu. Aber es ist, wie bereits angeführt,

$$R^0 = \frac{3}{2}\,e^2$$

Digitized by Google

also haben wir den ganzen in Rede stehenden Coëfficienten

$$= \frac{5}{2}\, e \left(\frac{dR^{\varkappa}}{de}\right)$$

Wenn wir in dem ersten Hauptgliede $\varkappa = 0$ machen, so giebt das erste Glied desselben den Coëfficienten von cos kg

$$= \frac{R^{k}}{e} \left(\frac{dR^{0}}{de}\right)$$

und das dritte Glied fügt diesem

$$- 3 R^{k}$$

hinzu. Da nun nach dem Vorhergehenden

$$\left(\frac{dR^{0}}{de}\right) = 3e$$

ist, so ist der vollständige Coëfficient von cos kg Null. Das erste Glied desselben Hauptgliedes giebt endlich den Coëfficienten von cos 0, das ist das constante Glied

$$= \frac{R^{0}}{e} \left(\frac{dR^{0}}{de}\right)$$

und die folgenden Glieder fügen diesem

$$e \left(\frac{dR^{0}}{de}\right) - 3 R^{0} - 3$$

hinzu, das constante Glied ist also vollständig

$$= - 3 (1 - e^{2})$$

Auf die nemliche Art berechnet man die Coëfficienten der verschiedenartigen Glieder in dem zweiten Hauptgliede. Dies vorausgesetzt, sei, mit Ausnahme der Glieder, in welchen $k = 0$ oder $\varkappa = 0$ ist,

$$A^{\varkappa,k} = \frac{1}{1-e^{2}} \left\{ \frac{R^{k}}{e} \left(\frac{dR^{\varkappa}}{de}\right) - \varkappa \frac{R^{\varkappa}}{e} \left(\frac{dR^{k}}{k\,de}\right)\right\}$$

$$B^{\varkappa,k} = \frac{\frac{1}{2}}{1-e^{2}} \left\{k \frac{R^{k}}{e} \left(\frac{dR^{\varkappa}}{de}\right) - \varkappa \frac{R^{\varkappa}}{e} \left(\frac{dR^{k}}{de}\right)\right\}$$

für die Glieder aber, in welchen resp. $k = 0$ oder $\varkappa = 0$ ist, mit Ausnahme von $A^{0,0}$, sei

Digitized by Google

$$(11)\ldots\begin{cases} u^{(i)}u^{(i')}\cos ix \cos i'x' = \\ \qquad\qquad = \\ u^{(i)}u^{(i')}\cos ix \sin i'x' = \\ \qquad\qquad = \\ u^{(i)}u^{(i')}\sin ix \sin i'x' = - \\ \qquad\qquad = - \end{cases}$$

wo h eine willkührliche ganze,
wenn, wie im vorliegenden Falle,
nur eine dieser Gröſsen von $-$
ausgedehnt wird, bekommt man

$$T = \frac{an}{1-e^2}\left\{\left[\frac{R^i}{e}\left(\frac{dR^{\circ}}{de}\right) - \varkappa \ldots\right.\right.$$

$$+ e\left(\frac{d}{d}\ldots\right.$$

(12)....

$$+ \frac{an}{1-e^2}\left\{\frac{1}{2}\left[k\frac{R^i}{e}\left(\frac{dR^{\circ}}{de}\right) - \varkappa \ldots\right.\right.$$

$$+ 2\varkappa \ldots$$

Der Coëfficient irgend eine
noch $\varkappa = 0$ ist, ergiebt sich unmitt
jeden der beiden Hauptglieder de
aber der Coëfficient eines Gliedes,
$\varkappa = 0$, diesen erhält man theils aus
den nachfolgenden. So giebt, we
$k = 0$ machen, das erste Glied den Co

$$\frac{R^0}{e}\left(\frac{d}{d}\ldots\right.$$

und das zweite Glied fügt diesem

$$e\left(\frac{dR^{\circ}}{de}\right)$$

hinzu. Aber es ist, wie bereits angef

$$R^0 = \frac{1}{2}\ldots$$

Digitized by Goo

leicht einzuſehen; es bedarf aber für die Glieder, in welchen $\varkappa = 0$, eines Beweiſes. Dieſe Glieder gehören zu der Conſtante, welche der Integration hinzugefügt worden, nnd die (H. Art. 9.) eine Function von t iſt, welche ſo beſtimmt werden muſs, daſs das Integral Null wird, wenn man darin τ in t verwandelt. Die Richtigkeit des angegebenen Werthes von $C^{0,0}$ läſst ſich auf folgende Art einſehen. Nach dem vorigen Artikel iſt das conſtante Glied in T

$$= anA^{0,0}\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$$

wir haben alſo mit alleiniger Rückſicht auf dieſes Glied

$$\int Td\tau = an\tau A^{0,0}\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) + \text{Const.}$$

und hieraus der genannten Bedingung zufolge:

$$0 = antA^{0,0}\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) + \text{Const.}$$

woraus hervorgeht, daſs

$$\text{Const.} = -\,antA^{0,0}\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$$

wenn wir alſo annehmen, daſs

$$\int Td\tau = aC^{0,0}\,(n\tau - nt)\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$$

ſo iſt $C^{0,0} = A^{0,0}$ *W. Z. B. W.*

Es iſt übrigens klar, daſs dieſes Glied das einzige dieſer Gattung iſt, denn in dem vollſtändigen Ausdrucke für T kommt weiter kein Glied vor, welches von τ frei wäre, weil $A^{0,k} = B^{0,k} = 0$ ſind.

Es iſt eigentlich nicht nothwendig, für die übrigen Glieder der Conſtante analytiſche Ausdrücke zu haben, denn wenn man die numeriſchen Werthe der Gröſsen $C^{\varkappa,k}$ und $D^{\varkappa,k}$ mit Ausnahme von $C^{0,k}$ und $D^{0,k}$ berechnet hat, ſo braucht man nur reſp. alle, für welche die Summe $\varkappa + k$ einerlei Werth hat, zu addiren, dieſe Summe mit umgekehrtem Zeichen genommen ſind reſp. wenn man k für $\varkappa + k$ ſchreibt, die Gröſsen $C^{0,k}$ und $D^{0,k}$, denn es iſt klar, daſs alsdann die Summen aller

Digitized by Google

$C^{\varkappa,k}$ und $D^{\varkappa,k}$ Null sind, wenn man τ in t, das ist $\varkappa$ in k verwandelt, wie erforderlich ist. Aber ein Umstand, auf den ich weiter unten aufmerksam machen werde, verursacht, daſs die analytischen Ausdrücke von $C^{0,k}$ und $D^{0,k}$ groſse Dienste leisten können, ich werde daher die Richtigkeit der oben angesetzten Werthe beweisen.

Vor allen Dingen ist zu bemerken, daſs $C^{\varkappa,k}$ mit einem Sinus multiplicirt ist, man muſs daher bei der Summation, von der ich eben gesprochen habe, die Zeichen derjenigen $C^{\varkappa,k}$, für welche $\varkappa + k$ negativ ist, umwechseln. Aber die Summe aller $C^{\varkappa,k}$ mit Ausnahme der Glieder, in welchen $k = 0$ ist, ist Null, denn jeder specielle Werth z. B. $\varkappa = p$ und $k = q$ welchem

$$C^{p,q} = \frac{1}{1-e^2} \left\{ \frac{R^q}{e} \left(\frac{dR^p}{p\,de}\right) - \frac{R^p}{e} \left(\frac{dR^q}{q\,de}\right) \right\}$$

zukommt, hat einen correspondirenden, nemlich $\varkappa = q$ und $k = p$, für welchen

$$C^{q,p} = \frac{1}{1-e^2} \left\{ \frac{R^p}{e} \left(\frac{dR^q}{q\,de}\right) - \frac{R^q}{e} \left(\frac{dR^p}{p\,de}\right) \right\} = - C^{p,q}$$

ist, und eben so verhält es sich für negative Werthe von $\varkappa$ und k. Die Summe aller $C^{\varkappa,k}$ + Const. ist also nach der Verwandlung von τ in t:

$$\Sigma \frac{5}{2} \frac{e}{1-e^2} \left(\frac{dR^k}{k\,de}\right) + \text{Const.} = 0$$

wo aber der Werth $k = 0$ ausgeschlossen ist, weil wir für diesen das Integral schon berechnet haben. Hieraus folgt:

$$\text{Const.} = - \Sigma \frac{5}{2} \frac{e}{1-e^2} \left(\frac{dR^k}{k\,de}\right) = \Sigma C^{0,k}$$

also

$$C^{0,k} = - \frac{5}{2} \frac{e}{1-e^2} \left(\frac{dR^k}{k\,de}\right) \; W. \; Z. \; B. \; W.$$

Da $D^{\varkappa,k}$ mit einem Cosinus multiplicirt ist, so werden bei der in Rede stehenden Summation die Zeichen der Glieder, für welche $\varkappa + k$ negativ ist, nicht umgewechselt. Aus dem Vorhergehenden zeigt sich, daſs mit Ausnahme von $\varkappa = 0$ oder $k = 0$

$$D^{\varkappa,k} = \frac{1}{2} A^{k,\varkappa}$$

Digitized by Google

wo $A^{k,\kappa}$ anzeigt, daſs man in diesen Gröſsen nicht nur κ in k, sondern auch gegenseitig k in κ verwandeln soll. Hieraus folgt aber, daſs

$$\Sigma D^{\kappa,k} = \frac{1}{2}\,\Sigma A^{\kappa,k} \qquad \text{....(16)}$$

ist, weil in der Summe die angeführten Verwandelungen keinen Unterschied erzeugen, es ist jedoch hier immer noch $\kappa = 0$ oder $k = 0$ ausgenommen. Es erhellet aber aus der Gleichung (2), daſs der Factor von $\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)$ in (13) sich in $\frac{anr^2}{1-e^2}$ verwandeln muſs, wenn τ in t übergeht, wir haben also:

$$\Sigma A^{\kappa,k} + \Sigma A^{0,k} + \Sigma A^{\kappa,0} + A^{0,0} = \frac{1+\Sigma R^k}{1-e^2}$$

wo in der rechten Seite der Werth $k = 0$ unter dem Summenzeichen einbegriffen ist, und in der linken Seite κ in k verwandelt werden muſs. Hieraus folgt aber:

$$\Sigma A^{\kappa,k} = \frac{1+\Sigma R^k}{1-e^2} - \Sigma A^{0,k} - \Sigma A^{\kappa,0} - A^{0,0} \qquad \text{...(16*)}$$

wo dieselben Bedingungen statt finden.

Nach der Integration in Beziehung auf τ ist aber die Summe der Coëfficienten des Factors von $r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ in (15)

$$= \Sigma D^{\kappa,k} + \Sigma D^{\kappa,0} + \text{Const.} = 0$$

wenn κ in k verwandelt wird. Aus dieser Gleichung, verbunden mit (16) und (16*), ergiebt sich:

$$0 = \text{Const.} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Sigma R^k}{1-e^2} - \frac{1}{2}\Sigma A^{0,k} - \frac{1}{2}\Sigma A^{\kappa,0} - \frac{1}{2}A^{0,0} + \Sigma D^{\kappa,0}$$

wenn man κ in k verwandelt. Substituirt man hierin die Werthe der Gröſsen unter dem Summenzeichen und erwägt, daſs das erste dieser Glieder, nemlich ΣR^k, das einzige ist, welches den Werth $k = 0$ einschlieſst, so ergiebt sich, wenn man zugleich κ in k verwandelt:

$$0 = \text{Const.} + \frac{\frac{1}{2}}{1-e^2} + \frac{1}{2}\,\frac{\Sigma R^k}{1-e^2} - \frac{5}{4}\,\frac{e}{1-e^2}\,\Sigma\left(\frac{dR^k}{de}\right)$$
$$+ \frac{3}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{1-e^2}\,\Sigma R^k + \frac{\frac{1}{2}}{1-e^2}\,R^0$$

C

Digitized by Google

wo überall in den Summenzeichen der Werth $k = 0$ ausgeschlossen ist. Wir ziehen hieraus:

$$\text{Const.} = \Sigma D^{0,k} = -\frac{\frac{1}{2}}{1-e^2} + \frac{5}{4}\,\frac{e}{1-e^2}\,\Sigma\left(\frac{dR^k}{de}\right) - \frac{3}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{1-e^2}\,R^0$$

und hieraus

$$D^{0,k} = \frac{5}{4}\,\frac{e}{1-e^2}\left(\frac{dR^k}{de}\right) = -\frac{1}{2}\,k C^{0,k}$$

ausgenommen:

$$D^{0,0} = -\frac{2-\frac{3}{4}e^2}{1-e^2}$$

W. Z. B. W.

6.

Um die Gleichung (15) nach t zu integriren, müssen wir die Entwickelung der Differentialquotienten von Ω haben. Sei

$$\Omega \quad = \frac{m'}{\mu}\,(i,i',c)\cos(ig+i'g') + \frac{m'}{\mu}\,(i,i',s)\sin(ig+i'g')$$

$$r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = \frac{m'}{\mu}\,[i,i',c]\cos(ig+i'g') + \frac{m'}{\mu}\,[i,i',s]\sin(ig+i'g')$$

wo i und i' ganze Zahlen sind, und die mit einem Striche versehenen Buchstaben sich auf den störenden Planeten beziehen. Die Zahl i werde von $-\infty$ bis $+\infty$, die Zahl i' aber nur von 0 bis $+\infty$, oder welches einerlei ist, von $-\infty$ bis 0 ausgedehnt. Die erste Gleichung giebt:

$$\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) = -\frac{m'}{\mu}\,i\,(i,i',c)\sin(ig+i'g') + \frac{m'}{\mu}\,i\,(i,i',s)\cos(ig+i'g')$$

und somit verwandelt sich die Gleichung (15) durch Hülfe der Relationen (11) ohne Weiteres in folgende:

$$(17)\ldots\int T d\tau = \frac{am'}{\mu}\,\{C^{\varkappa,k}(i-k)(i-k,i',c) + D^{\varkappa,k}[i-k,i',c]\}\cos(\varkappa\gamma+ig+i'g')$$
$$+\frac{am'}{\mu}\,\{C^{\varkappa,k}(i-k)(i-k,i',s) + D^{\varkappa,k}[i-k,i',s]\}\sin(\varkappa\gamma+ig+i'g')$$
$$+\frac{am'}{\mu}\,C^{0,0}\,i\,(i,i',s)\,x\cos(ig+i'g')$$
$$-\frac{am'}{\mu}\,C^{0,0}\,i\,(i,i',c)\,x\sin(ig+i'g')$$

Digitized by Google

wo, wie ich es in der Folge stets thun werde,

$$x = n\tau - nt$$

gesetzt ist. Da

$$T = \frac{d.\frac{\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)}{\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)}}{d\tau}$$

ist, so haben wir:

$$\int T d\tau = \frac{\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)}{\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)}$$

aber, da nach (H. Art. 13.) bei der ersten Approximation $\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right) = 1$ geſetzt werden muſs, so folgt, daſs

$$\int T d\tau = \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)$$

angenommen werden muſs. Wir haben also, wenn wir die Gleichung (17) mit ndt multipliciren und integriren, welches keine Schwierigkeit darbietet,

$$\begin{aligned} n\zeta = {} & n(1-c)\tau \\ & + a\frac{m'}{\mu}\frac{n}{in+i'n'}\left\{(i-k)(i-k,i',c)\,C^{\varkappa,k} + [i-k,i',c]\,D^{\varkappa,k}\right\}\sin(\varkappa\gamma + ig + i'g') \\ & - a\frac{m'}{\mu}\frac{n}{in+i'n'}\left\{(i-k)(i-k,i',s)\,C^{\varkappa,k} + [i-k,i',s]\,D^{\varkappa,k}\right\}\cos(\varkappa\gamma + ig + i'g') \\ & + a\frac{m'}{\mu}\left(\frac{n}{in+i'n'}\right)^2 i\,(i,i',c)\,C^{0.0}\sin(ig+i'g') \quad \ldots\ldots(18) \\ & - a\frac{m'}{\mu}\left(\frac{n}{in+i'n'}\right)^2 i\,(i,i',s)\,C^{0.0}\cos(ig+i'g') \\ & + a\frac{m'}{\mu}\frac{n}{in+i'n'}\,i\,(i,i',s)\,C^{0.0}\,x\sin(ig+i'g') \\ & + a\frac{m'}{\mu}\frac{n}{in+i'n'}\,i\,(i,i',c)\,C^{0.0}\,x\cos(ig+i'g') \end{aligned}$$

Die Gröſse $n\tau$ ist eigentlich die dieſem Integrale hinzuzufügende Constante (H. Art. 7.), statt deſsen habe ich aber $(1-c)\,n\tau$ addirt, die Urſache davon wird gleich folgen.

Die obige Integration hört auf richtig zu sein, wenn $i = i' = 0$ ist, und um die Glieder zu bekommen, welche dieser specielle Fall hinzufügt, müssen wir zur Gleichung (17) zurückkehren. Macht man hierin $i = i' = 0$ und integrirt, so ergiebt sich für diese Glieder:

$$(19)\ldots\quad n\zeta = a\,\frac{m'}{\mu}\,\{(-k)\,(-k, 0, s)\,C^{\varkappa,k} + [-k, 0, s]\,D^{\varkappa,k}\}\,nt\sin\varkappa\gamma$$
$$+\,a\,\frac{m'}{\mu}\,\{(-k)\,(-k, 0, c)\,C^{\varkappa,k} + [-k, 0, c]\,D^{\varkappa,k}\}\,nt\cos\varkappa\gamma$$

welches dem vorhergehenden Ausdrucke hinzugefügt werden muſs, um den vollständigen Werth von $n\zeta$ zu bekommen. Unter den Werthen welche $\varkappa$ bekommt, ist überall $\varkappa = 0$ einbegriffen, wir haben daher, wenn nicht nur $i = i' = 0$ sondern auch $\varkappa = 0$ ist, wie aus (19) hervorgeht, in $n\zeta$ das Glied:

$$a\,\frac{m'}{\mu}\,\{(-k)\,(-k, 0, c)\,C^{0,k} + [-k, 0, c]\,D^{0,k}\}\,nt$$

Dieses Glied vereinigt sich mit der mittleren Bewegung des Planeten, oder vielmehr es verursacht, daſs diejenige mittlere Bewegung, welche man durch Hülfe der astronomischen Beobachtungen findet, nicht die wahre mittlere Bewegung ist, welche ohne Einwirkung der störenden Planeten statt fände, obgleich bekannter Maaſsen die groſse Achse unveränderlich ist. Wir wollen nun die der Gleichung (18) hinzugefügte Constante c so bestimmen, daſs

$$(20)\ldots\quad c = a\,\frac{m'}{\mu}\,\{(-k)\,(-k, 0, c)\,C^{0,k} + [-k, 0, c]\,D^{0,k}\}$$

Hierdurch ist bewirkt, daſs

$$n\zeta = n\tau - c\,(n\tau - nt) + \text{periodischen Störungen},$$

mithin nach der Verwandelung von τ in t

$$nz = nt + \text{periodischen Störungen}$$

ist, und unter n wird von jetzt an überall derjenige Werth der mittleren Bewegung verstanden, welcher sich durch die Beobachtungen nach Abzug der periodischen Störungen ergiebt; unter n', n'' etc. wird in Beziehung auf die störenden Planeten dasselbe verstanden. Wir

Digitized by Google

nähern uns dadurch dem wahren Werthe der Störungen, oder wir schlieſsen, mit andern Worten, dadurch in die Gleichungen (18) und (19) schon einige Störungen der zweiten Ordnung in Bezug auf die Massen ein (*).

7.

Die Gleichungen (18) und (19) und ebenfalls die Gleichung (17), wenn diese benutzt werden soll, erfordern zwei Summationen, eine in Beziehung auf k und eine in Beziehung auf $\varkappa$. Nemlich um ein gewisses Glied in nz, z. B. dasjenige, dessen Argument $3g + 2g'$ ist, zu berechnen, muſs man in $n\zeta$ die Coëfficienten der Argumente

$$0\gamma + 3g + 2g', \quad -\gamma + 4g + 2g', \quad -2\gamma + 5g + 2g', \text{ etc.}$$
$$\gamma + 2g + 2g', \quad 2\gamma + g + 2g', \text{ etc.}$$

berechnen, dies ist die Summation in Beziehung auf $\varkappa$, und jedes dieser Glieder wird durch eine Summation in Beziehung auf k erhalten. Z. B. den Coëfficienten des mit sin $(-\gamma + 4g + 2g')$ multiplicirten Gliedes erhält man aus der Summe

$$\begin{aligned}
&\{4\,(4, 2, c)\, C^{-1,0} + [4, 2, c]\, D^{-1,0}\} \\
+&\{5\,(5, 2, c)\, C^{-1,-1} + [5, 2, c]\, D^{-1,-1}\} \\
+&\{6\,(6, 2, c)\, C^{-1,-2} + [6, 2, c]\, D^{-1,-2}\} \\
+&\text{ etc.} \\
+&\{3\,(3, 2, c)\, C^{-1,1} + [3, 2, c]\, D^{-1,1}\} \\
+&\{2\,(2, 2, c)\, C^{-1,2} + [2, 2, c]\, D^{-1,2}\} \\
+&\text{ etc.}
\end{aligned}$$

welche noch mit $a\,\frac{m'}{\mu}\,\frac{n}{4n + 2n'}$ multiplicirt werden muſs; eben so bekommt man die Coëfficienten aller übrigen Glieder. Das dritte und

(*) Diese Constante c ist eine überzählige; ihre Beschaffenheit wird durchaus nicht durch das innere Wesen der Aufgabe bestimmt, und sie kann daher jeden beliebigen Werth, die Null nicht ausgenommen, annehmen. Wie man sie auch bestimmen mag, so hat man nur darauf zu sehen, daſs die Gröſsen, die durch diese willkührliche Bestimmung *explicite* oder *implicite* Function derselben werden, dieselben Werthe behalten, die sie in dem Falle, wo $c = 0$ ist, annehmen.

Digitized by Google

vierte Glied der Gleichung (18) gehört den Fällen, wo $\varkappa = 0$ ist, an, und wird den resp. Gliedern gleich addirt; es erfordert, wie man sieht, gar keine Summation. Die beiden letzten Glieder derselben Gleichung verschwinden nach der Verwandelung von τ in t, man muſs sie aber dem Werthe von $n\zeta$ hinzufügen, wenn man, um die Richtigkeit der Rechnung zu prüfen, von der Bedingungsgleichung Gebrauch machen will, welche (H. Art. 17.) gegeben ist; diese Glieder sind übrigens jedenfalls auch nothwendig, wenn man die Störungen der zweiten Ordnung berechnen muſs.

Wenn man nach (18) und (19) alle Störungen eines Planeten rechnet, so ordnet man am vortheilhaftesten die Rechnung so, daſs man die Logarithmen der folgenden vier Gröſsen neben einander hinschreibt:

$$a\,\frac{m'}{\mu}\,\frac{n}{in+i'n'}\,i\,(i,i',c)\,,\; a\,\frac{m'}{\mu}\,\frac{n}{in+i'n'}\,[i,i',c]\,,\; a\,\frac{m'}{\mu}\,\frac{n}{in+i'n'}\,i\,(i,i',s)\,,\; a\,\frac{m'}{\mu}\,\frac{n}{in+i'n'}\,[i,i',s]$$

zu diesen addirt man beziehungsweise die Logarithmen von $C^{0,0}$ und $D^{0,0}$, von $C^{1,0}$ und $D^{1,0}$ etc. und von $C^{-1,0}$ und $D^{-1,0}$ etc., die man zu diesem Zwecke der Ordnung nach auf den untern Rand eines Streifen Papiers hinschreibt. Die so erhaltenen Glieder gehören resp. zu den Argumenten $0\gamma + ig + i'g'$, $\gamma + ig + i'g'$, etc., $-\gamma + ig + i'g'$ etc. Hierauf multiplicirt man dieselben Entwickelungscoëfficienten von Ω mit

$$a\,\frac{m'}{\mu}\,\frac{n}{(i+1)\,n+i'n'}$$

und multiplicirt diese Producte beziehungsweise mit $C^{0,1}$ und $D^{0,1}$, mit $C^{1,1}$ und $D^{1,1}$ etc. und mit $C^{-1,1}$ und $D^{-1,1}$ etc., dies giebt resp. die Coëfficienten der Argumente $0\gamma + (i+1)\,g + i'g'$, $\gamma + (i+1)\,g + i'g'$ etc., $-\gamma + (i+1)\,g + i'g'$ etc., und so fährt man fort, bis man auf Glieder kommt, welche vernachlässigt werden können. Ist man mit der Reihe

$$\frac{n}{(i+1)\,n+i'n'}\,,\;\frac{n}{(i+2)\,n+i'n'}\ \text{etc.}$$

und den diesen correspondirenden $C^{\varkappa,1}$ und $D^{\varkappa,1}$, $C^{\varkappa,2}$ und $D^{\varkappa,2}$ etc. fertig, so geht man zur Reihe

Digitized by Google

$$\frac{n}{(i-1)\,n+i'n'}\,,\ \frac{n}{(i-2)\,n+i'n'}\ \text{etc.}$$

und den diesen correspondirenden $C^{n,-1}$ und $D^{n,-1}$, $C^{n,-2}$ und $D^{n,-2}$ etc. über.

Nach den Entwickelungscoëfficienten $(i, i'c)$ etc. nimmt man $(i+1, i', c)$ etc. oder $(i-1, i'c)$ etc. vor. Wenn die Excentricität des gestörten Planeten nicht gar zu groſs ist, so wird man nur sehr wenig Glieder für jeden Störungscoëfficienten zu berechnen nöthig haben, denn die Reihen convergiren sehr stark, wie man aus den weiter unten folgenden Zahlenwerthen für Jupiter und Saturn sehen kann.

Die vorhergehende Darstellung der Rechnung führt gleichsam von selbst auf eine andere Reihenfolge der Argumente, wie die bisher gebräuchliche. Man sieht nemlich, daſs in der Berechnung des zum Argumente $ig+pg'$ gehörigen Coëfficienten im Allgemeinen alle Entwickelungscoëfficienten der Gröſse Ω concurriren, in welchen $i'=p$ ist; aber auch nur diese. Die Berechnung der Störungen theilt sich also in so viele Abtheilungen, als für i' merkliche Werthe vorhanden sind. Wenn man also diese durch p, q etc. bezeichnet, so bekommt man die Argumente folgendermaaſsen geordnet:

etc.	etc.	+ etc.
$+(-2g+pg')$	$+(-g+qg')$	+ etc.
$+(-g+pg')$	$+(qg')$	+ etc.
$+(pg')$	$+(g+qg')$	+ etc.
$+(g+pg')$	$+(2g+qg')$	+ etc.
$+(2g+pg')$	$+(3g+qg')$	+ etc.
+ etc.	+ etc.	+ etc.

Eine jede dieser Columnen bildet eine Reihe, die von einem gewissen Gliede an, vorwärts und rückwärts convergirt, und sich ins Unmerkliche verliert. Für das gröſste Glied einer jeden solchen Columne läſst sich ein genäherter Ausdruck geben; ich müſste aber, um ihn abzuleiten, einen Umweg nehmen, indem ich lange Entwickelungen machen müſste, die weiter nicht gebraucht würden. Ich glaube daher dies übergeben zu können, und um so mehr, da sich ohne Weiteres

Digitized by Google

die Grenzen angeben lassen, zwischen welchen das gröſste Glied nothwendig liegen muſs. Diese Grenzen sind für die obigen Columnen resp. auf der einen Seite das Glied, in welchem

$$i = -p$$
$$i = -q$$
etc.

und auf der andern Seite das Glied, dessen Argumente in den horizontalen Reihen

$$\text{etc.}, \; -2n+pn', \; -n+pn', \qquad pn', \; n+pn', \; 2n+pn', \; \text{etc.}$$
$$\text{etc.}, \; -\;n+qn', \qquad qn', \; n+qn', \; 2n+qn', \; 3n+qn', \; \text{etc.}$$

das kleinste Glied correspondirt. Mit diesen Grenzen kann man sich in der Anwendung immer begnügen. Man muſs die Rechnung mit den Gliedern anfangen, welche sie einschlieſsen, und dann die Reihen vorwärts und rückwärts fortsetzen, bis sie unmerklich werden.

Anstatt die Störungen nach den Gleichungen (18) und (19) zu berechnen, kann man sich unmittelbar der Gleichung (17) bedienen, nnd den Integrationsproceſs nachher auf die so erhaltenen numerischen Werthe der Coëfficienten von $\int T d\tau$ anwenden. Die Mühe der Rechnung ist beinahe dieselbe, denn die hierauf zu berechnende Integration wird ziemlich durch den Umstand aufgehoben, daſs man in (17) nur die Glieder für positive Werthe von k zu berechnen braucht, denn da $C^{n,k} = -C^{-n,-k}$ und $D^{n,k} = D^{-n,-k}$ ist, und die vorher genannten Factoren $\frac{n}{in+i'n'}$ hier wegfallen, so kann man die Glieder für die negativen k aus denen für die positiven schon berechneten abschreiben. Übrigens brauchen wir $\int T d\tau$ auf jeden Fall für die Berechnung der Störungen der zweiten Ordnung, und es wird daher, wenn diese Störungen merklich werden können, immer am vortheilhaftesten sein, diese Gröſse zu berechnen und von da zu $n\zeta$ überzugehen. Wir bekommen nach der Gleichung (17) diese Gröſse in folgender Form:

$$\int T d\tau = \frac{d\zeta}{dt} = \alpha_{c} \cos(\varkappa\gamma + ig + i'g') + \alpha_{s} \sin(\varkappa\gamma + ig + i'g')$$
$$+ \alpha'_{c}\, x \cos(\varkappa\gamma + ig + i'g') + \alpha'_{s}\, x \sin(\varkappa\gamma + ig + i'g')$$

wo zu bemerken ist, daſs in den beiden letzten Gliedern immer $\varkappa = 0$ ist. Wenn man diesen Ausdruck mit ndt multiplicirt und mit Berücksichtigung dessen, was oben von der Constante c gesagt ist, integrirt, so ergiebt sich, mit Ausnahme der Glieder, in welchen $i = i' = 0$ ist:

$$\begin{aligned} n\zeta = (1-c)\,n\tau &+ \left\{\frac{n\alpha_,}{in+i'n'} - \frac{n^2\alpha'_,}{(in+i'n')^2}\right\} \sin(\varkappa\gamma + ig + i'g') \\ &- \left\{\frac{n\alpha_,}{in+i'n'} + \frac{n^2\alpha'_,}{(in+i'n')^2}\right\} \cos(\varkappa\gamma + ig + i'g') \\ &+ \frac{n\alpha'_,}{in+i'n'}\, x \sin(\varkappa\gamma + ig + i'g') \\ &- \frac{n\alpha'_,}{in+i'n'}\, x \cos(\varkappa\gamma + ig + i'g') \end{aligned} \qquad \ldots.(21)$$

und für die Glieder, in welchen $i = i' = 0$ ist, haben wir:

$$n\zeta = \alpha_,\, nt \sin\varkappa\gamma + \alpha_,\, nt \cos\varkappa\gamma \qquad \ldots.(22)$$

Der Constante c wird, wie aus (20) hervorgeht, der Werth beigelegt, den das constante Glied in $\int T d\tau$ hat.

8.

Die Rechnungsmethode, welche ich bis jetzt vorgetragen habe, läſst sich sehr abkürzen. Diese Abkürzung, die ich jetzt entwickeln werde, ist schon beträchtlich für die Berechnung der Störungen der ersten Ordnung, aber sie wird es, wie man in der Folge sehen wird, in einem weit höheren Grade bei der Berechnung der Störungen der zweiten und höheren Ordnungen.

Man braucht die Summation in Beziehung auf $\varkappa$ nur für die folgenden drei Werthe auszuführen, nemlich für $\varkappa = 0$, $\varkappa = 1$ und $\varkappa = -1$, aus den letzten beiden lassen sich die übrigen Glieder auf eine höchst einfache Weise berechnen. Wir wollen, um dies zu zeigen, die Gleichung (12), oder (8) vielmehr, vornehmen. Es ist leicht einzusehen, daſs man diese Gleichung durch die folgende darstellen kann:

$$T = n\,G\left(\frac{dR^\varkappa}{de}\right)\cos\varkappa\gamma + n\,H\varkappa R^\varkappa \sin\varkappa\gamma$$

wo G und H zwei Functionen von t sind, die kein τ enthalten. Hieraus ergiebt sich, wenn man mit $d\tau$ multiplicirt und integrirt:

$$\int T d\tau = G\left(\frac{dR^{\varkappa}}{\varkappa de}\right)\sin\varkappa\gamma - HR^{\varkappa}\cos\varkappa\gamma$$

und für $n\zeta$ hat man, wenigstens die Glieder erster Ordnung in Beziehung auf die Massen anbelangend, einen analogen Ausdruck, oder es ist ebenfalls, wenn M und N zwei andere Functionen von t ohne τ bedeuten:

$$n\zeta = M\left(\frac{dR^{\varkappa}}{\varkappa de}\right)\sin\varkappa\gamma - NR^{\varkappa}\cos\varkappa\gamma$$

Wir werden in der Folge sehen, in wie weit dieses auch für die Störungen der höheren Ordnungen statt findet. — Es ist in den vorstehenden Ausdrücken auf die der Integration nach τ hinzuzufügende Constante keine Rücksicht genommen worden, denn man kann sie sich in der Gröſse H oder N enthalten vorstellen. Übrigens brauchen wir sie gar nicht, weil wir uns nur mit den Gliedern beschäftigen werden, in welchen $\varkappa$ nicht Null ist. Sei nun

$$G \text{ oder auch } M = \mathrm{W}\cos\beta - \mathrm{W}'\sin\beta$$
$$-H \text{ oder auch } -N = \mathrm{V}\cos\beta + \mathrm{V}'\sin\beta$$

wo zur Abkürzung β für $ig + i'g'$ geschrieben ist. Durch Substitution dieser Werthe in die vorstehenden Ausdrücke ergiebt sich zufolge der Relationen (11):

$$\int T d\tau \text{ oder auch } n\zeta = \alpha_s^{(\varkappa)}\sin(\varkappa\gamma + \beta) + \alpha_c^{(\varkappa)}\cos(\varkappa\gamma + \beta)$$

wenn wir

$$\mathrm{W}\left(\frac{dR^{\varkappa}}{\varkappa de}\right) + \mathrm{V}'R^{\varkappa} = \alpha_s^{(\varkappa)}$$
$$\mathrm{W}'\left(\frac{dR^{\varkappa}}{\varkappa de}\right) + \mathrm{V}R^{\varkappa} = \alpha_c^{(\varkappa)}$$

setzen. — Ich bemerke zum Überfluſs, daſs diese α mit den im vorigen Artikel gleich benannten nicht ganz einerlei sind.

Wir wollen nun einige specielle Werthe dieser Coëfficienten vornehmen, etwa

Digitized by Google

$$\mathrm{W}\left(\frac{dR^{(1)}}{de}\right) + \mathrm{V}'R^{(1)} = \alpha_{,}^{(1)}$$

$$\mathrm{W}\left(\frac{dR^{(2)}}{2de}\right) + \mathrm{V}'R^{(2)} = \alpha_{,}^{(2)}$$

$$-\mathrm{W}\left(\frac{dR^{(1)}}{de}\right) + \mathrm{V}'R^{(1)} = \alpha_{,}^{(-1)}$$

$$-\mathrm{W}\left(\frac{dR^{(2)}}{2de}\right) + \mathrm{V}'R^{(2)} = \alpha_{,}^{(-2)}$$

Wenn wir die erste und dritte dieser Gleichungen addiren und subtrahiren, so ergiebt sich:

$$\mathrm{V}' = \frac{\alpha_{,}^{(1)} + \alpha_{,}^{(-1)}}{2R^{(1)}}$$

$$\mathrm{W} = \frac{\alpha_{,}^{(1)} - \alpha_{,}^{(-1)}}{2\left(\frac{dR^{(1)}}{de}\right)}$$

und wenn wir diese Werthe von V′ und W in die zweite und vierte der vorhergehenden Gleichungen substituiren, so bekommen wir:

$$\alpha_{,}^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{R^{(2)}}{R^{(1)}} + \frac{\left(\frac{dR^{(2)}}{2de}\right)}{\left(\frac{dR^{(1)}}{de}\right)}\right)\alpha_{,}^{(1)} + \frac{1}{2}\left(\frac{R^{(2)}}{R^{(1)}} - \frac{\left(\frac{dR^{(2)}}{2de}\right)}{\left(\frac{dR^{(1)}}{de}\right)}\right)\alpha_{,}^{(-1)}$$

$$\alpha_{,}^{(-2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{R^{(2)}}{R^{(1)}} + \frac{\left(\frac{dR^{(2)}}{2de}\right)}{\left(\frac{dR^{(1)}}{de}\right)}\right)\alpha_{,}^{(-1)} + \frac{1}{2}\left(\frac{R^{(2)}}{R^{(1)}} - \frac{\left(\frac{dR^{(2)}}{2de}\right)}{\left(\frac{dR^{(1)}}{de}\right)}\right)\alpha_{,}^{(1)}$$

es ist klar, daſs man ein ähnliches Resultat bekommt, welche zwei auf-einander folgende Coëfficienten man auch mit einander verbindet, und ebenfalls, daſs man für die Coëfficienten des Cosinus ein analoges Resultat erhält. Wenn wir daher für ein positives $\varkappa$ setzen:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{R^{(\varkappa+1)}}{R^{(\varkappa)}} + \frac{\left(\frac{dR^{(\varkappa+1)}}{(\varkappa+1)de}\right)}{\left(\frac{dR^{(\varkappa)}}{\varkappa de}\right)}\right) = \eta^{(\varkappa)}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{R^{(\varkappa+1)}}{R^{(\varkappa)}} - \frac{\left(\frac{dR^{(\varkappa+1)}}{(\varkappa+1)de}\right)}{\left(\frac{dR^{(\varkappa)}}{\varkappa de}\right)}\right) = \theta^{(\varkappa)}$$

und annehmen, daſs $\eta^{(-\varkappa)} = \eta^{(\varkappa)}$ und $\theta^{(-\varkappa)} = \theta^{(\varkappa)}$ sei, so haben wir für ein positives $\varkappa$:

(23)....

$$\alpha_s^{(\varkappa+1)} = \eta^{(\varkappa)} \,.\, \alpha_s^{(\varkappa)} + \theta^{(\varkappa)} \,.\, \alpha_s^{(-\varkappa)}$$
$$\alpha_c^{(\varkappa+1)} = \eta^{(\varkappa)} \,.\, \alpha_c^{(\varkappa)} + \theta^{(\varkappa)} \,.\, \alpha_c^{(-\varkappa)}$$

und für ein negatives $\varkappa$:

$$\alpha_s^{(\varkappa-1)} = \eta^{(\varkappa)} \,.\, \alpha_s^{(\varkappa)} + \theta^{(\varkappa)} \,.\, \alpha_s^{(-\varkappa)}$$
$$\alpha_c^{(\varkappa-1)} = \eta^{(\varkappa)} \,.\, \alpha_c^{(\varkappa)} + \theta^{(\varkappa)} \,.\, \alpha_c^{(-\varkappa)}$$

in welchen Gleichungen aber der Werth $\varkappa = 0$ ausgeschlossen ist. Wenn man also nach den Vorschriften der vorhergehenden Artikel die Coëfficienten der Glieder gerechnet hat, in welchen $\varkappa = 0$, $\varkappa = 1$ und $\varkappa = -1$ ist, so kann man nach den Formeln (23) alle übrigen Coëfficienten berechnen. Die Coëfficienten der Glieder, in welchen $\varkappa = 0$ ist, könnten dadurch bestimmt werden, daſs der Bedingungsgleichung (H. Art. 17.) Genüge geleistet würde, allein es ist klar, daſs diese alsdann nicht zur Prüfung der numerischen Rechnung angewandt werden könnte; es ist daher vortheilhaft, diese Glieder direct zu berechnen, und eben deshalb habe ich im Art. 5. die analytischen Ausdrücke von $C^{0,i}$ und $D^{0,i}$ gegeben. Die Anwendung der Gleichungen (23) ist sehr einfach, wenn die Excentricität des gestörten Planeten sich nicht der Einheit gar zu sehr nähert. Es ist wohl nicht überflüssig, einige der dem Saturn zukommenden numerischen Werthe hieher zu setzen. Für diesen Planeten, dessen Excentricität ohngefähr $\frac{1}{18}$ ist, hat man, wie weiter unten berechnet werden wird,

$$\eta^{(1)} = +\,0{,}0140266$$
$$\theta^{(1)} = +\,0{,}00000185$$

und unter den Störungscoëfficienten, in deren Argumente $\varkappa = 1$, ist der gröſste =

$$+\,778{,}''873 \cos(\gamma + 0g' - g)$$

Das Product dieses Coëfficienten mit $\theta^{(1)}$ giebt

$$0{,}''001$$

welches auf jeden Fall vernachlässigt werden kann. Aus mehrerem Grunde kann man die Gröſsen $\theta^{(2)}$, etc. übergehen, und man bekommt

Digitized by Google

also bis auf $\frac{1}{1000}$ Secunde genau und in den meisten Fällen noch genauer, für diesen Planeten die Glieder, worin $\varkappa = \pm 2$, aus denen wo $\varkappa = \pm 1$ ist, durch die einfache Multiplication mit der Zahl 0,0140.... Diese Rechnung ist so einfach, daſs man sie, ohne eine Zwischenzahl hinzuschreiben, im Kopſe machen kann; die Glieder, wo $\varkappa$ gröſser ist als ± 2, sind natürlich eben so einfach zu erhalten.

Damit man beurtheilen könne, welchen Werth die Gröſsen $\eta^{(\varkappa)}$ und $\theta^{(\varkappa)}$ für eine andere Excentricität annehmen, habe ich von einigen derselben die ersten Glieder nach den Potenzen der Excentricität entwickelt. Diese sind:

$$\eta^{(1)} = \frac{1}{4}\,e - \frac{1}{16}\,e^3 + 0e^5 + \text{etc.}$$

$$\eta^{(2)} = \frac{1}{2}\,e - \frac{1}{8}\,e^3 - \frac{1}{2304}\,e^5 + \text{etc.}$$

$$\eta^{(3)} = \frac{2}{3}\,e - \frac{1}{6}\,e^3 + \text{etc.}$$

$$\theta^{(1)} = \frac{1}{96}\,e^3 + \frac{1}{384}\,e^5 + \text{etc.}$$

$$\theta^{(2)} = \frac{1}{96}\,e^3 + \frac{3}{640}\,e^5 + \text{etc.}$$

$$\theta^{(3)} = \frac{1}{120}\,e^3 + \text{etc.}$$

Hieraus sieht man schon, daſs die in Rede stehenden Glieder wenigstens bis $\varkappa = \pm 3$ convergiren, wenn auch die Excentricität $= 1$ ist; es läſst sich übrigens beweisen, daſs alle convergiren müssen, wenn die Excentricität auch noch so wenig kleiner wie die Einheit ist, doch da die Darlegung dieser Principien nicht mit dem Zwecke zusammengehört, dem diese Abhandlung gewidmet ist, so übergehe ich sie.

9.

Die Störungen des Logarithmus des Radius Vectors bekommt man aus dem Werthe von ζ durch Hülfe der Relation, welche (H. Art. 11.) entwickelt ist. Die Gleichung (H. 16.) läſst sich vereinfachen. Wenn wir vorläufig nur auf die Störungen erster Ordnung Rücksicht nehmen, so ist

Digitized by Google

$$\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right) = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\left(\frac{dl(\varrho)}{d\tau}\right)}{\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)} \left(\frac{d\zeta}{dt}\right) = 0$$

und wenn wir überdies zur Abkürzung

$$\frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{d\Omega}{dv}\right) = \frac{dS}{dt}$$

setzen, so geht die genannte Gleichung (H. 16.) in folgende über:

(24).... $$2\frac{dl(\varrho)}{dt} = \frac{dS}{dt} - \frac{d^2\zeta}{d\tau dt}$$

Diese Gleichung ist nach t integrabel und giebt

(25).... $$2l(\varrho) = S - \frac{d(\zeta)}{d\tau}$$

Ich habe hier (ζ) statt ζ geschrieben, wie ich es in einem solchen Falle stets thun werde, nemlich um anzuzeigen, daſs die der Integration, welche uns ζ gegeben hat, zugefügte Constante τ hier weggelassen werden muſs.

Wenn wir die letzte Gleichung nach τ differentiiren, so ergiebt sich, weil S kein τ enthält:

$$2\frac{dl(\varrho)}{d\tau} = -\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}$$

Es zeige nun ein Querstrich über einer Gröſse an, daſs in dieser Gröſse τ in t verwandelt werden solle, dann ist (H. Art. 17.):

$$\overline{\frac{dl(\varrho)}{d\tau}} = \frac{dl(r)}{dt}$$

also ergiebt sich aus der vorigen Gleichung, daſs

$$\frac{dl(r)}{dt} = -\frac{1}{2}\overline{\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}}$$

Wenn man diese Gleichung mit dt multiplicirt und integrirt, so erhält man:

(26).... $$l(r) = -\frac{1}{2}\int\overline{\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}} + \text{Const.}$$

Digitized by Google

Nach (H. Art. 8.) muſs dem Integral, welches den Werth von $l(r)$ giebt, anstatt der Constante der rein elliptische Werth des Logarithmus des Radius Vectors, welcher aber mit nz statt der mittleren Länge berechnet wird, hinzugefügt werden. Die dem obigen Integral hinzugefügte Constante bezieht sich aber nicht hierauf, sondern es ist eine wirkliche Constante, welche bei der zweiten Differentiation der Gröſse ζ nach τ verschwunden sein kann. Um sie zu bestimmen, bemerke ich, daſs die Gleichung (24) dieses Artikels die Gleichung (H. 14.) vollständig bis auf Gröſsen erster Ordnung incl. repräsentirt, das Integral dieser Gleichung also, welches (25) ist, bekommt keine andere Constante als den mit ζ statt τ nach den Formeln der rein elliptischen Bewegung berechneten $l\rho$. Verwandeln wir in dieser Gleichung τ in t, so ergiebt sich:

$$l(r) = \frac{1}{2}\,\mathrm{S} - \frac{1}{2}\,\frac{d(z)}{dt} \qquad \ldots.(27)$$

Die Vergleichung dieses Werthes von $l(r)$ mit dem sich aus (26) ergebenden giebt die verlangte Constante. Diese Vergleichung giebt:

$$-\frac{1}{2}\int\overline{\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}} + \text{Const.} = \frac{1}{2}\,\mathrm{S} - \frac{1}{2}\,\frac{d(z)}{dt}$$

Aber das erste Glied der linken Seite kann so wenig wie S ein constantes Glied enthalten, wir haben daher

$$\text{Const.} = -\frac{1}{2}\,\frac{d(z)}{dt}$$

mit alleiniger Rücksicht auf das in $\frac{d(z)}{dt}$ enthaltene constante Glied. Hiebei kommt aber der in Art. 6. angeführte Umstand in Betracht, daſs die mittlere Bewegung, welche man aus den Beobachtungen ableitet, nicht diejenige ist, welche ohne das Dasein der Störungen statt finden würde; diese letztgenannte muſs aber eigentlich angewandt werden, um den la zu berechnen, welcher zur Berechnung des lr aus den rein elliptischen Formeln dient. Wir haben aber oben die Störungen der Länge so eingerichtet, daſs das durch die Beobachtungen gegebene n allenthalben angewandt werden muſs, wir werden daher auch jetzt die Störungen des Logarithmus des Radius Vectors so einrichten, daſs

Digitized by Google

das aus dieſem n folgende la gebraucht werden muſs. Zu dem Ende bekommt die obige Conſtante noch ein Glied, welches ich jetzt beſtimmen werde.

Aus dem Art. 6. ergiebt ſich, daſs die mittlere Bewegung, ſo wie ſie ohne das Daſein der ſtörenden Körper ſtatt finden würde,

$$= n\ (1 - c)$$

iſt, wenn n die beobachtete mittlere Bewegung iſt, und zufolge der Gleichung (H. 1.)

$$n^2 a^3 = k'\mu$$

müſsten wir alſo la_0 aus folgender Gleichung

$$la_0 = -\frac{2}{3}\,ln - \frac{2}{3}\,l\,(1-c) + \frac{1}{3}\,l\,.\,k'\mu$$

berechnen, ſtatt deſſen wir, wie eben geſagt iſt, die folgende anwenden werden:

$$la = -\frac{2}{3}\,ln + \frac{1}{3}\,l\,.\,k'\mu$$

Wir müſſen daher, um das richtige Reſultat zu bekommen, zu $l(r)$ oder zur obigen Conſtante die Gröſse

$$la_0 - la$$

addiren. Dieſe ergiebt ſich aber aus den vorſtehenden Gleichungen

$$= -\frac{2}{3}\,l\,(1-c) = \frac{2}{3}\,c$$

und wir haben daher vollſtändig:

$$\text{Const.} = -\frac{1}{2}\,\frac{d(z)}{dt} + \frac{2}{3}\,c$$

Aber in $n(\zeta)$ iſt das der Zeit proportionale Glied, nemlich das Glied, welches nach Abzug der rein elliptiſchen mittleren Bewegung übrig bleibt, wie (18) und (19) zeigen:

$$n(\zeta) = cnt$$

Hieraus folgt, daſs

$$n(z) = cnt$$

Digitized by Google

und

$$\frac{d(z)}{dt} = c$$

Substituiren wir diesen Werth in die letzte Gleichung für die Constante, so ergiebt sich:

$$\text{Const.} = \frac{1}{6}\,c$$

und hiermit

$$l(r) = -\frac{1}{2}\int \overline{\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}}\,dt + \frac{1}{6}\,c \qquad \text{....(28)}$$

Wir haben

$$\frac{d(\zeta)}{d\tau} = \frac{d\,n(\zeta)}{d\gamma}$$

$$\frac{1}{n}\,\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} = \frac{d^2 n(\zeta)}{d\gamma^2}$$

weil $d\gamma = n\,d\tau$ ist. Sei nun

$$\frac{1}{n}\,\overline{\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}} = \eta_{,}\,\sin(ig + i'g') + \eta_{'}\,\cos(ig + i'g') + \vartheta_{,}\,nt\,\sin(ig + i'g') + \vartheta_{'}\,nt\,\cos(ig + i'g')$$

dann findet sich leicht:

$$\begin{aligned}\int \overline{\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}}\,dt = &-\left\{\frac{n\eta_{,}}{in + i'n'} - \frac{n^2\vartheta_{'}}{(in + i'n')^2}\right\}\cos(ig + i'g')\\ &+\left\{\frac{n\eta_{'}}{in + i'n'} + \frac{n^2\vartheta_{,}}{(in + i'n')^2}\right\}\sin(ig + i'g')\\ &-\frac{n\vartheta_{,}}{in + i'n'}\,nt\,\cos(ig + i'g')\\ &+\frac{n\vartheta_{'}}{in + i'n'}\,nt\,\sin(ig + i'g')\end{aligned} \qquad \text{....(29)}$$

Es ist zu bemerken, daſs bei den Störungen erster Ordnung im Argumente der mit nt multiplicirten Glieder immer $i' = 0$ ist. Die Gleichung (29) erleidet für das in $\frac{1}{n}\,\overline{\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}}$ enthaltene constante Glied eine Ausnahme, aber wenn dieses η genannt wird, so entsteht daraus im angeführten Integral, ohne Weiteres hinzuzufügen, das Glied $\eta\,nt$.

Wie man sieht, ist für die Störungen der ersten Ordnung die Gröſse $\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)$ vollständig eliminirt. Bei der Berechnung der Störungen

Digitized by Google

der zweiten Ordnung, wo diese Gröſse oder vielmehr das davon abhängige S auf mehrfache Weise vorkommen wird, bedient man sich am einfachsten der Gleichung (27), welche

(30).... $$S = 2l(r) + \frac{d(z)}{dt}$$

giebt. Will man sich aber die Mühe nicht verdrieſsen lassen, S auch direct aus der Gleichung

$$S = \int \frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{d\Omega}{dv}\right) dt$$

zu berechnen, so wird durch die Übereinstimmung der auf beiderlei Arten berechneten Werthe von S die ganze Rechnung einer Prüfung unterworfen, die keinesweges zu verachten ist. Die Arbeit ist freilich nicht kurz zu nennen, aber sie gewährt den vollkommensten Ersatz. Die Bedingungsgleichung, welche (H. Art. 17.) gegeben ist, sichert nur die Summationen, welche zur Berechnung der Störungscoëfficienten nöthig sind, und wenn man diese richtig ausgeführt hat, so wird der Bedingungsgleichung Genüge geleistet sein, die Entwickelungscoëfficienten von Ω mögen noch so falsch sein. Die eben angeführte Bedingungsgleichung hingegen sichert die Richtigkeit dieser. Nun läſst sich freilich die Berechnung dieser Entwickelungscoëfficienten, wie wir weiter unten sehen werden, so einrichten, daſs man die vollkommenste Überzeugung erlangen kann, daſs sie fehlerfrei seien, aber es ist dennoch von groſsem Nutzen, die eben angezeigte Bedingungsgleichung zu berechnen, weil sie am Schlusse der Rechnung die Richtigkeit derselben gleichsam anschaulich vor Augen legt.

Wenn man nicht nur die Störungen des Planeten m, sondern auch die des Planeten m' rechnet, so kann man denselben Zweck auf eine weit kürzere Weise erreichen. Wir haben aus dem vorhergehenden

$$S = \int \frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{d\Omega}{dv}\right) dt$$

und diesem analog für den Planeten m':

$$S' = \int \frac{a'n'}{\sqrt{1-e'^2}} \left(\frac{d\Omega'}{dv'}\right) dt$$

Digitized by Google

Nun ist aber bekanntlich für den ersten Theil von Ω, das ist für $\Omega_{,}$:

$$\frac{\mu}{m'}\left(\frac{d\Omega_{,}}{dv}\right)+\frac{\mu'}{m}\left(\frac{d\Omega'_{,}}{dv'}\right)=-\frac{\mu}{m'}\left(\frac{d\Omega_{,}}{d\Theta}\right)=-\frac{\mu'}{m}\left(\frac{d\Omega'_{,}}{d\Theta}\right)$$

und daher nach der Entwickelung:

$$\frac{\mu}{m'}\left(\frac{d\Omega_{,}}{dv}\right)+\frac{\mu'}{m}\left(\frac{d\Omega'_{,}}{dv'}\right)=-\Phi_{s}^{i,i'}\sin(ig+i'g')-\Phi_{c}^{i,i'}\cos(ig+i'g')\;\ldots\ldots(a)$$

wenn man

$$\left(\frac{d\Omega_{,}}{d\Theta}\right)=\frac{m'}{\mu}\Phi_{s}^{i,i'}\sin(ig+i'g')+\frac{m'}{\mu}\Phi_{c}^{i,i'}\cos(ig+i'g')$$

setzt. Ferner haben wir für den zweiten Theil von Ω oder für $\Omega_{,,}$ und $\Omega'_{,,}$ (H. Art. 26.):

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mu}{m'}\left(\frac{d\Omega_{,,}}{dv}\right)&=\frac{i'^2}{a'^3}X_{s}^{i,i'}\sin(ig+i'g')+\frac{i'^2}{a'^3}X_{c}^{i,i'}\cos(ig+i'g')\\ \frac{\mu'}{m}\left(\frac{d\Omega'_{,,}}{dv'}\right)&=\frac{i^2}{a^3}\overset{1}{X}{}_{s}^{i,i'}\sin(ig+i'g')+\frac{i^2}{a^3}\overset{1}{X}{}_{c}^{i,i'}\cos(ig+i'g')\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(b)$$

wenn die X und die $\overset{1}{X}$ resp. die Entwickelungscoëfficienten von $\left(\frac{d\psi}{dv}\right)$ und $\left(\frac{d\psi}{dv'}\right)$ bedeuten, wo unter ψ die Gröſse

$$-rr'\left\{\cos^2\tfrac{1}{2}I\cos(u-u')+\sin^2\tfrac{1}{2}I\cos(u+u')\right\}$$

verstanden wird. Die Summe der vorstehenden Gleichungen (a) und (b) giebt, wenn man sie mit $\frac{m'}{\mu}\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}$ multiplicirt:

$$\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)+\frac{\frac{m'}{\mu}}{\frac{m}{\mu'}}\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega'}{dv'}\right)$$

$$=\frac{m'}{\mu}\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\frac{i'^2}{a'^3}X_{s}^{i,i'}+\frac{i^2}{a^3}\overset{1}{X}{}_{s}^{i,i'}-\Phi_{s}^{i,i'}\right\}\sin(ig+i'g')$$

$$+\frac{m'}{\mu}\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\frac{i'^2}{a'^3}X_{c}^{i,i'}+\frac{i^2}{a^3}\overset{1}{X}{}_{c}^{i,i'}-\Phi_{c}^{i,i'}\right\}\cos(ig+i'g')$$

Wenn man diese Gleichung mit dt multiplicirt und integrirt, und dabei auf die eben gegebenen Werthe von S und S′ Rücksicht nimmt, so entsteht

Digitized by Google

$$S + \frac{\frac{m'}{\mu}}{\frac{m}{\mu'}} \frac{a\,n}{a'n'} \frac{\sqrt{1-e'^2}}{\sqrt{1-e^2}} S'$$

$$= -\frac{m'}{\mu} \frac{a\,n}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\left\{\frac{i'^2}{a'^3} X_s^{i,i'} + \frac{i^2}{a^3} \overset{1}{X}{}_s^{i,i'} - \Phi_s^{i,i'}\right\}}{in + i'n'} \cos(ig + i'g')$$

$$+ \frac{m'}{\mu} \frac{a\,n}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\left\{\frac{i'^2}{a'^3} X_c^{i,i'} + \frac{i^2}{a^3} \overset{1}{X}{}_c^{i,i'} - \Phi_c^{i,i'}\right\}}{in + i'n'} \sin(ig + i'g')$$

Wir haben aber auch aus der vorhergehenden Rechnung

$$S = 2l(r) + \frac{d(z)}{dt}$$

$$S' = 2l(r') + \frac{d(z')}{dt}$$

oder, da man diese Gröſsen als unendliche Reihen erhält:

$$S = N_c^{i,i'} \cos(ig + i'g') + N_s^{i,i'} \sin(ig + i'g')$$

$$S' = N_c'^{i,i'} \cos(ig + i'g') + N_s'^{i,i'} \sin(ig + i'g')$$

Es ergeben sich demnach folgende Bedingungsgleichungen, welche, wie jene, über die Richtigkeit der Reihenentwickelung von Ω und $r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ entscheiden.

$$(31)\ldots\begin{cases} 0 = \{N_c^{i,i'} + \phi N_c'^{i,i'}\} + a \frac{m'}{\mu} \frac{n}{in + i'n'} \frac{\left\{\frac{i'^2}{a'^3} X_s^{i,i'} + \frac{i^2}{a^3} \overset{1}{X}{}_s^{i,i'} - \Phi_s^{i,i'}\right\}}{\sqrt{1-e^2}} \\ 0 = \{N_s^{i,i'} + \phi N_s'^{i,i'}\} - a \frac{m'}{\mu} \frac{n}{in + i'n'} \frac{\left\{\frac{i'^2}{a'^3} X_c^{i,i'} + \frac{i^2}{a^3} \overset{1}{X}{}_c^{i,i'} - \Phi_c^{i,i'}\right\}}{\sqrt{1-e^2}} \end{cases}$$

wo zur Abkürzung

$$\phi = \frac{\frac{m'}{\mu}}{\frac{m}{\mu'}} \cdot \frac{a\,n}{a'n'} \cdot \frac{\sqrt{1-e'^2}}{\sqrt{1-e^2}}$$

gesetzt ist. Diese Controlle hat vor der eben erwähnten den Vorzug, daſs sie nicht die Entwickelungen von $\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)$ und $\left(\frac{d\Omega}{dv'}\right)$ verlangt, sondern nur die Entwickelung von $\left(\frac{d\Omega}{d\Theta}\right)$, welche ohnehin für die Störungen der

Digitized by Google

Breite gebraucht werden muſs, und die von $\left(\frac{d\psi}{dv}\right)$ und $\left(\frac{d\psi}{dv'}\right)$, welche leicht zu haben sind, voraussetzt.

10.

Bei der Berechnung der Breitenstörungen wollen wir uns der Gleichungen (II. 19.) bedienen. Diese sind:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dq}\right)$$
$$\frac{dq}{dt} = -\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dp}\right)$$

wo p und q sich auf die feste Ebene der Bahn des gestörten Planeten beziehen, welche in der gewählten Zeitepoche statt fand. Wir müssen also nun die Differentialquotienten der Gröſse Ω nach p und nach q, und für den Fall, wo $p = q = 0$ ist, haben. Diese wollen wir direct entwickeln. Seien

$$x = r\cos(v-\theta) \qquad x' = r'\cos(v'-\theta')$$
$$y = r\cos i\sin(v-\theta) \qquad y' = r'\cos i'\sin(v'-\theta')$$
$$z = r\sin i\sin(v-\theta) \qquad z' = r'\sin i'\sin(v'-\theta')$$

Wir können die Gröſsen i, i', θ und θ' dergestalt annehmen, daſs die Ebene der x und y, welche übrigens willkührlich ist, mit der Ebene der x' und y' zusammen fällt; es fallen jedoch alsdann, wie aus der den Coordinaten gegebenen Form hervorgeht, die Achsen der x und der y nicht mit den Achsen der x' und der y' zusammen. Die Achse der x ist nemlich die Durchschnittslinie der Planetenbahn m mit der willkührlichen Ebene, und die Achse der x' ist die Durchschnittslinie der Planetenbahn m' mit derselben Ebene. Aber wenn wir mit $x_,$, $y_,$ und $z_,$ die Coordinaten des Planeten m bezeichnen, welche resp. mit x', y' und z' parallel sind, so haben wir bekanntlich

$$x_, = y\sin(\theta'-\theta) + x\cos(\theta'-\theta)$$
$$y_, = y\cos(\theta'-\theta) - x\sin(\theta'-\theta)$$
$$z_, = z$$

Digitized by Google

also wenn wir die obigen Werthe von x, y und z substituiren:

$$\begin{aligned} x_{,} &= r \sin(\theta' - \theta) \cos i \sin(v - \theta) + r \cos(\theta' - \theta) \cos(v - \theta) \\ y_{,} &= r \cos(\theta' - \theta) \cos i \sin(v - \theta) - r \sin(\theta' - \theta) \cos(v - \theta) \\ z_{,} &= r \sin i \sin(v - \theta) \end{aligned}$$

Diese Werthe von $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ und x', y', z' geben, wenn man sie in $(x'-x_{,})^2 + (y'-y_{,})^2 + (z'-z_{,})^2 = \Delta_{,}^2$ substituirt, und zur Abkürzung

$$u = v - \theta \quad ; \quad u' = v' - \theta'$$

macht:

$$\begin{aligned} \Delta_{,}^2 = r^2 + r'^2 &- 2rr' \sin(\theta' - \theta) \cos i \sin u \cos u' \\ &+ 2rr' \sin(\theta' - \theta) \cos i' \cos u \sin u' - 2rr' \cos(\theta' - \theta) \cos u \cos u' \\ &- 2rr' \cos(\theta' - \theta) \cos i \cos i' \sin u \sin u' - 2rr' \sin i \sin i' \sin u \sin u' \end{aligned}$$

Eliminirt man nun i und θ durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} p &= \sin i \sin \theta \\ q &= \sin i \cos \theta \end{aligned}$$

woraus sich ergiebt:

$$\sin \theta = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} \quad ; \quad \cos \theta = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

$$\cos i \sin \theta = p \sqrt{\frac{1 - p^2 - q^2}{p^2 + q^2}} \quad ; \quad \cos i \cos \theta = q \sqrt{\frac{1 - p^2 - q^2}{p^2 + q^2}}$$

so bekommt man, wenn man überdies von der identischen Gleichung

$$\sqrt{1 - p^2 - q^2} = 1 - \frac{p^2 + q^2}{1 + \sqrt{1 - p^2 - q^2}}$$

Gebrauch macht:

$$\begin{aligned} \Delta_{,}^2 = r^2 + r'^2 &+ 2rr' \cos u' \frac{q^2 \sin v \sin \theta' - pq(\sin v \cos \theta' + \cos v \sin \theta') + p^2 \cos v \cos \theta'}{1 + \sqrt{1 - p^2 - q^2}} \\ &- 2rr' \cos i' \sin u' \frac{q^2 \sin v \cos \theta' + pq(\sin v \sin \theta' - \cos v \cos \theta') - p^2 \cos v \sin \theta'}{1 + \sqrt{1 - p^2 - q^2}} \\ &- 2rr' \cos u' (\cos v \cos \theta' + \sin v \sin \theta') \\ &+ 2rr' \cos i' \sin u' (\cos v \sin \theta' - \sin v \cos \theta') \\ &+ 2rr' \sin i' \sin u' (p \cos v - q \sin v) \end{aligned}$$

Digitized by Google

Man sieht sogleich, daſs in dem Differentialquotienten dieser Gröſse, sei es nach p oder nach q, alle Glieder bis auf das letzte Eine dieser beiden Gröſsen als Factor enthalten werden; diese Glieder werden also verschwinden, wenn nach der Differentiation $p = q = 0$ gemacht wird. Wir haben daher ohne Weiteres in dem genannten Falle:

$$\Delta_, \left(\frac{d\Delta_,}{dp}\right) = rr' \sin \mathrm{I} \sin u' \cos v \quad ; \quad \Delta_, \left(\frac{d\Delta_,}{dq}\right) = - rr' \sin \mathrm{I} \sin u' \sin v$$

wo i' in I und ϑ' in Θ übergegangen, also

$$u' = v' - \Theta$$

ist. Hieraus bekommen wir, wenn wir überdies

$$u = v - \Theta$$

machen:

$$\left(\frac{d\Omega_,}{dp}\right) = - \frac{m'}{\mu} \frac{rr' \sin \mathrm{I} \sin u' \cos (u + \Theta)}{\Delta_,^3}$$

$$\left(\frac{d\Omega_,}{dq}\right) = \frac{m'}{\mu} \frac{rr' \sin \mathrm{I} \sin u' \sin (u + \Theta)}{\Delta_,^3}$$

Wenn man die in (H. Art. 24.) gegebenen Werthe von $\Omega_,$ und $\Omega_{,,}$ mit einander vergleicht, so wird man leicht gewahr, daſs man $\left(\frac{d\Omega_{,,}}{dp}\right)$ und $\left(\frac{d\Omega_{,,}}{dq}\right)$ resp. aus $\left(\frac{d\Omega_,}{dp}\right)$ und $\left(\frac{d\Omega_,}{dq}\right)$ bekommt, wenn man in diesen $-r'^3$ für $\Delta_,^3$ schreibt; wir haben also sogleich:

$$\left(\frac{d\Omega_{,,}}{dp}\right) = \frac{m'}{\mu} \frac{r}{r'^2} \sin \mathrm{I} \sin u' \cos (u + \Theta)$$

$$\left(\frac{d\Omega_{,,}}{dq}\right) = - \frac{m'}{\mu} \frac{r}{r'^2} \sin \mathrm{I} \sin u' \sin (u + \Theta)$$

und aus ähnlichen Gründen ist

$$\left(\frac{d\psi}{dp}\right) = rr' \sin \mathrm{I} \sin u' \cos (u + \Theta)$$

$$\left(\frac{d\psi}{dq}\right) = - rr' \sin \mathrm{I} \sin u' \sin (u + \Theta)$$

Man kann die vorstehenden Differentialquotienten leicht auf die (H. Art. 24.) nach I, Θ und v gegebenen zurückführen. Wenn man in den vorstehenden Formeln $\sin (u + \Theta)$ und $\cos (u + \Theta)$ auflöst und

Digitized by Google

die Producte der Sinusse und Cosinusse von v und v' in linearische Sinusse und Cosinusse verwandelt, so bekommt man:

$$\left(\frac{d\Omega_,}{dp}\right) = -\frac{1}{2}\,\frac{m'}{\mu}\,rr'\sin\mathrm{I}\,\frac{\sin(u+u')-\sin(u-u')}{\Delta_,^3}\cos\Theta$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{m'}{\mu}\,rr'\sin\mathrm{I}\,\frac{\cos(u+u')-\cos(u-u')}{\Delta_,^3}\sin\Theta$$

$$\left(\frac{d\Omega_,}{dq}\right) = -\frac{1}{2}\,\frac{m'}{\mu}\,rr'\sin\mathrm{I}\,\frac{\cos(u+u')-\cos(u-u')}{\Delta_,^3}\sin\Theta$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{m'}{\mu}\,rr'\sin\mathrm{I}\,\frac{\sin(u+u')-\sin(u-u')}{\Delta_,^3}\sin\Theta$$

Andererseits bekommt man aus (H. Art. 24.), wenn man $\left(\frac{d\Omega_,}{d\Theta}\right)$ mit sin I dividirt, $\left(\frac{d\Omega_,}{dv}\right)$ mit tg $\frac{1}{2}$ I multiplicirt und diese Gröſsen addirt:

$$\left(\frac{d\Omega_,}{d\Theta}\right)\frac{1}{\sin\mathrm{I}} + \left(\frac{d\Omega_,}{dr}\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\mathrm{I} = \frac{1}{2}\,\frac{m'}{\mu}\,rr'\sin\mathrm{I}\,\frac{\sin(u+u')-\sin(u-u')}{\Delta_,^3}$$

und der dort befindliche Werth von $\left(\frac{d\Omega_,}{d\mathrm{I}}\right)$ läſst sich folgendermaaſsen schreiben:

$$\left(\frac{d\Omega_,}{d\mathrm{I}}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{m'}{\mu}\,rr'\sin\mathrm{I}\,\frac{\cos(u+u')-\cos(u-u')}{\Delta_,^3}$$

Vergleicht man diese Ausdrücke mit den vorstehenden Werthen von $\left(\frac{d\Omega_,}{dp}\right)$ und $\left(\frac{d\Omega_,}{dq}\right)$ und erwägt, daſs daſs die betreffenden Differentialquotienten von $\Omega_,$, eben so behandelt werden können, so ergiebt sich sogleich:

$$\left(\frac{d\Omega}{dp}\right) = -\left(\frac{d\Omega}{d\mathrm{I}}\right)\sin\Theta - \left\{\left(\frac{d\Omega}{d\Theta}\right)\frac{1}{\sin\mathrm{I}} + \left(\frac{d\Omega}{dv}\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\mathrm{I}\right\}\cos\Theta$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dq}\right) = -\left(\frac{d\Omega}{d\mathrm{I}}\right)\cos\Theta + \left\{\left(\frac{d\Omega}{d\Theta}\right)\frac{1}{\sin\mathrm{I}} + \left(\frac{d\Omega}{dv}\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\mathrm{I}\right\}\sin\Theta$$

Aber es ist, wenn man

$$P = \sin\mathrm{I}\,\sin\Theta$$
$$Q = \sin\mathrm{I}\,\cos\Theta$$

macht (H. Art. 18.):

Digitized by Google

$$\left(\frac{d\Omega}{dP}\right) = \left(\frac{d\Omega}{dI}\right)\frac{\sin\Theta}{\cos I} + \left(\frac{d\Omega}{d\Theta}\right)\frac{\cos\Theta}{\sin I}$$
$$\left(\frac{d\Omega}{dQ}\right) = \left(\frac{d\Omega}{dI}\right)\frac{\cos\Theta}{\cos I} - \left(\frac{d\Omega}{d\Theta}\right)\frac{\sin\Theta}{\sin I}$$

und daher gehen die eben gefundenen Gleichungen nach einer leichten Reduction in folgende über:

$$\left(\frac{d\Omega}{dp}\right) = -\cos I\left(\frac{d\Omega}{dP}\right) - \left[\left(\frac{d\Omega}{dv}\right) + Q\left(\frac{d\Omega}{dP}\right) - P\left(\frac{d\Omega}{dQ}\right)\right]\frac{Q}{1+\cos I}$$
$$\left(\frac{d\Omega}{dq}\right) = -\cos I\left(\frac{d\Omega}{dQ}\right) + \left[\left(\frac{d\Omega}{dv}\right) + Q\left(\frac{d\Omega}{dP}\right) - P\left(\frac{d\Omega}{dQ}\right)\right]\frac{P}{1+\cos I}$$

und wenn man diese Ausdrücke in (II. 19.) substituirt, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= -\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\cos I\left(\frac{d\Omega}{dQ}\right)\\ &\quad+\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\frac{P}{1+\cos I}\left[\left(\frac{d\Omega}{dv}\right) + Q\left(\frac{d\Omega}{dP}\right) - P\left(\frac{d\Omega}{dQ}\right)\right]\\ \frac{dq}{dt} &= \frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\cos I\left(\frac{d\Omega}{dP}\right)\\ &\quad+\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\frac{Q}{1+\cos I}\left[\left(\frac{d\Omega}{dv}\right) + Q\left(\frac{d\Omega}{dP}\right) - P\left(\frac{d\Omega}{dQ}\right)\right]\end{aligned}\right\}\ldots(32)$$

Bevor wir weiter gehen, wollen wir mit diesen Gleichungen eine Veränderung vornehmen, wodurch ohne Verletzung der geometrischen Strenge die Berechnung der Breitenstörungen bedeutend vereinfacht wird. Es ist ohne Weiteres klar, daſs es bei allen astronomischen Berechnungen an sich gleichgültig ist, von welchem Punkte aus man die Längen zählt, und wenn man für diesen Punkt immer die Frühlingsnachtgleiche annimmt, so geschieht dieses nur, um eine Ungleichförmigkeit zu vermeiden, welche zu Verwirrungen Anlaſs geben könnte. Da aber, wie gesagt, der Anfangspunkt der Längen willkührlich ist, so wollen wir in den vorstehenden Formeln den aufsteigenden Knoten der Planetenbahn m' auf der Planetenbahn m dafür annehmen, welcher zur angenommenen Zeitepoche statt fand. Wir können den Formeln ohne Weiteres diese Bedingung unterlegen, aber wir thun besser, wenn wir sie analytisch darin einführen und solchergestalt die Gleichförmigkeit

Digitized by Google

hinsichtlich des Anfangspunktes der Längen wieder herstellen. Die in Rede stehende Bedingung wird analytisch dadurch ausgedrückt, daſs wir von allen vorkommenden Längen den Bogen Θ abziehen; aber es ist bekannt, daſs Ω von dem Anfangspunkte der Längen unabhängig ist; es ist also völlig gleichgültig, ja selbst unnütz, bei den in dieser Gröſse enthaltenen Längen die genannte Subtraction vorzunehmen, und wir haben daher nur von den auſserhalb Ω vorkommenden Längen Θ abzuziehen, und dieses reducirt sich darauf, in den obigen Formeln $\Theta = 0$ zu machen. Es ergiebt sich hierdurch:

$$P = 0$$
$$Q = \sin \mathrm{I}$$
$$\left(\frac{d\Omega}{dP}\right) = \left(\frac{d\Omega}{d\Theta}\right) \frac{1}{\sin \mathrm{I}}$$
$$\left(\frac{d\Omega}{dQ}\right) = \left(\frac{d\Omega}{d\mathrm{I}}\right) \frac{1}{\cos \mathrm{I}}$$
$$\frac{dp}{dt} = -\frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{d\Omega}{dQ}\right)$$
$$\frac{dq}{dt} = \frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{d\Omega}{dP}\right) + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \mathrm{I} \frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{d\Omega}{dv}\right)$$

oder wenn wir in die letzten die vorstehenden substituiren, für die erste Approximation:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{d\Omega}{d\mathrm{I}}\right)$$
$$\frac{dq}{dt} = \frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{d\Omega}{d\Theta}\right) \frac{1}{\sin \mathrm{I}} + \left(\frac{dS}{dt}\right) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \mathrm{I}$$

letzteres, weil wir bereits

$$S = \int \frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{d\Omega}{dv}\right) dt$$

gemacht haben. Wenn wir nun annehmen, daſs

$$\left(\frac{d\Omega}{d\mathrm{I}}\right) = \frac{m'}{\mu} \frac{d.(i,i',c)}{d\mathrm{I}} \cos(ig+i'g') + \frac{m'}{\mu} \frac{d.(i,i',s)}{d\mathrm{I}} \sin(ig+i'g')$$
$$\left(\frac{d\Omega}{d\Theta}\right) = \frac{m'}{\mu} \frac{d.(i,i',c)}{d\Theta} \cos(ig+i'g') + \frac{m'}{\mu} \frac{d.(i,i',s)}{d\Theta} \sin(ig+i'g')$$

Digitized by Google

so bekommen wir ohne Mühe aus den vorstehenden Formeln:

$$\left.\begin{aligned}
p = & -\frac{m'}{\mu}\cdot\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{n}{in+i'n'}\cdot\frac{d(i,i',c)}{d\mathrm{I}}\sin(ig+i'g') \\
& +\frac{m'}{\mu}\cdot\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{n}{in+i'n'}\cdot\frac{d(i,i',s)}{d\mathrm{I}}\cos(ig+i'g') \\
q = & \ \frac{m'}{\mu}\cdot\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{n}{in+i'n'}\cdot\frac{d(i,i',c)}{\sin 1 d\Theta}\sin(ig+i'g') \\
& -\frac{m'}{\mu}\cdot\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{n}{in+i'n'}\cdot\frac{d(i,i',s)}{\sin 1 d\Theta}\cos(ig+i'g')+\mathrm{S}\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\mathrm{I} \\
& \text{den Fall } i=i'=0 \text{ ausgenommen, welcher} \\
p = & -\frac{m'}{\mu}\,\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\,\frac{d(0,0,c)}{d\mathrm{I}}\,nt \\
q = & \ \frac{m'}{\mu}\,\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\,\frac{d(0,0,c)}{\sin 1 d\Theta}\,nt+\mathrm{S}^{(0,0)}\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\mathrm{I}
\end{aligned}\right\}\ldots(33)$$

giebt. Den hier zu gebrauchenden Werth von S hat man bereits aus den vorher dargelegten Rechnungen. In der letzten Formel bezeichnet $\mathrm{S}^{(0,0)}$ das in S mit nt multiplicirte Glied. Die diesen Integralen hinzuzufügenden Constanten sind Null, weil p und q sich auf die zur Zeitepoche statt findende Ebene der Bahn des Planeten m beziehen (Siehe H. Art. 20.). Wir wollen diese Störungen vorläufig so lassen, und erst wenn wir die Störungen zweiter Ordnung in Beziehung auf die Massen berechnet haben werden, welche p und q zukommen, werden wir die Störungen der Breite über der beweglichen Ebene der Ecliptik ableiten. Schlieſslich wollen wir noch bemerken, daſs in Folge des in diesem Artikel Vorgetragenen von der Knotenlänge (θ), die in den Gröſsen (p) und (q) vorkommt, welche nach (H. Art. 21.) die Lage der Planetenbahn m gegen die Ecliptik zur gewählten Zeitepoche bestimmen, ebenfalls Θ abgezogen werden muſs. Wir haben also von nun an:

$$(p) = \sin(i)\sin((\theta)-\Theta)$$
$$(q) = \sin(i)\cos((\theta)-\Theta)$$

Digitized by Google

11.

Wir wollen nun sehen, wie die Entwickelungscoëfficienten von r^2 beschaffen sind, die in den hier gegebenen Formeln gebraucht werden. Der Herr Professor Bessel hat diesen Gegenstand bereits so vollständig bearbeitet, daſs in dem jetzigen Zustande der Wissenschaft nichts mehr hinzuzufügen ist; seine Resultate sind in der Abhandlung, welche ,,*Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht*" betitelt und den Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften aus dem Jahre 1824 einverleibt ist, publicirt. Aus dieser Abhandlung ergiebt sich ohne Mühe (Gl. [29] Art. 10 und 12.), daſs die Entwickelungscoëfficienten des Quadrats des Radius Vectors, so wie dessen Differentialquotienten nach e durch folgende Gleichungen gegeben sind, wo der Index i die hier bei diesen Gröſsen gebrauchten Indices $\varkappa$ und k beide repräsentirt:

$$R^{(i)} = -\frac{2}{i^2}\,\mathrm{I}^{i}_{ie}$$

$$\left(\frac{dR^{(i)}}{de}\right) = -\frac{2}{ie}\,\mathrm{I}^{i}_{ie} + \frac{2}{ie}\,\mathrm{I}^{i+1}_{ie}$$

Wie man die Transcendente I berechnen soll, darüber kann man in der angeführten Abhandlung nachlesen. Die dort enthaltenen, ihres groſsen Erfinders würdigen Vorschriften sind vorzüglich für die Fälle gegeben, wo e groſs ist; wenn diese Gröſse aber nicht viel gröſser ist wie für Jupiter und Saturn, so kann man $R^{(i)}$ bequem durch Hülfe der unendlichen Reihen berechnen. Den allgemeinen sehr eleganten Ausdruck für I^{i}_{ie} findet man in der angeführten Abhandlung (Gl. [31]), und daraus ergiebt sich:

$$R^{(i)} = -\frac{\frac{2}{i^2}\left(\frac{ie}{2}\right)^i}{1.2.3\ldots i}\left\{1 - \frac{1}{i+1}\left(\frac{ie}{2}\right)^2 + \frac{1}{1.2.(i+1)(i+2)}\left(\frac{ie}{2}\right)^4 - \frac{1}{1.2.3.(i+1)(i+2)(i+1)}\left(\frac{ie}{2}\right)^6 \pm \text{etc.}\right\}$$

wo das Gesetz des Fortganges offenbar ist. Der Coëfficient $R^{(0)}$ ist von dieser Reihe, so wie von den vorhergehenden Ausdrücken ausgeschlossen, man findet ihn aber (Bessel Gl. [39]):

$$R^{(0)} = \frac{3}{2}\,e^2$$

Digitized by Google

Ich will die speciellen Werthe dieser Gröſsen bis zur 8ten Potenz von *e* incl. hersetzen, welches für den Jupiter und Saturn mehr als hinreichend ist.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{R^{(0)}}{e} &= \frac{3}{2}\,e \\
\frac{R^{(1)}}{e} &= -\left\{1 - \frac{1}{8}\,e^2 + \frac{1}{192}\,e^4 - \frac{1}{9216}\,e^6 + \text{etc.}\right\} \\
\frac{R^{(2)}}{e} &= -\left\{\frac{1}{4}\,e - \frac{1}{12}\,e^3 + \frac{1}{96}\,e^5 - \frac{1}{1440}\,e^7 + \text{etc.}\right\} \\
\frac{R^{(3)}}{e} &= -\left\{\frac{1}{8}\,e^2 - \frac{9}{128}\,e^4 + \frac{81}{5120}\,e^6 - \text{etc.}\right\} \\
\frac{R^{(4)}}{e} &= -\left\{\frac{1}{12}\,e^3 - \frac{1}{15}\,e^5 + \frac{1}{45}\,e^7 - \text{etc.}\right\} \\
\frac{R^{(5)}}{e} &= -\left\{\frac{25}{384}\,e^4 - \frac{625}{9216}\,e^6 + \text{etc.}\right\} \\
\frac{R^{(6)}}{e} &= -\left\{\frac{9}{160}\,e^5 - \frac{81}{1120}\,e^7 + \text{etc.}\right\} \\
\frac{R^{(7)}}{e} &= -\left\{\frac{2401}{46080}\,e^6 - \text{etc.}\right\} \\
\frac{R^{(8)}}{e} &= -\left\{\frac{16}{315}\,e^7 - \text{etc.}\right\} \\
\left(\frac{dR^{(0)}}{de}\right) &= 3e \\
\left(\frac{dR^{(1)}}{de}\right) &= -\left\{1 - \frac{3}{8}\,e^2 + \frac{5}{192}\,e^4 - \frac{7}{9216}\,e^6 + \text{etc.}\right\} \\
\left(\frac{dR^{(2)}}{2de}\right) &= -\left\{\frac{1}{4}\,e - \frac{1}{6}\,e^3 + \frac{1}{32}\,e^5 - \frac{1}{360}\,e^7 + \text{etc.}\right\} \\
\left(\frac{dR^{(3)}}{3de}\right) &= -\left\{\frac{1}{8}\,e^2 - \frac{15}{128}\,e^4 + \frac{189}{5120}\,e^6 - \text{etc.}\right\} \\
\left(\frac{dR^{(4)}}{4de}\right) &= -\left\{\frac{1}{12}\,e^3 - \frac{1}{10}\,e^5 + \frac{2}{45}\,e^7 - \text{etc.}\right\} \\
\left(\frac{dR^{(5)}}{5de}\right) &= -\left\{\frac{25}{384}\,e^4 - \frac{875}{9216}\,e^6 + \text{etc.}\right\} \\
\left(\frac{dR^{(6)}}{6de}\right) &= -\left\{\frac{9}{160}\,e^5 - \frac{27}{280}\,e^7 + \text{etc.}\right\} \\
\left(\frac{dR^{(7)}}{7de}\right) &= -\left\{\frac{2401}{46080}\,e^6 - \text{etc.}\right\} \\
\left(\frac{dR^{(8)}}{8de}\right) &= -\left\{\frac{16}{315}\,e^7 - \text{etc.}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(34)$$

Digitized by Google

Ich habe die Gröſsen R mit e dividirt, so wie die Differentialquotienten mit dem resp. Index dividirt angesetzt, weil es eigentlich diese sind, die man für die Rechnung braucht.

12.

Von hier wollen wir zur Entwickelung der Gröſse

$$\psi = -rr'\left\{\cos^2\tfrac{1}{2}\,\mathrm{I}\cos(u-u') + \sin^2\tfrac{1}{2}\,\mathrm{I}\cos(u+u')\right\}$$

(H. Art. 24 u. 26.) übergehen. Da

$$u = v - \Theta \quad \text{und} \quad u' = v' - \Theta$$

ist, so haben wir:

$$\begin{aligned} u - u' &= (v-\pi) - (v'-\pi) + (\pi - \pi') \\ u + u' &= (v-\pi) + (v'-\pi') + (\pi + \pi' - 2\Theta) \end{aligned}$$

Wenn man diese Werthe in den vorhergehenden Ausdruck für ψ substituirt, die zusammengesetzten Cosinusse auflöst und ordnet, so ergiebt sich, wenn man

$$(35)\ldots\left\{\begin{aligned} \eta &= \tfrac{1}{2}\,aa'\left[\cos(\pi-\pi')\cos^2\tfrac{1}{2}\,\mathrm{I} + \cos(\pi+\pi'-2\Theta)\sin^2\tfrac{1}{2}\,\mathrm{I}\right] \\ \zeta &= \tfrac{1}{2}\,aa'\left[\sin(\pi-\pi')\cos^2\tfrac{1}{2}\,\mathrm{I} - \sin(\pi+\pi'-2\Theta)\sin^2\tfrac{1}{2}\,\mathrm{I}\right]\sqrt{1-e'^2} \\ \lambda &= \tfrac{1}{2}\,aa'\left[\sin(\pi-\pi')\cos^2\tfrac{1}{2}\,\mathrm{I} + \sin(\pi+\pi'-2\Theta)\sin^2\tfrac{1}{2}\,\mathrm{I}\right]\sqrt{1-e^2} \\ \sigma &= \tfrac{1}{2}\,aa'\left[\cos(\pi-\pi')\cos^2\tfrac{1}{2}\,\mathrm{I} - \cos(\pi+\pi'-2\Theta)\sin^2\tfrac{1}{2}\,\mathrm{I}\right]\sqrt{1-e^2}.\sqrt{1-e'^2} \end{aligned}\right.$$

setzt:

$$\begin{aligned} \psi = &-2\eta\,\frac{rr'}{aa'}\cos(v-\pi)\cos(v'-\pi') - 2\zeta\,\frac{rr'\cos(v-\pi)\sin(v'-\pi')}{aa'\sqrt{1-e'^2}} \\ &+ 2\lambda\,\frac{rr'\sin(v-\pi)\cos(v'-\pi')}{aa'\sqrt{1-e^2}} \qquad - 2\sigma\,\frac{rr'\sin(v-\pi)\sin(v'-\pi')}{aa'\sqrt{1-e'^2}\,.\,\sqrt{1-e^2}} \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck verwandelt sich durch Hülfe der Gleichungen (7) ohne Mühe in folgenden:

Digitized by Google

$$\psi = -\frac{1}{2}\,\eta\left(\frac{d\,.\,\frac{r^2}{a^2}}{de}\right)\left(\frac{d\,.\,\frac{r'^2}{a'^2}}{de'}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{\zeta}{e'}\left(\frac{d\,.\,\frac{r^2}{a^2}}{de}\right)\left(\frac{d\,.\,\frac{r'^2}{a'^2}}{dg'}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\,\frac{\lambda}{e}\left(\frac{d\,.\,\frac{r^2}{a^2}}{dg}\right)\left(\frac{d\,.\,\frac{r'^2}{a'^2}}{de'}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{\sigma}{ee'}\left(\frac{d\,.\,\frac{r^2}{a^2}}{dg}\right)\left(\frac{d\,.\,\frac{r'^2}{a'^2}}{dg'}\right)$$

Sei nun nach der Entwickelung:

$$\psi = V_c^{i,i'} \cos(ig + i'g') + V_s^{i,i'} \sin(ig + i'g')$$

unter der Voraussetzung, daſs einer der beiden Indices i und i', gleichviel welcher, nur von 0 bis $+\infty$, oder, welches einerlei ist, von $-\infty$ bis 0 genommen werde, so bekommt man leicht durch (9) und (11):

$$\left.\begin{aligned} V_c^{i,i'} &= ii'\left\{\sigma\,\frac{R^{(i)}}{e}\,\frac{R'^{(i')}}{e'} - \eta\left(\frac{dR^{(i)}}{i\,de}\right)\left(\frac{dR'^{(i')}}{i'de'}\right)\right\} \\ V_s^{i,i'} &= ii'\left\{\lambda\,\frac{R^{(i)}}{e}\left(\frac{dR'^{(i')}}{i'de'}\right) - \zeta\left(\frac{dR^{(i)}}{i\,de}\right)\frac{R'^{(i')}}{e'}\right\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots.(36)$$

Wenn wir nun für die Bewegung des Planeten m setzen:

$$\Omega_{,,} = \frac{m'}{\mu}\,W_c^{i,i'} \cos(ig + i'g') + \frac{m'}{\mu}\,W_s^{i,i'} \sin(ig + i'g')$$

und für die Bewegung des Planeten m':

$$\Omega'_{,,} = \frac{m}{\mu'}\,\overset{1}{W}{}_c^{i,i'} \cos(ig + i'g') + \frac{m}{\mu'}\,\overset{1}{W}{}_s^{i,i'} \sin(ig + i'g')$$

so haben wir nach (H. Art. 26.):

$$\left.\begin{aligned} W_c^{i,i'} &= \frac{i'^2}{a'^3}\,V_c^{i,i'} \quad , \quad W_s^{i,i'} = \frac{i'^2}{a'^3}\,V_s^{i,i'} \\ \overset{1}{W}{}_c^{i,i'} &= \frac{i^2}{a^3}\,V_c^{i,i'} \quad , \quad \overset{1}{W}{}_s^{i,i'} = \frac{i^2}{a^3}\,V_s^{i,i'} \end{aligned}\right\} \quad \ldots.(37)$$

und die nemlichen Relationen finden zwischen den Differentialquotienten der Gröſsen ψ, $\Omega_{,,}$ und $\Omega'_{,,}$, die wir brauchen, statt. Es ist auf den ersten Anblick zu erkennen, daſs

$$r\left(\frac{d\psi}{dr}\right) = \psi \quad , \quad r'\left(\frac{d\psi}{dr'}\right) = \psi$$

Digitized by Google

und die Differentialquotienten nach I und Θ ergeben sich, wenn man in den Formeln (36) für η, ζ, λ und σ die resp. Differentialquotienten nach I und Θ schreibt. Diese erhält man durch die Differentiation der Gleichungen (35) ohne Mühe wie folgt:

$$\left(\frac{d\eta}{d\text{I}}\right) = -\frac{1}{2}\,aa'\sin\text{I}\sin(\pi-\Theta)\sin(\pi'-\Theta)$$

$$\left(\frac{d\zeta}{d\text{I}}\right) = -\frac{1}{2}\,aa'\sin\text{I}\sin(\pi-\Theta)\cos(\pi'-\Theta)\sqrt{1-e'^2}$$

$$\left(\frac{d\lambda}{d\text{I}}\right) = +\frac{1}{2}\,aa'\sin\text{I}\cos(\pi-\Theta)\sin(\pi'-\Theta)\sqrt{1-e^2}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\text{I}}\right) = -\frac{1}{2}\,aa'\sin\text{I}\cos(\pi-\Theta)\cos(\pi'-\Theta)\sqrt{1-e^2}\,.\sqrt{1-e'^2}$$

$$\left(\frac{d\eta}{\sin 1\,d\Theta}\right) = \frac{1}{2}\,aa'\,\text{tg}\,\frac{1}{2}\,\text{I}\sin(\pi+\pi'-2\Theta)$$

$$\left(\frac{d\zeta}{\sin 1\,d\Theta}\right) = \frac{1}{2}\,aa'\,\text{tg}\,\frac{1}{2}\,\text{I}\cos(\pi+\pi'-2\Theta)\sqrt{1-e'^2}$$

$$\left(\frac{d\lambda}{\sin 1\,d\Theta}\right) = -\frac{1}{2}\,aa'\,\text{tg}\,\frac{1}{2}\,\text{I}\cos(\pi+\pi'-2\Theta)\sqrt{1-e^2}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{\sin 1\,d\Theta}\right) = -\frac{1}{2}\,aa'\,\text{tg}\,\frac{1}{2}\,\text{I}\sin(\pi+\pi'-2\Theta)\sqrt{1-e^2}\,.\sqrt{1-e'^2}$$

Für die im Art. 9 entwickelte Controlle brauchen wir noch die Gröſsen $\left(\frac{d\psi}{dv}\right)$ und $\left(\frac{d\psi}{dv'}\right)$ oder vielmehr die dort mit X bezeichneten Gröſsen. Bekanntlich ist für eine Function von der Gattung wie ψ:

$$\left(\frac{d\psi}{dv}\right) = \left(\frac{d\psi}{d\varepsilon}\right) + \left(\frac{d\psi}{d\pi}\right)$$

wir werden daher diese Gleichung für die Bestimmung der mit X bezeichneten Gröſsen anwenden. Wir müssen hiebei bemerken, daſs π auf zweifache Art in der Entwickelung von ψ vorkommt, einestheils nemlich in den Gröſsen η, ζ, λ und σ, und anderntheils in den Argumenten. Aber in diesen ist $-\pi$ immer von ε begleitet, weil $g = nt + \varepsilon - \pi$ ist; der hieraus entstehende Theil von $\left(\frac{d\psi}{d\pi}\right)$ hebt sich also gegen das Ganze $\left(\frac{d\psi}{d\varepsilon}\right)$ auf. Wir haben demnach, um $\left(\frac{d\psi}{dv}\right)$ zu finden, nur nöthig, die Gröſsen η, ζ, λ und σ nach π zu differentiiren. Es ergiebt sich auf diese Art ohne Mühe:

Digitized by Google

$$X_{e}^{i,i'} = ii' \left\{ \xi \left(\frac{dR^{(i)}}{i\,de} \right) \left(\frac{dR'^{(i')}}{i'de'} \right) - \phi \, \frac{R^{(i)}}{e} \, \frac{R'^{(i')}}{e'} \right\}$$

$$X_{,}^{i,i'} = ii' \left\{ \nu \, \frac{R^{(i)}}{e} \left(\frac{dR'^{(i')}}{i'de'} \right) - \theta \left(\frac{dR^{(i)}}{i\,de} \right) \frac{R'^{(i')}}{e'} \right\}$$

wenn man

$$\xi = \frac{\lambda}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$\theta = \frac{\sigma}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$\nu = \eta \sqrt{1-e^2}$$

$$\phi = \zeta \sqrt{1-e^2}$$

setzt. Den Differentialquotienten nach ν' bekommen wir, wenn wir in dem Differentialquotienten nach ν alle auf den Planeten m sich beziehenden Gröſsen in die analogen, demPlaneten m' entsprechenden, und umgekehrt verwandeln. Wir haben also $\dot{X}_{e}^{i,i'}$ und $\dot{X}_{,}^{i,i'}$ resp. aus denselben Gleichungen, welche $X_{e}^{i,i'}$ und $X_{,}^{i,i'}$ geben, wenn wir darin ξ, θ, ν und ϕ resp. in ξ', θ', ν' und ϕ' verwandeln und diese aus folgenden Gleichungen bestimmen:

$$\xi' = - \frac{\zeta}{\sqrt{1-e'^2}}$$

$$\theta' = - \eta \sqrt{1-e'^2}$$

$$\nu' = - \frac{\sigma}{\sqrt{1-e'^2}}$$

$$\phi' = - \lambda \sqrt{1-e'^2}$$

13.

Die Gröſse Ω, und ihre Differentialquotienten habe ich nach der (H. Art. 25.) angeführten Methode entwickelt. Die Formeln aber, die ich angewendet habe, sind nicht die, welche (H. (34) u. (35)) vorkommen. Diese gelten für jede beliebige Anzahl n der speciellen Werthe, die man berechnen muſs, und lassen sich in dieser Ausdehnung schwerlich vereinfachen. Aber für gewisse besondere Werthe von n lassen sie sich in andere umwandeln, wodurch die Rechnung be-

Digitized by Google

trächtlich abgekürzt wird. Die Formeln, welche ich geben werde, ersparen bei einer Rechnung, wie die für Jupiter und Saturn, die Aufschlagung von mehr als Eintausend Logarithmen, welche durch eine geringere Zahl von Additionen und Subtractionen der Zahlen ersetzt ist.

Unter den speciellen Werthen von n, für welche sich die Rechnung vereinfachen läſst, ist vorzüglich der merkwürdig, wo n eine Potenz der Zahl 2 ist.

Da ich bei den für Jupiter und Saturn geführten Rechnungen die Werthe $n = 32$ und $n = 16$ gebraucht habe, so will ich ohne Weiteres die diesen beiden Systemen zukommenden Formeln hersetzen. Es ist ein Leichtes, diese Formeln auf die Formeln (II. 34 u. 35.) zurückzuführen und dadurch ihre Richtigkeit zu erkennen.

Es sei im Allgemeinen y die periodische Function der beiden Winkel x und x', welche in eine unendliche Reihe entwickelt werden soll. Man rechne nun erst, indem man $x' = 0$ setzt, die 32 Werthe von y, welchen $x = 0$, $x = \frac{2\pi}{32} = 11^\circ\ 15'$, $x = 2\,\frac{2\pi}{32} = 22^\circ\ 30'$ etc. bis $x = 31\,\frac{2\pi}{32} = 348^\circ\ 45'$ entspricht; diese Werthe von y will ich resp. mit $Y_{0.0}$ $Y_{1.0}$ $Y_{2.0}$ etc. bis $Y_{31.0}$ bezeichnen, und die Coëfficienten von $\cos ix$ und $\sin ix$ in der Entwickelung der Gröſse y, in so fern darin $x' = i'\,\frac{2\pi}{n}$ durchgängig substituirt worden ist, werde ich resp. $(ic)_{i'}$ und $(is)_{i'}$ nennen. Jetzt also werden diese Coëfficienten $(ic)_0$ und $(is)_0$ heiſsen, weil durchgängig $x' = 0$ gesetzt worden ist. Hierauf mache man in $y \ldots x' = 1\,\frac{2\pi}{n}$ und rechne die speciellen Werthe von y, indem man für x die nemlichen Werthe wie vorhin substituirt: die sich hierdurch ergebenden Werthe von y werden also $Y_{0.1}$ $Y_{1.1}$ $Y_{2.1}$ bis $Y_{31.1}$ heiſsen und die diesen entsprechenden Coëfficienten $(ic)_1$ und $(is)_1$. Hierauf mache man durchgängig $x' = 2\,\frac{2\pi}{n}$, wobei man für x immer die vorigen Werthe substituirt, und fährt so fort, bis man auf $x' = (n-1)\,\frac{2\pi}{n}$ gekommen ist. Der Grund dieses Verfahrens wird klar, wenn man bedenkt, daſs man, um ein $u$faches Integral von u von einander unabhängigen veränderlichen Gröſsen zu erhalten, bei den successiven Integrationen der Reihe nach die $u - 1$ veränderlichen Gröſsen constant setzen müsse. Das bis jetzt über die Behandlung von y Gesagte bezieht sich also auf die Integration nach x, und die so erhaltenen $(ic)_{i'}$ und $(is)_{i'}$

Digitized by Google

dienen als Grundlage zu der nachher auszuführenden Integration nach x'. Ich werde nun die Formeln für den Fall, wo durchgängig $x' = i'\frac{2\pi}{n}$ gesetzt worden ist, hersetzen; diese gelten natürlich für alle Werthe von i' die man brauchen muſs. Man rechne:

$$\left.\begin{aligned}
32\,(0,c)_{,,} &= Y_{0,i'} + Y_{1,i'} + Y_{2,i'} + \ldots + Y_{31,i'} \\
32\,(1,c)_{,,} &= Y_{0,i'}\cos(0) + Y_{1,i'}\cos(1) + Y_{2,i'}\cos(2) \\
&\quad + \ldots + Y_{31,i'}\cos(31) \\
32\,(1,s)_{,,} &= Y_{0,i'}\sin(0) + Y_{1,i'}\sin(1) + Y_{2,i'}\sin(2) \\
&\quad + \ldots + Y_{31,i'}\sin(31)
\end{aligned}\right\}\ldots.(38)$$

wo unter dem Cosinus- und Sinus-Zeichen zur Abkürzung (0), (1), (2) etc. resp. für 0, $\frac{2\pi}{32}$, $2\,\frac{2\pi}{32}$ etc. geschrieben ist. Die linken Seiten dieser Gleichungen sind eigentlich unendliche Reihen, aber ich habe für überflüssig gehalten, mehr wie das erste Glied hinzuschreiben, da sie genau die rechten Seiten der Gleichungen (H. 34 u. 35.) sind, wenn man darin $n = 32$ macht; eben dasselbe gilt auch für die unten folgenden Formeln, für $(2,c)_{,,}$ $(2,s)_{,,}$ etc. Aus den obigen Gröſsen kann man nun alle übrigen Entwickelungscoëfficienten finden. Man mache:

$$\frac{(0)}{(16)} = Y_{0,i'} + Y_{16,i'}\;;\quad \frac{(0)}{(8)} = \frac{(0)}{(16)} + \frac{(8)}{(16)}\;;\quad \frac{(0)}{(4)} = \frac{(0)}{(8)} + \frac{(4)}{(8)}\;;\quad \frac{(0)}{(2)} = \frac{(0)}{(4)} + \frac{(2)}{(4)}\;;$$

$$\frac{(1)}{(16)} = Y_{1,i'} + Y_{17,i'}\;;\quad \frac{(1)}{(8)} = \frac{(1)}{(16)} + \frac{(9)}{(16)}\;;\quad \frac{(1)}{(4)} = \frac{(1)}{(8)} + \frac{(5)}{(8)}\;;\quad \frac{(1)}{(2)} = \frac{(1)}{(4)} + \frac{(3)}{(4)}\;;$$

$$\frac{(2)}{(16)} = Y_{2,i'} + Y_{18,i'}\;;\quad \frac{(2)}{(8)} = \frac{(2)}{(16)} + \frac{(10)}{(16)}\;;\quad \frac{(2)}{(4)} = \frac{(2)}{(8)} + \frac{(6)}{(8)}\;;$$

etc. bis etc. bis

$$\frac{(3)}{(4)} = \frac{(3)}{(8)} + \frac{(7)}{(8)}\;;$$

$$\frac{(15)}{(16)} = Y_{15,i'} + Y_{31,i'}\;;\quad \frac{(7)}{(8)} = \frac{(7)}{(16)} + \frac{(15)}{(16)}\;;$$

ferner:

$$\left(\frac{0}{8}\right) = \frac{(0)}{(16)} - \frac{(8)}{(16)}\,,\quad \left(\frac{0}{4}\right) = \frac{(0)}{(8)} - \frac{(4)}{(8)}\quad \left(\frac{0}{2}\right) = \frac{(0)}{(4)} - \frac{(2)}{(4)}$$

$$\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{(1)}{(16)} - \frac{(9)}{(16)}\,,\quad \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{(1)}{(8)} - \frac{(5)}{(8)}\quad \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(1)}{(4)} - \frac{(3)}{(4)}$$

$$\left(\frac{2}{8}\right) = \frac{(2)}{(16)} - \frac{(10)}{(16)}\,,\quad \left(\frac{2}{4}\right) = \frac{(2)}{(8)} - \frac{(6)}{(8)}\quad \left(\frac{0}{1}\right) = \frac{(0)}{(2)} - \frac{(1)}{(2)}$$

etc. bis

$$\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{(3)}{(8)} - \frac{(7)}{(8)}$$

$$\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{(7)}{(16)} - \frac{(15)}{(16)}\;;$$

G 2

Dann ist:

$$32\,(2,c)_{,,} = \left(\tfrac{0}{8}\right) + \left\{\left(\tfrac{2}{8}\right) - \left(\tfrac{6}{8}\right)\right\}\cos(45^\circ) + \left\{\left(\tfrac{1}{8}\right) - \left(\tfrac{7}{8}\right)\right\}\cos(22^\circ\,30')$$
$$+ \left\{\left(\tfrac{3}{8}\right) - \left(\tfrac{5}{8}\right)\right\}\sin(22^\circ\,30')$$

$$32\,(2,s)_{,,} = \left(\tfrac{4}{8}\right) + \left\{\left(\tfrac{2}{8}\right) + \left(\tfrac{6}{8}\right)\right\}\cos(45^\circ) + \left\{\left(\tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{7}{8}\right)\right\}\sin(22^\circ\,30')$$
$$+ \left\{\left(\tfrac{3}{8}\right) + \left(\tfrac{5}{8}\right)\right\}\cos(22^\circ\,30')$$

$$32\,(6,c)_{,,} = \left(\tfrac{0}{8}\right) - \left\{\left(\tfrac{2}{8}\right) - \left(\tfrac{6}{8}\right)\right\}\cos(45^\circ) + \left\{\left(\tfrac{1}{8}\right) - \left(\tfrac{7}{8}\right)\right\}\sin(22^\circ\,30')$$
$$- \left\{\left(\tfrac{3}{8}\right) - \left(\tfrac{5}{8}\right)\right\}\cos(22^\circ\,30')$$

$$32\,(6,s)_{,,} = -\left(\tfrac{4}{8}\right) + \left\{\left(\tfrac{2}{8}\right) + \left(\tfrac{6}{8}\right)\right\}\cos(45^\circ) + \left\{\left(\tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{7}{8}\right)\right\}\cos(22^\circ\,30')$$
$$- \left\{\left(\tfrac{3}{8}\right) + \left(\tfrac{5}{8}\right)\right\}\sin(22^\circ\,30')$$

$$32\,(10,c)_{,,} = \left(\tfrac{0}{8}\right) - \left\{\left(\tfrac{2}{8}\right) - \left(\tfrac{6}{8}\right)\right\}\cos(45^\circ) - \left\{\left(\tfrac{1}{8}\right) - \left(\tfrac{7}{8}\right)\right\}\sin(22^\circ\,30')$$
$$+ \left\{\left(\tfrac{3}{8}\right) - \left(\tfrac{5}{8}\right)\right\}\cos(22^\circ\,30')$$

$$32\,(10,s)_{,,} = \left(\tfrac{4}{8}\right) - \left\{\left(\tfrac{2}{8}\right) + \left(\tfrac{6}{8}\right)\right\}\cos(45^\circ) + \left\{\left(\tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{7}{8}\right)\right\}\cos(22^\circ\,30')$$
$$- \left\{\left(\tfrac{3}{8}\right) + \left(\tfrac{5}{8}\right)\right\}\sin(22^\circ\,30')$$

$$32\,(14,c)_{,,} = \left(\tfrac{0}{8}\right) + \left\{\left(\tfrac{2}{8}\right) - \left(\tfrac{6}{8}\right)\right\}\cos(45^\circ) - \left\{\left(\tfrac{1}{8}\right) - \left(\tfrac{7}{8}\right)\right\}\cos(22^\circ\,30')$$
$$- \left\{\left(\tfrac{3}{8}\right) - \left(\tfrac{5}{8}\right)\right\}\sin(22^\circ\,30')$$

$$32\,(14,s)_{,,} = -\left(\tfrac{4}{8}\right) - \left\{\left(\tfrac{2}{8}\right) + \left(\tfrac{6}{8}\right)\right\}\cos(45^\circ) + \left\{\left(\tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{7}{8}\right)\right\}\sin(22^\circ\,30')$$
$$+ \left\{\left(\tfrac{3}{8}\right) + \left(\tfrac{5}{8}\right)\right\}\cos(22^\circ\,30')$$

$$32\,(4,c)_{,,} = \left(\tfrac{0}{4}\right) + \left\{\left(\tfrac{1}{4}\right) - \left(\tfrac{3}{4}\right)\right\}\cos(45^\circ)$$

$$32\,(4,s)_{,,} = \left(\tfrac{2}{4}\right) + \left\{\left(\tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{3}{4}\right)\right\}\cos(45^\circ)$$

$$32\,(12,c)_{,,} = \left(\tfrac{0}{4}\right) - \left\{\left(\tfrac{1}{4}\right) - \left(\tfrac{3}{4}\right)\right\}\cos(45^\circ)$$

$$32\,(12,s)_{,,} = -\left(\tfrac{2}{4}\right) + \left\{\left(\tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{3}{4}\right)\right\}\cos(45^\circ)$$

$$32\,(8,c)_{,,} = \left(\tfrac{0}{2}\right)$$

Digitized by Google

$32\,(8, s)_{,,} = \left(\frac{1}{2}\right)$

$64\,(16, c)_{,,} = \left(\frac{0}{1}\right)$

Sei ferner:

$$\frac{(0)}{(8)}\cos = Y_{0,''}\cos(0) + Y_{8,''}\cos(8) + Y_{16,''}\cos(16) + Y_{24,''}\cos(24)$$

$$\frac{(1)}{(8)}\cos = Y_{1,''}\cos(1) + Y_{9,''}\cos(9) + Y_{17,''}\cos(17) + Y_{25,''}\cos(25)$$

$$\frac{(2)}{(8)}\cos = Y_{2,''}\cos(2) + Y_{10,''}\cos(10) + Y_{18,''}\cos(18) + Y_{26,''}\cos(26)$$

etc. bis

$$\frac{(7)}{(8)}\cos = Y_{7,''}\cos(7) + Y_{15,''}\cos(15) + Y_{23,''}\cos(23) + Y_{31,''}\cos(31)$$

ferner:

$$\frac{(0)}{(8)}\sin = Y_{0,''}\sin(0) + Y_{8,''}\sin(8) + Y_{16,''}\sin(16) + Y_{24,''}\sin(24)$$

$$\frac{(1)}{(8)}\sin = Y_{1,''}\sin(1) + Y_{9,''}\sin(9) + Y_{17,''}\sin(17) + Y_{25,''}\sin(25)$$

etc. bis

$$\frac{(7)}{(8)}\sin = Y_{7,''}\sin(7) + Y_{15,''}\sin(15) + Y_{23,''}\sin(23) + Y_{31,''}\sin(31)$$

und hieraus:

$$\frac{(0)}{(4)}\cos = \frac{(0)}{(8)}\cos + \frac{(4)}{(8)}\cos\ ;\quad \frac{(0)}{(2)}\cos = \frac{(0)}{(4)}\cos + \frac{(2)}{(4)}\cos\ ;\quad \frac{(0)}{(4)}\sin = \frac{(0)}{(8)}\sin + \frac{(4)}{(8)}\sin\ ;$$

$$\frac{(0)}{(2)}\sin = \frac{(0)}{(4)}\sin + \frac{(2)}{(4)}\sin\ ;$$

$$\frac{(1)}{(4)}\cos = \frac{(1)}{(8)}\cos + \frac{(5)}{(8)}\cos\ ;\quad \frac{(1)}{(2)}\cos = \frac{(1)}{(4)}\cos + \frac{(3)}{(4)}\cos\ ;\quad \frac{(1)}{(4)}\sin = \frac{(1)}{(8)}\sin + \frac{(5)}{(8)}\sin\ ;$$

$$\frac{(1)}{(2)}\sin = \frac{(1)}{(4)}\sin + \frac{(3)}{(4)}\sin\ ;$$

$$\frac{(2)}{(4)}\cos = \frac{(2)}{(8)}\cos + \frac{(6)}{(8)}\cos\ ;\qquad \frac{(2)}{(4)}\sin = \frac{(2)}{(8)}\sin + \frac{(6)}{(8)}\sin\ ;$$

$$\frac{(3)}{(4)}\cos = \frac{(3)}{(8)}\cos + \frac{(7)}{(8)}\cos\ ;\qquad \frac{(3)}{(4)}\sin = \frac{(3)}{(8)}\sin + \frac{(7)}{(8)}\sin\ ;$$

$$\left(\frac{0}{4}\right)\cos = \frac{(0)}{(8)}\cos - \frac{(4)}{(8)}\cos\ ;\quad \left(\frac{0}{4}\right)\sin = \frac{(0)}{(8)}\sin - \frac{(4)}{(8)}\sin\ ;$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)\cos = \frac{(1)}{(8)}\cos - \frac{(5)}{(8)}\cos\ ;\quad \left(\frac{1}{4}\right)\sin = \frac{(1)}{(8)}\sin - \frac{(5)}{(8)}\sin\ ;$$

Digitized by Google

$$\left(\frac{2}{4}\right)\cos = \frac{(2)}{(8)}\cos - \frac{(6)}{(8)}\cos \quad ; \quad \left(\frac{2}{4}\right)\sin = \frac{(2)}{(8)}\sin - \frac{(6)}{(8)}\sin \quad ;$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)\cos = \frac{(3)}{(8)}\cos - \frac{(7)}{(8)}\cos \quad ; \quad \left(\frac{3}{4}\right)\sin = \frac{(3)}{(8)}\sin - \frac{(7)}{(8)}\sin \quad ;$$

$$\left(\frac{0}{2}\right)\cos = \frac{(0)}{(4)}\cos - \frac{(2)}{(4)}\cos \quad ; \quad \left(\frac{0}{2}\right)\sin = \frac{(0)}{(4)}\sin - \frac{(2)}{(4)}\sin \quad ;$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\cos = \frac{(1)}{(4)}\cos - \frac{(3)}{(4)}\cos \quad ; \quad \left(\frac{1}{2}\right)\sin = \frac{(1)}{(4)}\sin - \frac{(3)}{(4)}\sin \quad ;$$

$$\left(\frac{0}{1}\right)\cos = \frac{(0)}{(2)}\cos - \frac{(1)}{(2)}\cos \quad ; \quad \left(\frac{0}{1}\right)\sin = \frac{(0)}{(2)}\sin - \frac{(1)}{(2)}\sin \quad ;$$

Dann ist:

$$32\,(3,c)_{,,} = \left(\frac{0}{4}\right)\cos + \left(\frac{2}{4}\right)\sin$$
$$+\left\{\left[\left(\frac{1}{4}\right)\cos + \left(\frac{3}{4}\right)\sin\right] - \left[\left(\frac{3}{4}\right)\cos - \left(\frac{1}{4}\right)\sin\right]\right\}\cos(45^\circ)$$

$$32\,(3,s)_{,,} = \left(\frac{2}{4}\right)\cos - \left(\frac{0}{4}\right)\sin$$
$$+\left\{\left[\left(\frac{1}{4}\right)\cos + \left(\frac{3}{4}\right)\sin\right] + \left[\left(\frac{3}{4}\right)\cos - \left(\frac{1}{4}\right)\sin\right]\right\}\cos(45^\circ)$$

$$32\,(5,c)_{,,} = \left(\frac{0}{4}\right)\cos - \left(\frac{2}{4}\right)\sin$$
$$+\left\{\left[\left(\frac{1}{4}\right)\cos - \left(\frac{3}{4}\right)\sin\right] - \left[\left(\frac{3}{4}\right)\cos + \left(\frac{1}{4}\right)\sin\right]\right\}\cos(45^\circ)$$

$$32\,(5,s)_{,,} = \left(\frac{2}{4}\right)\cos + \left(\frac{0}{4}\right)\sin$$
$$+\left\{\left[\left(\frac{1}{4}\right)\cos - \left(\frac{3}{4}\right)\sin\right] + \left[\left(\frac{3}{4}\right)\cos + \left(\frac{1}{4}\right)\sin\right]\right\}\cos(45^\circ)$$

$$32\,(11,c)_{,,} = \left(\frac{0}{4}\right)\cos - \left(\frac{2}{4}\right)\sin$$
$$-\left\{\left[\left(\frac{1}{4}\right)\cos - \left(\frac{3}{4}\right)\sin\right] - \left[\left(\frac{3}{4}\right)\cos + \left(\frac{1}{4}\right)\sin\right]\right\}\cos(45^\circ)$$

$$32\,(11,s)_{,,} = -\left(\frac{2}{4}\right)\cos - \left(\frac{0}{4}\right)\sin$$
$$+\left\{\left[\left(\frac{1}{4}\right)\cos - \left(\frac{3}{4}\right)\sin\right] + \left[\left(\frac{3}{4}\right)\cos + \left(\frac{1}{4}\right)\sin\right]\right\}\cos(45^\circ)$$

$$32\,(13,c)_{,,} = \left(\frac{0}{4}\right)\cos + \left(\frac{2}{4}\right)\sin$$
$$-\left\{\left[\left(\frac{1}{4}\right)\cos + \left(\frac{3}{4}\right)\sin\right] - \left[\left(\frac{3}{4}\right)\cos - \left(\frac{1}{4}\right)\sin\right]\right\}\cos(45^\circ)$$

$$32\,(13,s)_{,,} = -\left(\frac{2}{4}\right)\cos + \left(\frac{0}{4}\right)\sin$$
$$+\left\{\left[\left(\frac{1}{4}\right)\cos + \left(\frac{3}{4}\right)\sin\right] + \left[\left(\frac{3}{4}\right)\cos - \left(\frac{1}{4}\right)\sin\right]\right\}\cos(45^\circ)$$

Digitized by Google

$$32\,(7, c)_{,,} = \left(\frac{0}{2}\right)\cos + \left(\frac{1}{2}\right)\sin$$

$$32\,(7, s)_{,,} = \left(\frac{1}{2}\right)\cos - \left(\frac{0}{2}\right)\sin$$

$$32\,(9, c)_{,,} = \left(\frac{0}{2}\right)\cos - \left(\frac{1}{2}\right)\sin$$

$$32\,(9, s)_{,,} = \left(\frac{1}{2}\right)\cos + \left(\frac{0}{2}\right)\sin$$

$$32\,(15, c)_{,,} = \left(\frac{0}{1}\right)\cos$$

$$32\,(15, s)_{,,} = -\left(\frac{0}{1}\right)\cos$$

Wenn diese Gröſsen alle gerechnet sind, so ist die Integration nach x und die Vorbereitungen für die Integration nach x' gemacht. Giebt man nun für diese Integration n denselben Werth wie vorher, und hat man demnach i' von 0 bis 31 ausgedehnt, so wird diese Integration nach denselben Formeln geführt, indem man allenthalben successive $(i, c)_{,,}$ und $(i, s)_{,,}$ für $Y_{i,,,}$ mit Umwechselung der Indices setzt. Da ich aber in den Rechnungen für Jupiter und Saturn bei dieser Integration $n = 16$ gemacht habe, so will ich die Formeln für diesen Fall auch vollständig hersetzen. Die vorhergehende Rechnung hat also folgende Gröſsen gegeben:

$(0, c)_0$,	$(1, c)_0$,	$(2, c)_0$,	etc. bis	$(16, c)_0$
$(0, c)_1$,	$(1, c)_1$,	$(2, c)_1$,	etc. bis	$(16, c)_1$
$(0, c)_2$,	$(1, c)_2$,	$(2, c)_2$,	etc. bis	$(16, c)_2$
etc. bis				
$(0, c)_{15}$,	$(1, c)_{15}$,	$(2, c)_{15}$,	etc. bis	$(16, c)_{15}$

und für die $(i, s)_{,,}$ hat man dasselbe System, mit der Ausnahme jedoch, daſs man $(16, s)_{,,}$ nicht bekommen hat. Nun mache man nach einander für alle i:

$$16\,(i, 0, c, c') = (i, c)_0 + (i, c)_1 + (i, c)_2 + \ldots + (i, c)_{15}$$

$$16\,(i, 1, c, c') = (i, c)_0 \cos(0) + (i, c)_1 \cos(1) + (i, c)_2 \cos(2) + \ldots + (i, c)_{15} \cos(15)$$

$$16\,(i, 1, c, s') = (i, c)_0 \sin(0) + (i, c)_1 \sin(1) + (i, c)_2 \sin(2) + \ldots + (i, c)_{15} \sin(15)$$

Digitized by Google

wo wieder unter den Cosinus- und Sinuszeichen (0), (1), (2) etc. resp, für 0, $\frac{2\pi}{n}$, $2\,\frac{2\pi}{n}$ etc., das ist in diesem Falle für 0 ; 22° 30′ ; 45° ; etc. geschrieben ist und die Zahlen in den Coëfficienten für den Index i' stehen. Ferner:

$$\frac{(0)}{(8)} = (i,c)_0 + (i,c)_8 \;;$$

$$\frac{(1)}{(8)} = (i,c)_1 + (i,c)_9 \;;$$

$$\frac{(2)}{(8)} = (i,c)_2 + (i,c)_{10} \;;$$

etc. bis

$$\frac{(7)}{(8)} = (i,c)_7 + (i,c)_{15} \;;$$

$$\frac{(0)}{(4)} = \frac{(0)}{(8)} + \frac{(4)}{(8)} \;;\quad \left(\frac{0}{4}\right) = \frac{(0)}{(8)} - \frac{(4)}{(8)} \;;$$

$$\frac{(1)}{(4)} = \frac{(1)}{(8)} + \frac{(5)}{(8)} \;;\quad \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{(1)}{(8)} - \frac{(5)}{(8)} \;;$$

$$\frac{(2)}{(4)} = \frac{(2)}{(8)} + \frac{(6)}{(8)} \;;\quad \left(\frac{2}{4}\right) = \frac{(2)}{(8)} - \frac{(6)}{(8)} \;;$$

$$\frac{(3)}{(4)} = \frac{(3)}{(8)} + \frac{(7)}{(8)} \;;\quad \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{(3)}{(8)} - \frac{(7)}{(8)} \;;$$

$$\frac{(0)}{(2)} = \frac{(0)}{(4)} + \frac{(2)}{(4)} \;;\quad \left(\frac{0}{2}\right) = \frac{(0)}{(4)} - \frac{(2)}{(4)} \;;$$

$$\frac{(1)}{(2)} = \frac{(1)}{(4)} + \frac{(3)}{(4)} \;;\quad \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(1)}{(4)} - \frac{(3)}{(4)} \;;$$

$$16\,(i,2,c,c') = \left(\frac{0}{4}\right) + \left\{\left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{3}{4}\right)\right\} \cos(45^\circ)$$

$$16\,(i,2,c,s') = \left(\frac{2}{4}\right) + \left\{\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)\right\} \cos(45^\circ)$$

$$16\,(i,6,c,c') = \left(\frac{0}{4}\right) - \left\{\left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{3}{4}\right)\right\} \cos(45^\circ)$$

$$16\,(i,6,c,s') = -\left(\frac{2}{4}\right) + \left\{\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)\right\} \cos(45^\circ)$$

$$16\,(i,4,c,c') = \left(\frac{0}{2}\right)$$

$$16\,(i,4,c,s') = \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$32\,(i,8,c,c') = \frac{(0)}{(2)} - \frac{(1)}{(2)}$$

und

Digitized by Google

$$\frac{(0)}{(4)}\cos = (i, c)_0 \cos(0) + (i, c)_4 \cos(4) + (i, c)_8 \cos(8) + (i, c)_{12} \cos(12)$$

$$\frac{(1)}{(4)}\cos = (i, c)_1 \cos(1) + (i, c)_5 \cos(5) + (i, c)_9 \cos(9) + (i, c)_{13} \cos(13)$$

$$\frac{(2)}{(4)}\cos = (i, c)_2 \cos(2) + (i, c)_6 \cos(6) + (i, c)_{10} \cos(10) + (i, c)_{14} \cos(14)$$

$$\frac{(3)}{(4)}\cos = (i, c)_3 \cos(3) + (i, c)_7 \cos(7) + (i, c)_{11} \cos(11) + (i, c)_{15} \cos(15)$$

$$\frac{(0)}{(4)}\sin = (i, c)_0 \sin(0) + (i, c)_4 \sin(4) + (i, c)_8 \sin(8) + (i, c)_{12} \sin(12)$$

$$\frac{(1)}{(4)}\sin = (i, c)_1 \sin(1) + (i, c)_5 \sin(5) + (i, c)_9 \sin(9) + (i, c)_{13} \sin(13)$$

$$\frac{(2)}{(4)}\sin = (i, c)_2 \sin(2) + (i, c)_6 \sin(6) + (i, c)_{10} \sin(10) + (i, c)_{14} \sin(14)$$

$$\frac{(3)}{(4)}\sin = (i, c)_3 \sin(3) + (i, c)_7 \sin(7) + (i, c)_{11} \sin(11) + (i, c)_{15} \sin(15)$$

$$\frac{(0)}{(2)}\cos = \frac{(0)}{(4)}\cos + \frac{(2)}{(4)}\cos \;;\; \left(\frac{0}{2}\right)\cos = \frac{(0)}{(4)}\cos - \frac{(2)}{(4)}\cos \;;\; \left(\frac{0}{1}\right)\cos = \frac{(0)}{(2)}\cos - \frac{(1)}{(2)}\cos \;;$$

$$\frac{(1)}{(2)}\cos = \frac{(1)}{(4)}\cos + \frac{(3)}{(4)}\cos \;;\; \left(\frac{1}{2}\right)\cos = \frac{(1)}{(4)}\cos - \frac{(3)}{(4)}\cos \;;$$

$$\frac{(0)}{(2)}\sin = \frac{(0)}{(4)}\sin + \frac{(2)}{(4)}\sin \;;\; \left(\frac{0}{2}\right)\sin = \frac{(0)}{(4)}\sin - \frac{(2)}{(4)}\sin \;;\; \left(\frac{0}{1}\right)\sin = \frac{(0)}{(2)}\sin - \frac{(1)}{(2)}\sin \;;$$

$$\frac{(1)}{(2)}\sin = \frac{(1)}{(4)}\sin + \frac{(3)}{(4)}\sin \;;\; \left(\frac{1}{2}\right)\sin = \frac{(1)}{(4)}\sin - \frac{(3)}{(4)}\sin \;;$$

$$16\,(i, 3, c, c') = \left(\frac{0}{2}\right)\cos + \left(\frac{1}{2}\right)\sin$$

$$16\,(i, 3, c, s') = \left(\frac{1}{2}\right)\cos - \left(\frac{0}{2}\right)\sin$$

$$16\,(i, 5, c, c') = \left(\frac{0}{2}\right)\cos - \left(\frac{1}{2}\right)\sin$$

$$16\,(i, 5, c, s') = \left(\frac{1}{2}\right)\cos + \left(\frac{0}{2}\right)\sin$$

$$16\,(i, 7, c, c') = \left(\frac{0}{1}\right)\cos$$

$$16\,(i, 7, c, s') = -\left(\frac{0}{1}\right)\sin$$

Dann ist innerhalb der Grenzen 0 und 2π für x sowohl als für x':

$$(i, i', c, c') = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint y \cos ix \,.\, \cos i'x' \,.\, dx \,.\, dx'$$

$$(i, i', c, s') = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint y \cos ix \,.\, \sin i'x' \,.\, dx \,.\, dx'$$

H

Digitized by Google

und ebenso bekommt man aus den Gröſsen $(i, s)_{,,}$:

$$(i, i', s, c') = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint y \sin ix \,.\, \cos i'x' \,.\, dx \,.\, dx'$$

$$(i, i', s, s') = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint y \sin ix \,.\, \sin i'x' \,.\, dx \,.\, dx'$$

Nun ist aber (H. 33.), wenn man

$$y = (i, i', c) \cos (ix + i'x') + (i, i', s) \sin (ix + i'x')$$

macht, wo beide Indices von $-\infty$ bis $+\infty$ ausgedehnt werden,

$$(i, i', c) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint y \cos (ix + i'x')\, dx \,.\, dx'$$

$$(i, i', s) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint y \sin (ix + i'x')\, dx \,.\, dx'$$

woraus

$$(i, \ i', c) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint y \cos ix \,.\, \cos i'x' \,.\, dx \,.\, dx' - \frac{1}{(2\pi)^2}\iint y \sin ix \,.\, \sin i'x' \,.\, dx \,.\, dx'$$

$$(i, \ i', s) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint y \sin ix \,.\, \cos i'x' \,.\, dx \,.\, dx' + \frac{1}{(2\pi)^2}\iint y \cos ix \,.\, \sin i'x' \,.\, dx \,.\, dx'$$

$$(i, -i', c) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint y \cos ix \,.\, \cos i'x' \,.\, dx \,.\, dx' + \frac{1}{(2\pi)^2}\iint y \sin ix \,.\, \sin i'x' \,.\, dx \,.\, dx'$$

$$(i, -i', s) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint y \sin ix \,.\, \cos i'x' \,.\, dx \,.\, dx' - \frac{1}{(2\pi)^2}\iint y \cos ix \,.\, \sin i'x' \,.\, dx \,.\, dx'$$

hervorgeht, wir haben also:

$$(i, \ i', c) = (i, i', c, c') - (i, i', s, s')$$
$$(i, \ i', s) = (i, i', s, c') + (i, i', c, s')$$
$$(i, -i', c) = (i, i', c, c') + (i, i', s, s')$$
$$(i, -i', s) = (i, i', s, c') - (i, i', c, s')$$

Um die Reihe in der Voraussetzung zu bekommen, daſs einer der Indices nur von 0 bis $+\infty$ oder von $-\infty$ bis 0 ausgedehnt werde, muſs man die Coëfficienten, die durch die letzten Gleichungen gegeben sind, alle bis auf (0, 0, c) verdoppeln.

Um sich der Richtigkeit der numerischen Rechnung zu versichern, dienen folgende Hülfsmittel. Die Richtigkeit der Gröſsen $Y_{i,i}$, $Y_{i,i}\cos(ix)$ und $Y_{i,i}\sin(ix)$ muſs durch die endlichen Differenzen geprüft werden; es ist bekannt, daſs dieses Mittel, wo es angewendet wer-

Digitized by Google

den kann, immer die gröſste Sicherheit gewährt, wenn man sich nur vor constanten Fehlern hütet, und dieses ist, wenigstens bei diesen Rechnungen, leicht. In der Nähe des Minimums der Entfernung der beiden concurrirenden Planeten sind die endlichen Differenzen immer am unregelmäſsigsten, und man thut daher wohl, in dieser Gegend einige Werthe von $Y_{i,i'}$ zwischen zu rechnen. In Beziehung auf die Bedeutung, die ich den beiden veränderlichen Gröſsen x und x' beigelegt habe und die ich weiter unten anführen werde, war es bei den für Jupiter und Saturn geführten Rechnungen hinlänglich, in der Nähe des Minimums der Entfernung immer einen Werth von $Y_{i,i'}$ im Sinne von i' zwischen zu rechnen, um alle diese Gröſsen durch die endlichen Differenzen sicher prüfen zu können; man könnte diese zwischengerechneten Werthe auch bei den Integrationen benutzen, aber die Formeln werden für solchen Fall mehr zusammen gesetzt; deshalb und weil die ohnehin gerechneten 32×16 Werthe schon alle wünschenswerthe Genauigkeit geben konnten, habe ich die zwischengerechneten weiter nicht als zur Prüfung durch die Differenzen gebraucht. Ich werde mich nun für die fernern Controllen bloſs an das System $n = 32$ halten, weil die Vorschriften dafür leicht auf jeden andern Fall übertragen werden können.

Die Gröſsen $(0, c)_{i,}$ $(1, c)_{i,}$ und $(1, s)_{i,}$ sind nun leicht zu controlliren, denn einestheils ist

$$(0, c)_{i,} = \frac{(0)}{(2)} \qquad + \frac{(1)}{(2)}$$

$$(1, c)_{i,} = \frac{(0)}{(2)} \cos + \frac{(1)}{(2)} \cos$$

$$(1, s)_{i,} = \frac{(0)}{(2)} \sin + \frac{(1)}{(2)} \sin$$

und anderntheils bekommt man diese Gröſsen geradezu durch die Gleichungen (38). Wenn man beide Berechnungsarten anwendet, so sind nicht nur diese Gröſsen, sondern auch alle, für die ich die Bezeichnung $\frac{(\;)}{(\;)}$ gewählt habe, controllirt.

Wie aus dem Vorhergehenden erhellet, ist die fernere Berechnung der Coëfficienten, für welche der Index eine gerade Zahl ist, ganz

Digitized by Google

von der Berechnung der Coëfficienten, deren Index eine ungerade Zahl ist, abgesondert; man kann sie daher auch unabhängig von einander controlliren. Es ist leicht, sich durch das Vorhergehende zu überzeugen, daſs folgende Gleichungen statt finden, in welchen ich der Kürze wegen den Index i' weggelassen habe.

$$\left(\frac{2}{8}\right) = \frac{\{[(2,c)+(14,c)]-[(6,c)+(10,c)]\}+\{[(2,s)-(14,s)]+[(6,s)-(10,s)]\}}{8\cos 45^\circ}$$

$$\left(\frac{6}{8}\right) = \frac{\{[(2,c)+(14,c)]-[(6,c)+(10,c)]\}-\{[(2,s)-(14,s)]+[(6,s)-(10,s)]\}}{8\cos 45^\circ}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{5}{8}\right)\right\}\cos(22^\circ\,30')+\left\{\left(\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{5}{8}\right)\right\}\sin(22^\circ\,30') = \frac{\{(2,c)-(14,c)+(2,s)+(14,s)\}+\{(6,c)-(10,c)+(6,s)+(10,s)\}}{4}$$

$$\left\{\left(\frac{3}{8}\right)-\left(\frac{7}{8}\right)\right\}\cos(22^\circ\,30')+\left\{\left(\frac{3}{8}\right)+\left(\frac{7}{8}\right)\right\}\sin(22^\circ\,30') = \frac{\{(2,c)-(14,c)+(2,s)+(14,s)\}-\{(6,c)-(10,c)+(6,s)+(10,s)\}}{4}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{5}{8}\right)\right\}\cos(22^\circ\,30')-\left\{\left(\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{5}{8}\right)\right\}\sin(22^\circ\,30') = \frac{\{(2,c)-(14,c)-(2,s)-(14,s)\}-\{(6,c)-(10,c)-(6,s)-(10,s)\}}{4}$$

$$\left\{\left(\frac{3}{8}\right)+\left(\frac{7}{8}\right)\right\}\cos(22^\circ\,30')-\left\{\left(\frac{3}{8}\right)-\left(\frac{7}{8}\right)\right\}\sin(22^\circ\,30') = -\frac{\{(2,c)-(14,c)-(2,s)-(14,s)\}-\{(6,c)-(10,c)-(6,s)-(10,s)\}}{4}$$

(Statt der letzten vier Gleichungen braucht man eigentlich nur zwei zu rechnen).

$$\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{[(4,c)-(12,c)]+[(4,s)+(12,s)]}{4\cos 45^\circ}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{[(4,c)-(12,c)]-[(4,s)+(12,s)]}{4\cos 45^\circ}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)\cos = \frac{\{(3,c)-(13,c)+(3,s)+(13,s)\}+\{(5,c)-(11,c)+(5,s)+(11,s)\}}{8\cos 45^\circ}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)\cos = -\frac{\{(3,c)-(13,c)-(3,s)-(13,s)\}+\{(5,c)-(11,c)-(5,s)-(11,s)\}}{8\cos 45^\circ}$$

Digitized by Google

$$\left(\frac{1}{8}\right)\sin = \frac{\{(3,c)-(13,c)-(3,s)-(13,s)\}-\{(5,c)-(11,c)-(5,s)-(11,s)\}}{8\cos 45^\circ}$$

$$\left(\frac{3}{8}\right)\sin = \frac{\{(3,c)-(13,c)+(3,s)+(13,s)\}-\{(5,c)-(11,c)+(5,s)+(11,s)\}}{8\cos 45^\circ}$$

$$\left(\frac{2}{4}\right)\cos = \frac{(3,s)-(13,s)+(5,s)-(11,s)}{4}$$

$$\left(\frac{2}{4}\right)\sin = \frac{(3,c)+(13,c)-(5,c)-(11,c)}{4}$$

$$\left(\frac{0}{4}\right)\cos = \frac{(3,c)+(13,c)+(5,c)+(11,c)}{4}$$

$$\left(\frac{0}{4}\right)\sin = \frac{(3,c)+(13,c)-(5,c)-(11,c)}{4}$$

Es ist nicht nöthig, diese Formeln für jeden Werth von i' einzeln zu rechnen, sondern man kann mehrere der Gröſsen $(i, c)_{,i'}$ und $(i, s)_{,i'}$ im Sinne von i' addiren und sich dadurch die Arbeit bedeutend vermindern; ich habe allemal die Summe von vier Gröſsen genommen.

Die vorstehenden Gleichungen, deren man noch mehrere ableiten könnte, controlliren die Rechnung, wenn man sich genau an die vorher gegebenen Formeln hält, vollständig, bis auf die mit $(-)$ bezeichneten Gröſsen. Diese aber sind leicht zu controlliren, entweder durch eine doppelte Berechnung, welche wenig Mühe verursacht, oder sicherer dadurch, daſs man ihre beiden Glieder, welche schon controllirt sind, durch Hülfe der vorher berechneten Summen, vermittelst Addition und Subtraction wieder berechnet (*).

Man kann nun für x und x' resp. die mittleren Anomalien der beiden in Betracht kommenden Planeten, also g und g' annehmen, aber es ist vortheilhafter, $x = g - g'$ und $x = g'$ zu setzen. Es ist bekannt, daſs wenn man die Reihe, welcher Ω gleich kommt, nach der Gröſse

$$i\,(g - g') + i'g'$$

(*) Die sicherste Controlle ist unstreitig die, daſs man in die erhaltene Reihenentwickelung successive $x = 0$ bis $x = (n-1)\frac{2\pi}{n}$ und $x' = 0$ bis $x' = (n'-1)\frac{2\pi}{n'}$ substituirt, wodurch man, wenn die Rechnung richtig ausgeführt ist, die Gröſsen $Y_{,i,i'}$ alle wieder bekommen muſs; aber diese Rechnung ist sehr lang.

Digitized by Google

von der Berechnung der Coëfficienten, deren Index eine ungerade Zahl ist, abgesondert; man kann sie daher auch unabhängig von einander controlliren. Es ist leicht, sich durch das Vorhergehende zu überzeugen, daſs folgende Gleichungen statt finden, in welchen ich der Kürze wegen den Index i' weggelassen habe.

$$\left(\frac{2}{8}\right) = \frac{\{[(2,c)+(14,c)]-[(6,c)+(10,c)]\} + \{[(2,s)-(14,s)]+[(6,s)-(10,s)]\}}{8\cos 45^\circ}$$

$$\left(\frac{6}{8}\right) = \frac{\{[(2,c)+(14,c)]-[(6,c)+(10,c)]\} - \{[(2,s)-(14,s)]+[(6,s)-(10,s)]\}}{8\cos 45^\circ}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{5}{8}\right)\right\}\cos(22^\circ 30') + \left\{\left(\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{5}{8}\right)\right\}\sin(22^\circ 30') = \frac{\{(2,c)-(14,c)+(2,s)+(14,s)\} + \{(6,c)-(10,c)+(6,s)+(10,s)\}}{4}$$

$$\left\{\left(\frac{3}{8}\right)-\left(\frac{7}{8}\right)\right\}\cos(22^\circ 30') + \left\{\left(\frac{3}{8}\right)+\left(\frac{7}{8}\right)\right\}\sin(22^\circ 30') = \frac{\{(2,c)-(14,c)+(2,s)+(14,s)\} - \{(6,c)-(10,c)+(6,s)+(10,\ldots}{4}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{5}{8}\right)\right\}\cos(22^\circ 30') - \left\{\left(\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{5}{8}\right)\right\}\sin(22^\circ 30') = \frac{\{(2,c)-(14,c)-(2,s)-(14,s)\} - \{(6,c)-(10,c)-(6,s)\ldots}{4}$$

$$\left\{\left(\frac{3}{8}\right)+\left(\frac{7}{8}\right)\right\}\cos(22^\circ 30') - \left\{\left(\frac{3}{8}\right)-\left(\frac{7}{8}\right)\right\}\sin(22^\circ 30') = -\frac{\{(2,c)-(14,c)-(2,s)-(14,s)\} - \{(6,c)-(10,c)\ldots}{4}$$

(Statt der letzten vier Gleichungen braucht man ei… zu rechnen).

$$\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{[(4,c)-(12,c)] + [(4,s)+(12,s)]}{4\cos 45^\circ}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{[(4,c)-(12,c)] - [(4,s)+(12,s)]}{4\cos 45^\circ}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)\cos = \frac{\{(3,c)-(13,c)+(3,s)+(13,s)\} + \{(5,\ldots}{8\cos 45^\circ}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)\cos = -\frac{\{(3,c)-(13,c)-(3,s)-(13,s)\} + \{(5,\ldots}{8\cos 45^\circ}$$

[illegible] nan-

[illegible] $u')$

[illegible] $\frac{1}{2}$ I $\cos(u+u')$

[illegible] dieselben Gröſsen, leiten [illegible] brauchen müssen. vorher [illegible] zeichneten [illegible] durch eine [illegible] sicherer [illegible] m berechneten Gröſsen: lirt sind. [illegible]

$$\left(\frac{d\Omega_i}{dr}\right) - \frac{\mu}{m'}\,\Omega_i$$

Addition [illegible]

Man [illegible] lnen Entwickelungscoëfficienten beiden in [illegible] es ist [illegible] daſs wenn [illegible]

[illegible] für die Störungen der zweiten Ord- [illegible]merischen Rechnungen für die gegen- [illegible]dnung des Jupiters und Saturns geben. [illegible] Male für einen Planeten die Störungen [illegible] die Elemente der Bahn, welche ohne das [illegible]nden, denn die Beobachtungen haben als-

(*) [illegible] wickelung [illegible] tuirt, [illegible] wieder [illegible]

Digitized by Google

ordnet, der Index i' zugleich die Ordnung des Coëfficienten in Beziehung auf Neigung und Excentricitäten darstellt: für Zahlenwerthe, wie sie beim Jupiter und Saturn statt finden, convergirt daher die so gestellte Reihe im Sinne von i' weit mehr als im Sinne von i, und dies ist die Ursache, weshalb ich bei der Integration nach i' mit $n = 16$ ausgereicht habe. Die bei der Entwickelung so geordnete Reihe ist leicht auf die Form, die für die hier gegebenen Störungsformeln gebraucht worden ist, zurückzuführen; man sieht gleich ein, daſs diese Reihe nach $ig + i'g'$ geordnet sein wird, wenn man i' für $i' - i$ schreibt.

Um die Zahl zu bestimmen, die man für n substituiren muſs, ist es nöthig, daſs man wenigstens näherungsweise im Voraus einen oder einige Coëfficienten für groſse Indices kenne, und hierfür bieten mehrere Theoreme, die La Place zum Entdecker haben, in den meisten Fällen Mittel dar, wie der Herr Professor Bessel in den Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften für 1820 - 1821 bereits angemerkt hat. Ein anderes, gleichsam directes Entscheidungszeichen, worauf so viel ich weiſs noch niemand aufmerksam gemacht hat, bietet die mehr oder mindere Convergenz der endlichen Differenzordnungen der speciellen Werthe, die man berechnet hat, dar, doch beim Jupiter und Saturn habe ich dieses alles nicht bedurft, denn aus den bereits von La Place berechneten Störungen dieser Planeten war sichtbar, daſs ohne Rücksicht auf x' die 8fache oder 9fache Elongation höchstens merkliche Störungen gegeben hat, und es war daher vorauszusehen, daſs in Beziehung auf x die Annahme $n = 32$, wodurch man die Coëfficienten der 15fachen Elongation mit denen der 17fachen vermischt und unter andern die der 9fachen mit denen der 23fachen vermischt erhält, hinlänglich sei. In Beziehung auf x' habe ich es anfangs darauf ankommen lassen, ob $n = 16$ hinreichend sei, in der Absicht auch hier nachher $n = 32$ zu machen, wenn es sich nicht so verhielte, aber eine leichte Prüfung, die gemacht werden kann, ehe noch etwas vergeblich gerechnet ist, überzeugte mich, daſs die Störungen, welche von den Argumenten, in welchen $i'x' = 7x'$ ist, abhängen, unmerklich sind, und daſs es also weiter nichts bedurfte, als für $x' .. n = 16$ zu lassen.

Digitized by Google

Es müſsen nun für y in die Formeln dieses Artikels nach einander folgende Gröſsen substituirt werden (H. Art. 24.):

$$\Omega_{,} = \frac{m'}{\mu}\,\frac{1}{\Delta_{,}}$$

$$r\left(\frac{d\Omega_{,}}{dr}\right) = -\frac{m'}{\mu}\,\frac{r^2 - rr'\cos^2\frac{1}{2}\mathrm{I}\cos(u-u') - rr'\sin^2\frac{1}{2}\mathrm{I}\cos(u+u')}{\Delta_{,}^3}$$

$$\left(\frac{d\Omega_{,}}{d\mathrm{I}}\right) = -\frac{1}{2}\,\frac{m'}{\mu}\sin\mathrm{I}\,\frac{rr'\cos(u-u') - rr'\cos(u+u')}{\Delta_{,}^3}$$

$$= -\frac{m'}{\mu}\sin\mathrm{I}\,\frac{rr'\sin u\sin u'}{\Delta_{,}^3}$$

$$\left(\frac{d\Omega_{,}}{d\Theta}\right) = 2\,\frac{m'}{\mu}\sin^2\frac{1}{2}\mathrm{I}\,\frac{rr'\sin(u+u')}{\Delta_{,}^3}$$

in welchen

$$\Delta_{,}^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos^2\frac{1}{2}\mathrm{I}\cos(u-u') - 2rr'\sin^2\frac{1}{2}\mathrm{I}\cos(u+u')$$

Für die Störungen des Planeten m' dienen dieselben Gröſsen, mit Ausnahme von $r\left(\frac{d\Omega_{,}}{dr}\right)$, statt dessen wir $r'\left(\frac{d\Omega'_{,}}{dr'}\right)$ brauchen müſsen. Aber da

$$\frac{\mu}{m'}\,\Omega_{,} = \frac{\mu'}{m}\,\Omega'_{,}$$

ist, so haben wir aus den für den Planeten m berechneten Gröſsen:

$$\frac{\mu'}{m}\,r'\left(\frac{d\Omega'_{,}}{dr'}\right) = -\frac{\mu}{m'}\,r\left(\frac{d\Omega_{,}}{dr}\right) - \frac{\mu}{m'}\,\Omega_{,}$$

welche Gleichung auch für jeden einzelnen Entwickelungscoëfficienten statt findet.

14.

Bevor ich die Vorschriften für die Störungen der zweiten Ordnung entwickele, will ich die numerischen Rechnungen für die gegenseitigen Störungen der ersten Ordnung des Jupiters und Saturns geben.

Wenn man zum ersten Male für einen Planeten die Störungen rechnet, so kennt man nicht die Elemente der Bahn, welche ohne das Dasein der Störungen statt fänden, denn die Beobachtungen haben als-

Digitized by Google

dann nur die Elemente mit Inbegriff der Störungen, die zu den Beobachtungszeiten statt fanden, gegeben. In einem solchen Falle bleibt nichts übrig, als diese Elemente zu Grunde zu legen, die aus ihnen sich ergebenden Störungen zu rechnen und mit Zuziehung dieser aus den Beobachtungen neue Elemente abzuleiten. Diese werden den rein elliptischen Elementen schon näher kommen und man wird, wenn man diese einer neuen Rechnung zum Grunde legt, die Störungen schon weit genauer bekommen; durch eine Fortsetzung dieses Verfahrens erlangt man jede beliebige Genauigkeit. Für den Jupiter und Saturn waren diese Annäherungen überflüssig, weil bereits durch die Arbeiten eines La Place, Bouvard etc. die Störungen sowohl als die nach Abzug dieser sich ergebenden Elemente einen hohen Grad von Genauigkeit erlangt haben. Man kann die Herrn Bouvard's letzten Tafeln zum Grunde liegenden Elemente, ohne Gefahr merklich zu fehlen, als diejenigen ansehen, welche ohne das Dasein der störenden Planeten statt finden würden. Es ist nach diesen Tafeln, jedoch in Sexagesimaleintheilung verwandelt, für die Zeit Dec. 31, 12^h des Jahres 1799:

	Für den Jupiter.	Für den Saturn.
Mittlere sider. Bew. in $365\frac{1}{4}$ Tagen	109256,"7185	43996,"1269
Excentricität	0,0481621	0,0561505
Länge des Perihels	11° 7′ 38″	89° 8′ 20″
Neigung gegen die Ebene der Ecliptik	1° 18′ 51,"6	2° 29′ 35,"9
Länge des aufſteigenden Knotens	98° 25′ 45″	111° 56′ 7″
Mittlere Länge	81° 52′ 19″	123° 5′ 29″
Masse	$\frac{1}{1070.5}$	$\frac{1}{3512}$

Hieraus habe ich erstlich die groſsen Halbachsen nach der Formel (H. 1.)

$$n^2 a^3 = k'\mu$$

berechnet und resp. den Logarithmus derselben

0,7162344   0,9794960

gefunden, alsdann die gegenseitige Neigung und Knotenlänge nach folgenden Formeln:

Digitized by Google

$$\sin \tfrac{1}{2} (B + B') \sin \tfrac{1}{2} \mathrm{I} = \sin \tfrac{1}{2} (i' + i) \sin \tfrac{1}{2} (\theta' - \theta)$$

$$\cos \tfrac{1}{2} (B + B') \sin \tfrac{1}{2} \mathrm{I} = \sin \tfrac{1}{2} (i' - i) \cos \tfrac{1}{2} (\theta' - \theta)$$

$$\sin \tfrac{1}{2} (B - B') \cos \tfrac{1}{2} \mathrm{I} = \cos \tfrac{1}{2} (i' + i) \sin \tfrac{1}{2} (\theta' - \theta)$$

$$\cos \tfrac{1}{2} (B - B') \cos \tfrac{1}{2} \mathrm{I} = \cos \tfrac{1}{2} (i' - i) \cos \tfrac{1}{2} (\theta' - \theta)$$

In diesen sind i', θ', i, θ die Neigung und Knotenlänge resp. der Planeten m' und m gegen eine und dieselbe dritte übrigens willkührliche Ebene, B ist der Bogen zwischen dem gegenseitigen Durchschnittspunkte der Bahnen m und m' und dem Durchschnittspunkte der Bahn m mit der dritten Ebene, B' ist dasselbe in Beziehung auf die Bahn m'. Wenn man nun

$$\Theta = \theta + B \quad \text{und} \quad C = B - B' - (\theta' - \theta)$$

macht, so ist Θ die Länge des aufſteigenden Knotens der Planetenbahn m' auf der Bahn m gezählt, und C ist ein Bogen, welcher der mittleren Länge zur Zeit der Epoche und der Länge des Perihels des Planeten m' hinzugefügt werden muſs (*), um zu bewirken, daſs im gegenseitigen Durchschnittspunkte der Bahnen m und m' eine gleiche Anzahl von Graden etc. gezählt werde. Die Bedeutung von I ist bekannt.

Es wurden nun die mit einem Striche bezeichneten Buchstaben auf den Saturn bezogen, und somit ergab sich:

$$\mathrm{I} = 1^\circ\, 15'\, 12{,}''6$$
$$\Theta = 126^\circ\, 6'\, 14''$$
$$C = -\, 24''$$

Wenn man die in dieser Abhandlung gegebenen Störungsformeln aufmerksam betrachtet, so wird man finden, daſs die absolute Gröſse der groſsen Halbachsen aus allen verschwindet und dagegen nur das Verhältniſs darin bleibt. In Folge dieser Bemerkung habe ich die groſse

(*) Es ist an sich klar, daſs man statt dessen C von der mittleren Länge zur Zeit der Epoche und von der Länge des Perihels des Planeten m abziehen kann.

I

Halbachse des Saturns der Einheit gleich gesetzt und dem gemäſs die groſse Halbachse des Jupiters gleich dem Verhältnisse der oben angeführten Werthe gemacht. Dies vorangeschickt, haben als Grundlage der Rechnung die folgenden Werthe gedient, in welchen sich, wie immer sein wird, die mit einem Striche versehenen Gröſsen auf den Saturn beziehen.

$\log a \frac{m'}{\mu} \cdot 206265''$	$=$	$1{,}5052036$	$\log a' \frac{m}{\mu'} \cdot 206265''$	$=$	$2{,}2847149$
$\log a$	$=$	$9{,}7367384$	$\log a'$	$=$	$0{,}0000000$
e	$=$	$0{,}0481621$	e'	$=$	$0{,}0561505$
π	$=$	$11^\circ\ 7'\ 38''$	π'	$=$	$89^\circ\ 7'\ 56''$
ε	$=$	$81^\circ\ 52'\ 19''$	ε'	$=$	$123^\circ\ 5'\ 5''$
(i)	$=$	$1^\circ\ 18'\ 51{,}''6$	(i')	$=$	$2^\circ\ 29'\ 35{,}''9$
(θ)	$=$	$98^\circ\ 25'\ 45''$	(θ')	$=$	$111^\circ\ 56'\ 7''$
(p)	$=$	$-0{,}0106533$	(p')	$=$	$+0{,}0106484$
(q)	$=$	$+0{,}0203134$	(q')	$=$	$-0{,}0421793$
n	$=$	$109256{,}''719$	n'	$=$	$43996{,}''127$

$$(\mathrm{I}) = 1^\circ\ 15'\ 12{,}''6$$
$$(\Theta) = 126^\circ\ 6'\ 14''$$

Die sich auf die Lage der Bahnen zur Ecliptik für das Jahr 1800 beziehenden Gröſsen sind der Bezeichnung (H. Art. 21.) gemäſs in ( ) eingeschlossen und nach den Formeln am Ende des Art. 10. berechnet worden. Hiebei ist zu bemerken, daſs für den Saturn zu dem obigen Werthe von Θ ... 180° addirt worden sind, weil den Vorschriften des Artikels 10. gemäſs bei diesem Planeten die Länge des aufsteigenden Knotens der Jupiterbahn auf der Saturnbahn verlangt wird.

15.

Die hinten befindliche Tafel I. zeigt nun für die in der ersten Columne befindlichen Werthe der mittleren Anomalien die Werthe von $\log r$, $\log r'$, u, u', r^2 und r'^2, welche der Entwickelung der Gröſse Ω, und ihrer Differentialquotienten zur Grundlage dienen. Die Tafel II.

Digitized by Google

giebt die Entwickelungscoëfficienten selbst, welche so berechnet sind, daſs der Index i nur negative Werthe bekommt; ich habe sie, wie man sieht, mit $K_{\iota}^{\iota,i}$ und $K_{\iota}^{\prime\iota,i}$ bezeichnet. Die beiden letzten Columnen geben $\left(\frac{d\Omega_{\iota}}{d\Theta}\right)$ unter der Bezeichnung Φ, die bei der Entwickelung der Bedingungsgleichungen in Art. 9. angewendet ist. Die Reihenfolge der Coëfficienten ist diejenige, die zufolge des Art. 7. bei der Berechnung der Störungen des Saturns angewendet werden muſs; ich habe es für überflüssig gehalten, die Tafel nochmals in der Ordnung, wie die Gröſsen für den Jupiter angewendet werden sollen, abzuschreiben, weil es eine Kleinigkeit ist, die betreffenden Coëfficienten auch auſser der Reihe auszuheben. Es befinden sich in der Tafel nicht alle 512 Entwickelungscoëfficienten, welche die vorhergehende Rechnung gegeben hat, allein die angeführten sind mehr als hinreichend, alle Störungen zu geben, die merklich sind. Nach den Formeln des Art. 11. habe ich für $\frac{R^{(i)}}{e}$ und $\left(\frac{dR^{(i)}}{i\,de}\right)$ folgende Werthe gefunden:

	Für Jupiter.	Für Saturn.
$\log \frac{R^{(1)}}{e} =$	$9{,}9998740_n$	$9{,}9998288_n$
$\log \frac{R^{(2)}}{e} =$	$8{,}0803096_n$	$8{,}1468372_n$
$\log \frac{R^{(3)}}{e} =$	$6{,}4617539_n$	$6{,}5948454_n$
$\log \frac{R^{(4)}}{e} =$	$4{,}96814_n$	$5{,}16779_n$
$\log \frac{R^{(5)}}{e} =$	$3{,}54345_n$	$3{,}80963_n$
$\log \left(\frac{dR^{(0)}}{de}\right) =$	$9{,}1598267$	$9{,}2264750$
$\log \left(\frac{dR^{(1)}}{de}\right) =$	$9{,}9996221_n$	$9{,}9994863_n$
$\log \left(\frac{dR^{(2)}}{2de}\right) =$	$8{,}0799736_n$	$8{,}1463803_n$
$\log \left(\frac{dR^{(3)}}{3de}\right) =$	$6{,}4613754_n$	$6{,}5943299_n$

Digitized by Google

	Für Jupiter.		Für Saturn.
$\log\left(\frac{dR^{(4)}}{4de}\right) =$	$4{,}96772_n$	....	$5{,}16724_n$
$\log\left(\frac{dR^{(5)}}{5de}\right) =$	$3{,}54305_n$	....	$3{,}80906_n$
$\log(1-e^2) =$	$9{,}9989914$	....	$9{,}9986284$

Nach den Formeln des Artikels 12. fand sich:

$$\log\eta = 8{,}7531358$$
$$\log\zeta = 9{,}4253579_n$$
$$\log\lambda = 9{,}4255896_n$$
$$\log\sigma = 8{,}7523870$$

$$\log\xi = 9{,}4260939_n \qquad \log\xi' = 9{,}4260437$$
$$\log\theta = 8{,}7528913 \qquad \log\theta' = 8{,}7530728_n$$
$$\log\nu = 8{,}7526315 \qquad \log\nu' = 8{,}7524500_n$$
$$\log\phi = 9{,}4248536_n \qquad \log\phi' = 9{,}4249038$$
$$\log\left(\frac{d\eta}{dI}\right) = 7{,}51230_n \qquad \log\left(\frac{d\eta}{\sin 1\, d\Theta}\right) = 7{,}14704_n$$
$$\log\left(\frac{d\zeta}{dI}\right) = 7{,}63499 \qquad \log\left(\frac{d\zeta}{\sin 1\, d\Theta}\right) = 7{,}41978_n$$
$$\log\left(\frac{d\lambda}{dI}\right) = 7{,}18002 \qquad \log\left(\frac{d\lambda}{\sin 1\, d\Theta}\right) = 7{,}41992$$
$$\log\left(\frac{d\sigma}{dI}\right) = 7{,}30271 \qquad \log\left(\frac{d\sigma}{\sin 1\, d\Theta}\right) = 7{,}14590$$

Durch Hülfe dieser Gröſsen ist die Tafel III. entstanden, welche die Entwickelungscoëfficienten der Gröſse ψ und ihrer Differentialquotienten giebt. Die Logarithmen der Factoren, wodurch diese Coëfficienten nach Artikel 12. in diejenigen der Gröſsen $\frac{\mu}{m'}\Omega_{''}$ und $\frac{\mu'}{m}\Omega'_{''}$ und ihrer resp. Differentialquotienten verwandelt werden, finden sich in einem Täfelchen der Tafel III. angehängt. Die Summe der Coëfficienten von $\frac{\mu}{m'}\Omega'_{,}$ und $\frac{\mu}{m'}\Omega'_{''}$, das ist die Coëfficienten von $\frac{\mu}{m'}\Omega'$ nebst den Coëfficienten von $\frac{\mu}{m'} r'\left(\frac{d\Omega'}{dr'}\right)$, welche der im Artikel 6. festgesetzten Bezeichnung gemäſs benannt sind, giebt die Tafel IV.; ich habe jedoch

Digitized by Google

nur diejenigen Coëfficienten aufgenommen, für welche das zu $\Omega'_{,,}$ gehörige Glied merklich ist. Man hat also für die hier ſehlenden Argumente $(i', i, c)' = K_c^{i',i}$; $(i', i, s)' = K_s^{i',i}$: $[i', i, c]' = r'\left(\frac{dK_c^{i',i}}{dr'}\right)$; $[i', i, s]' = r'\left(\frac{dK_s^{i',i}}{dr'}\right)$. Die Tafel V. giebt dasselbe in Beziehung auf die Störungen des Jupiters. Die Tafeln VI. und VII. geben resp. für Saturn und Jupiter die Logarithmen von $\frac{n}{in + i'n'}$. Aus den Tafeln VIII. und IX. entlehnt man resp. für Saturn und Jupiter die Gröſsen $C^{n,k}$, $D^{n,k}$, $\eta^{(n)}$ und $\theta^{(n)}$, welche nach den Artikeln 6 und 8. noch zur Berechnung der Störungen nöthig sind.

16.

Die Grenze, bis zu welcher herab ich mir vorgesetzt habe die Störungscoëfficienten zu berechnen, ist 0,″03 bis 0,″04 für die rein periodischen Störungen und einige Einheiten in der 5ten Decimale für die Störungen, welche die Zeit auſserhalb des Sinus- und Cosinuszeichens enthalten; ich glaube, daſs dieses den Forderungen der Wissenschaft genügen kann. Und somit sind für die Störungen des Saturns die Tafeln X. bis XIV. incl. entstanden. Die erste dieser, welche nach (17) berechnet ist, giebt die Gröſse $\int T' d\tau$; es ist uns, wie bereits angeführt, für die Berechnung der Störungen der zweiten Ordnung nothwendig, diese Gröſse zu haben. Die Anordnung dieser Tafel, so wie die aller folgenden, ist diese: In der ersten, vierten und siebenten Columne findet man unter der Überschrift $\varkappa\ i'\ i$ die jedem Argumente zukommenden Werthe dieser Gröſsen, und die folgenden zwei Columnen unter der Überschrift *cos* und *sin* geben die zu dem Cosinus oder Sinus des neben angedeuteten Argumentes gehörigen Coëfficienten, z. B. neben den Zahlen 1, 1, —2, findet man — 29,″700 und — 11,″485, und es wird also hierdurch angezeigt, daſs in $\int T' d\tau$ das Glied

$$-29{,}''700 \cos(\gamma + g' - 2g) - 11{,}''485 \sin(\gamma + g' - 2g)$$

vorkommt, und so verhält es sich mit allen übrigen Zahlen. Wenn, wie bei dem Jupiter und Saturn der Fall ist, die Bewegungen zweier Planeten nahe commensurabel sind, und dem zufolge unter den Gröſsen $\frac{n}{in + i'n'}$ Eine sehr groſs ist, so muſs man in $\int T d\tau$ die Glieder, welche

Digitized by Google

bei der Integration nach t dieſen Factor bekommen, mit mehreren Decimalen anſetzen, als man Willens iſt nachher zu behalten. Dieſe Glieder ſind nach unſerer Methode leicht zu erkennen; es ſind diejenigen, denen die folgenden fünf Argumente zukommen: $0\gamma + pg + qg'$, $-\gamma + (p+1)g + qg'$, $\gamma + (p-1)g + qg'$, $\pm\gamma + pg + qg'$, wenn $\frac{n}{pn+qn'}$ der groſse Factor iſt. Die Coëfficienten des erſten und der beiden letzten Argumente bekommen dieſen Factor gleich bei der Integration, die übrigen beiden bei der Berechnung der Störungen des Radius Vectors und bei den Controllen. Die Glieder der Tafel XI., in welchen $\varkappa = 0$, $\varkappa = 1$ und $\varkappa = -1$ iſt, ſind nach den Formeln (21 u. 22) aus der vorhergehenden Tafel berechnet, die übrigen ſind nach der Vorſchrift des Artikels 8. aus jenen abgeleitet; es folgt aus dem Vorgetragenen, daſs man die Störungen der mittleren Länge bekommt, wenn man in dieſer Tafel τ in t verwandelt. Wenn $\frac{n}{pn+qn'}$ ein ſehr groſser Factor iſt, ſo iſt es nothwendig, auch in $n\zeta$ alle Glieder, die nach der Verwandlung von τ in t das Argument $pg + qg'$ bekommen, ausgenommen das Glied $0\gamma + pg + qg'$, mit mehreren Decimalen anzuſetzen, weil ſie nachher bei der Berechnung der Störungen des log. des Radius Vectors und bei den Controllen mit dieſem Factor multiplicirt werden. Es iſt für die nachherigen Rechnungen vortheilhaft, in den mit der Zeit multiplicirten Coëfficienten den Factor n ſtehen zu laſſen; am Ende der Rechnung iſt es ein Leichtes, ſeinen Werth zu ſubſtituiren. Tafel XII. dient für die Controlle, welche (H. Art. 17.) entwickelt iſt, und für die nachherige Berechnung der S genannten Gröſse. Die Tafel giebt, wie die Überſchrift zeigt, den Differentialquotienten $\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)$, aber in jeder Abtheilung iſt unter den zwei kurzen Strichen die Summe der Coëfficienten dieſer Abtheilung hinzugefügt, dieſe vorletzte Zeile jeder Abtheilung enthält alſo die Coëfficienten von $\left(\frac{dz}{dt}\right)$, welche durch die Verwandelung von τ in t aus den Coëfficienten von $\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)$ entſtehen müſſen. Dieſe Coëfficienten ſind daher, wenn die numeriſche Rechnung richtig ausgeführt iſt, den reſp. Coëfficienten von demjenigen Werthe von $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ gleich, welcher entſteht, wenn man den Werth von nz geradezu nach t differentiirt. Sei nun irgend ein Glied in dem erſtgenannten Werthe von $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ durch

Digitized by Google

$$\alpha_c \cos(ig+i'g') + \alpha_s \sin(ig+i'g') + \beta_c\, nt \cos(ig+i'g') + \beta_s\, nt \sin(ig+i'g')$$

und das mit gleichem Argumente in dem vorher gefundenen Werthe von nz durch

$$\alpha'_s \sin(ig+i'g') + \alpha'_c \cos(ig+i'g') + \beta'_s\, nt \sin(ig+i'g') + \beta'_c\, nt \cos(ig+i'g')$$

dargestellt, so haben wir das correspondirende Glied in dem zuletzt genannten Werthe von $\left(\frac{dz}{dt}\right) =$

$$\left\{\alpha'_s \frac{in+i'n'}{n} + \beta'_c\right\} \cos(ig+i'g') - \left\{\alpha'_c \frac{in+i'n'}{n} - \beta'_s\right\} \sin(ig+i'g')$$
$$+ \beta'_s\, nt \frac{in+i'n'}{n} \cos(ig+i'g') - \beta'_c\, nt \frac{in+i'n'}{n} \sin(ig+i'g')$$

Der Bedingungsgleichung $\left(\frac{d\overline{\zeta}}{d\tau}\right) = \left(\frac{dz}{dt}\right)$ zufolge haben wir also folgende zwei Gleichungen:

$$\alpha'_s = \left\{\alpha_c - \beta'_c\right\} \frac{n}{in+i'n'} \quad , \quad \alpha'_c = -\left\{\alpha_s - \beta'_s\right\} \frac{n}{in+i'n'}$$

und aufserdem noch zwei, die aber im gegenwärtigen Falle nichts anzeigen können. Die letzte Zeile einer jeden Abtheilung der Tafel XII. enthält nun die rechte Seite der vorstehenden Gleichungen, die linke Seite sind die gleich unten folgenden Coëfficienten von nz; es kann sich jeder durch die Vergleichung überzeugen, wie weit die Bedingungsgleichung erfüllt ist. Die Überschrift der Tafel XIII. zeigt genugsam an was sie enthält; ich habe nur hier hinzuzufügen, dafs die letzte Zeile jeder Abtheilung die Summe der in dieser befindlichen Coëfficienten, also die Coëfficienten von $\frac{1}{n}\left(\frac{d^2\overline{\zeta}}{d\tau^2}\right)$ giebt. Aus diesen sind nun durch die Formeln (29 u. 28) die ersten Columnen der Tafel XIV. entstanden, welche die Coëfficienten von $l(r')$ enthalten, und diese Tafel giebt zugleich die von S, welche sich durch die Gleichung (30) ergeben haben. Da S zur Controlle dienen wird, so war es, um alle Glieder dieser Gröfse zu bekommen, nothwendig, auch alle Glieder von $l(r)$ zu rechnen, obgleich sie anderweitig nicht alle gebraucht werden. Die durch die Gleichung (20) bestimmte Constante c ist, wie jeder Leser auch ohne diese Erinnerung schon gesehen haben wird, nichts weiter wie der mit dem Argumente o, o, o, behaftete Coëfficient in $\int T d\tau$, und dessen

Digitized by Google

Einfluſs ist schon der Gröſse $l(r)$ in der Tafel XIV. hinzugefügt. Um zu wissen, bis wie weit herab wir die Störungen des Radius Vectors brauchen, müssen wir in Erfahrung bringen, welcher Fehler im Logarithmus des Radius Vectors in der geocentrischen Länge einen Fehler im ungünstigsten Falle hervorbringt, der der oben angenommenen Grenze für die Längenstörungen gleich kommt. Diese Aufgabe ist bereits von La Place im dritten Theile der *Mécanique céleste* gelöst; die Formel, welche die beiden genannten Fehler mit einander verbindet, ist folgende:

$$\delta r = -\frac{r^2}{r_,}\left(1-\frac{r_,^2}{r^2}\right)\delta v$$

wo $r_,$ der Radius Vector der Erde ist. Wir bekommen aus dieser:

$$\delta l r = -\frac{r}{r_,}\left(1-\frac{r_,^2}{r^2}\right)\delta v$$

und in Zahlen, wenn wir $a_, + a_,e_,$ für $r_,$ und $a - ae$ für r setzen und $\delta v = \pm\, 0\text{,}''03$ annehmen, für den Saturn:

$$\delta l r' = 0\text{,}''262$$

und für den Jupiter:

$$\delta l r = 0\text{,}''140$$

bis zu dieser Grenze herab brauchen wir also nur die Störungen des Logarithmus des Radius Vectors anzusetzen. Es ist für die nachherigen Rechnungen vortheilhaft, diese Störungen wie die übrigen in Secunden bis zu Ende der ganzen Rechnung zu lassen, alsdann verursacht es nur wenige Mühe, weil man nemlich um je zwei correspondirende Glieder zu vereinigen doch ihre Logarithmen braucht, sie in Theile des Radius zu verwandeln und mit dem Modul der Briggischen Logarithmen zu multipliciren. Für die Störungen der Breite habe ich nicht für nöthig gehalten, mehrere Zwischenzahlen anzugeben als die bereits angeführten, da die Rechnung nach den Formeln (33) nichts Merkwürdiges weiter darbietet. Ich lasse nun die numerischen Werthe der Störungen des Saturns durch den Jupiter, in so weit diese erste Approximation sie hat geben können, folgen. Wenn die Folgezeit den genaueren Werth des Factors $\frac{m}{\mu'}$ kennen gelehrt haben wird, kann man sie dem gemäſs berichtigen:

Digitized by Google

$n'z' = n't$	$+\{14''{,}720 - 5''{,}23785\,n't\}\sin g'$	$+\{1''{,}465 - 8''{,}46764\,n't\}\cos g'$
	$+\{-0{,}095 - 0{,}07346\,n't\}\sin 2g'$	$+\{0{,}557 - 0{,}11880\,n't\}\cos 2g'$
	$+\{-0{,}010 - 0{,}00206\,n't\}\sin 3g'$	$+\{0{,}029 - 0{,}00334\,n't\}\cos 3g'$
	$-0{,}00007\,n't\ \sin 4g'$	$-0{,}00012\,n't\ \cos 4g'$
	$-0{,}006\sin(-2g'-g)$	$-0{,}004\cos(-2g'-g)$
	$-0{,}075\sin(-g'-g)$	$+0{,}037\cos(-g'-g)$
	$+1{,}035\sin(-g)$	$+11{,}449\cos(-g)$
	$-6{,}211\sin(g'-g)$	$-0{,}079\cos(g'-g)$
	$-414{,}940\sin(2g'-g)$	$-13{,}128\cos(2g'-g)$
	$-27{,}474\sin(3g'-g)$	$+19{,}820\cos(3g'-g)$
	$-0{,}288\sin(4g'-g)$	$+0{,}022\cos(4g'-g)$
	$-0{,}007\sin(5g'-g)$	$+0{,}005\cos(5g'-g)$
	$+0{,}001\sin(-g'-2g)$	$+0{,}006\cos(-g'-2g)$
	$+0{,}021\sin(-2g)$	$+0{,}200\cos(-2g)$
	$-0{,}837\sin(g'-2g)$	$-2{,}473\cos(g'-2g)$
	$-28{,}870\sin(2g'-2g)$	$+12{,}546\cos(2g'-2g)$
	$-18{,}271\sin(3g'-2g)$	$+18{,}252\cos(3g'-2g)$
	$+76{,}743\sin(4g'-2g)$	$-638{,}600\cos(4g'-2g)$
	$-1016{,}533\sin(5g'-2g)$	$-2365{,}797\cos(5g'-2g)$
	$+1{,}118\sin(6g'-2g)$	$-0{,}414\cos(6g'-2g)$
	$+0{,}015\sin(7g'-2g)$	$-0{,}008\cos(7g'-2g)$
	$+0{,}002\sin(-3g)$	$+0{,}005\cos(-3g)$
	$-0{,}018\sin(g'-3g)$	$-0{,}094\cos(g'-3g)$
	$-0{,}154\sin(2g'-3g)$	$+0{,}152\cos(2g'-3g)$
	$-3{,}818\sin(3g'-3g)$	$-5{,}212\cos(3g'-3g)$
	$-4{,}190\sin(4g'-3g)$	$-1{,}749\cos(4g'-3g)$
	$-2{,}920\sin(5g'-3g)$	$+0{,}383\cos(5g'-3g)$
	$-3{,}362\sin(6g'-3g)$	$+2{,}370\cos(6g'-3g)$
	$+2{,}271\sin(7g'-3g)$	$-4{,}590\cos(7g'-3g)$
	$-0{,}041\sin(8g'-3g)$	$-0{,}216\cos(8g'-3g)$
	$-0{,}007\sin(2g'-4g)$	$+0{,}012\cos(2g'-4g)$
	$-0{,}136\sin(3g'-4g)$	$-0{,}651\cos(3g'-4g)$
	$+1{,}248\sin(4g'-4g)$	$-1{,}418\cos(4g'-4g)$
	$+0{,}244\sin(5g'-4g)$	$-1{,}269\cos(5g'-4g)$
	$-0{,}207\sin(6g'-4g)$	$-0{,}585\cos(6g'-4g)$
	$-0{,}230\sin(7g'-4g)$	$-0{,}197\cos(7g'-4g)$
	$-0{,}192\sin(8g'-4g)$	$-0{,}055\cos(8g'-4g)$
	$+1{,}805\sin(9g'-4g)$	$-0{,}500\cos(9g'-4g)$
	$+2{,}444\sin(10g'-4g)$	$-2{,}500\cos(10g'-4g)$
	$+0{,}004\sin(4g'-5g)$	$-0{,}075\cos(4g'-5g)$
	$+0{,}571\sin(5g'-5g)$	$+0{,}311\cos(5g'-5g)$
	$+0{,}478\sin(6g'-5g)$	$-0{,}006\cos(6g'-5g)$
	$+0{,}187\sin(7g'-5g)$	$-0{,}113\cos(7g'-5g)$
	$+0{,}041\sin(8g'-5g)$	$-0{,}073\cos(8g'-5g)$
	$-0{,}001\sin(9g'-5g)$	$-0{,}037\cos(9g'-5g)$
	$+0{,}040\sin(5g'-6g)$	$-0{,}007\cos(5g'-6g)$
	$-0{,}069\sin(6g'-6g)$	$+0{,}236\cos(6g'-6g)$
	$+0{,}044\sin(7g'-6g)$	$+0{,}191\cos(7g'-6g)$

K

Digitized by Google

$+\,0'',068 \sin(8g'-6g)$	$+\,0'',068 \cos(8g'-6g)$
$+\,0,037 \sin(9g'-6g)$	$+\,0,011 \cos(9g'-6g)$
$+\,0,008 \sin(6g'-7g)$	$+\,0,019 \cos(6g'-7g)$
$-\,0,096 \sin(7g'-7g)$	$-\,0,001 \cos(7g'-7g)$
$-\,0,077 \sin(8g'-7g)$	$+\,0,037 \cos(8g'-7g)$
$-\,0,025 \sin(9g'-7g)$	$+\,0,035 \cos(9g'-7g)$
$-\,0,010 \sin(8g'-8g)$	$-\,0,039 \cos(8g'-8g)$
$-\,0,027 \sin(9g'-8g)$	$-\,0,034 \cos(9g'-8g)$

$$l(r') = +\,84'',533 + 0'',07360\,n't$$

$+\,\{-\,4,115 + 2,61893\,n't\} \cos g'$	$+\,\{8'',031 - 4'',23382\,n't\} \sin g'$
$+\,\{-\,0,065 + 0,07346\,n't\} \cos 2g'$	$+\,\{0,832 - 0,11880\,n't\} \sin 2g'$
$+\,0,00309\,n't \cos 3g'$	$-\,0,00501\,n't \sin 3g'$
$+\,0,00014\,n't \cos 4g'$	$-\,0,00024\,n't \sin 4g'$
$-\,1,045 \cos(-g)$	$-\,3,265 \sin(-g)$
$+\,32,384 \cos(g'-g)$	$-\,173,663 \sin(g'-g)$
$-\,113,766 \cos(2g'-g)$	$-\,6,872 \sin(2g'-g)$
$+\,9,377 \cos(3g'-g)$	$+\,6,665 \sin(3g'-g)$
$+\,0,277 \cos(4g'-g)$	$+\,0,130 \sin(4g'-g)$
$-\,0,289 \cos(g'-2g)$	$-\,2,612 \sin(g'-2g)$
$-\,27,547 \cos(2g'-2g)$	$-\,12,214 \sin(2g'-2g)$
$-\,15,485 \cos(3g'-2g)$	$-\,12,741 \sin(3g'-2g)$
$+\,36,591 \cos(4g'-2g)$	$+\,310,577 \sin(4g'-2g)$
$+\,23,752 \cos(5g'-2g)$	$-\,44,626 \sin(5g'-2g)$
$-\,0,539 \cos(6g'-2g)$	$-\,0,212 \sin(6g'-2g)$
$-\,0,258 \cos(2g'-3g)$	$-\,0,052 \sin(2g'-3g)$
$-\,4,110 \cos(3g'-3g)$	$+\,5,510 \sin(3g'-3g)$
$-\,4,332 \cos(4g'-3g)$	$+\,2,085 \sin(4g'-3g)$
$-\,2,742 \cos(5g'-3g)$	$-\,0,183 \sin(5g'-3g)$
$-\,2,296 \cos(6g'-3g)$	$-\,1,509 \sin(6g'-3g)$
$+\,0,504 \cos(7g'-3g)$	$+\,1,157 \sin(7g'-3g)$
$+\,1,358 \cos(4g'-4g)$	$+\,1,585 \sin(4g'-4g)$
$+\,0,358 \cos(5g'-4g)$	$+\,1,449 \sin(5g'-4g)$
$-\,0,175 \cos(6g'-4g)$	$+\,0,679 \sin(6g'-4g)$
$-\,0,216 \cos(7g'-4g)$	$+\,0,223 \sin(7g'-4g)$
$+\,0,852 \cos(9g'-4g)$	$+\,0,239 \sin(9g'-4g)$
$+\,0,646 \cos(5g'-5g)$	$-\,0,337 \sin(5g'-5g)$
$+\,0,565 \cos(6g'-5g)$	$-\,0,017 \sin(6g'-5g)$
$+\,0,238 \cos(7g'-5g)$	$+\,0,117 \sin(7g'-5g)$
$-\,0,084 \cos(6g'-6g)$	$-\,0,268 \sin(6g'-6g)$
$+\,0,043 \cos(7g'-6g)$	$-\,0,231 \sin(7g'-6g)$

$$p' = +\,1'',86804\,n't$$

$+\,0'',090 \sin g'$	$-\,0'',582 \cos g'$
$-\,0,280 \sin 2g'$	$+\,0,839 \cos 2g'$
$+\,0,008 \sin 3g'$	$+\,0,145 \cos 3g'$
$-\,0,051 \sin(-2g'-g)$	$-\,0,010 \cos(-2g'-g)$
$+\,1,168 \sin(-g'-g)$	$-\,0,605 \cos(-g'-g)$
$-\,0,111 \sin(-g)$	$-\,0,092 \cos(-g)$

Digitized by Google

	$+ 0'',504 \sin(g' - g)$	$+ 2'',192 \cos(g' - g)$
	$- 1,281 \sin(2g' - g)$	$- 0,223 \cos(2g' - g)$
	$- 2,080 \sin(3g' - g)$	$- 0,275 \cos(3g' - g)$
	$- 0,233 \sin(4g' - g)$	$+ 0,080 \cos(4g' - g)$
	$+ 0,082 \sin(- g' - 2g)$	$- 0,088 \cos(- g' - 2g)$
	$- 0,256 \sin(\quad - 2g)$	$- 0,286 \cos(\quad - 2g)$
	$- 0,024 \sin(g' - 2g)$	$+ 0,205 \cos(g' - 2g)$
	$+ 0,796 \sin(2g' - 2g)$	$- 0,327 \cos(2g' - 2g)$
	$+ 0,132 \sin(3g' - 2g)$	$- 0,355 \cos(3g' - 2g)$
	$+ 0,055 \sin(4g' - 2g)$	$+ 0,619 \cos(4g' - 2g)$
	$- 4,352 \sin(5g' - 2g)$	$- 7,180 \cos(5g' - 2g)$
	$+ 0,008 \sin(\quad - 3g)$	$- 0,015 \cos(\quad - 3g)$
	$+ 0,114 \sin(g' - 3g)$	$- 0,141 \cos(g' - 3g)$
	$- 0,014 \sin(2g' - 3g)$	$- 0,056 \cos(2g' - 3g)$
	$+ 0,203 \sin(3g' - 3g)$	$+ 0,294 \cos(3g' - 3g)$
	$+ 0,165 \sin(4g' - 3g)$	$+ 0,049 \cos(4g' - 3g)$
	$- 0,116 \sin(5g' - 3g)$	$+ 0,042 \cos(5g' - 3g)$
	$- 0,097 \sin(6g' - 3g)$	$+ 0,115 \cos(6g' - 3g)$
	$- 0,044 \sin(7g' - 3g)$	$+ 0,124 \cos(7g' - 3g)$
	$+ 0,085 \sin(2g' - 4g)$	$+ 0,039 \cos(2g' - 4g)$
	$+ 0,040 \sin(3g' - 4g)$	$- 0,010 \cos(3g' - 4g)$
	$- 0,108 \sin(4g' - 4g)$	$+ 0,115 \cos(4g' - 4g)$
	$- 0,012 \sin(5g' - 4g)$	$+ 0,090 \cos(5g' - 4g)$
	$- 0,020 \sin(6g' - 4g)$	$- 0,029 \cos(6g' - 4g)$
$q' = + 0'',02403\, n't$	$+ 0'',215 \sin g'$	$- 0'',293 \cos g'$
	$- 0,877 \sin 2g'$	$- 0,288 \cos 2g'$
	$- 0,148 \sin 3g'$	$+ 0,005 \cos 3g'$
	$- 0,011 \sin(- 2g' - g)$	$+ 0,050 \cos(- 2g' - g)$
	$- 0,602 \sin(- g' - g)$	$- 1,156 \cos(- g' - g)$
	$+ 0,485 \sin(\quad - g)$	$+ 0,119 \cos(\quad - g)$
	$- 3,789 \sin(g' - g)$	$+ 0,777 \cos(g' - g)$
	$- 0,541 \sin(2g' - g)$	$- 0,436 \cos(2g' - g)$
	$+ 0,294 \sin(3g' - g)$	$- 2,262 \cos(3g' - g)$
	$- 0,084 \sin(4g' - g)$	$- 0,240 \cos(4g' - g)$
	$- 0,089 \sin(- g' - 2g)$	$- 0,082 \cos(- g' - 2g)$
	$- 0,268 \sin(\quad - 2g)$	$+ 0,252 \cos(\quad - 2g)$
	$- 0,150 \sin(g' - 2g)$	$+ 0,117 \cos(g' - 2g)$
	$+ 0,161 \sin(2g' - 2g)$	$+ 0,346 \cos(2g' - 2g)$
	$+ 0,137 \sin(3g' - 2g)$	$+ 0,013 \cos(3g' - 2g)$
	$- 0,718 \sin(4g' - 2g)$	$+ 0,058 \cos(4g' - 2g)$
	$+ 7,582 \sin(5g' - 2g)$	$- 4,640 \cos(5g' - 2g)$
	$- 0,015 \sin(\quad - 3g)$	$- 0,008 \cos(\quad - 3g)$
	$- 0,159 \sin(g' - 3g)$	$- 0,112 \cos(g' - 3g)$
	$- 0,051 \sin(2g' - 3g)$	$+ 0,013 \cos(2g' - 3g)$
	$- 0,140 \sin(3g' - 3g)$	$+ 0,108 \cos(3g' - 3g)$
	$- 0,010 \sin(4g' - 3g)$	$+ 0,075 \cos(4g' - 3g)$
	$- 0,046 \sin(5g' - 3g)$	$- 0,152 \cos(5g' - 3g)$

$-\,0{,}099 \sin(6g'-3g)$	$-\,0{,}105 \cos(6g'-3g)$
$-\,0{,}130 \sin(7g'-3g)$	$-\,0{,}046 \cos(7g'-3g)$
$+\,0{,}040 \sin(2g'-4g)$	$-\,0{,}086 \cos(2g'-4g)$
$-\,0{,}007 \sin(3g'-4g)$	$-\,0{,}029 \cos(3g'-4g)$
$-\,0{,}065 \sin(4g'-4g)$	$-\,0{,}057 \cos(4g'-4g)$
$-\,0{,}045 \sin(5g'-4g)$	$-\,0{,}001 \cos(5g'-4g)$
$+\,0{,}046 \sin(6g'-4g)$	$-\,0{,}026 \cos(6g'-4g)$

Die Tafeln XV. bis XIX. incl. enthalten in Beziehung auf die Jupiterstörungen dasselbe, was die fünf vorhergehenden Tafeln für den Saturn gegeben haben. Ich kann mich also auf die dazu gehörigen Erläuterungen beziehen und die Störungen erster Ordnung des Jupiters, welche mit dem Factor $\frac{m'}{\mu}$ multiplicirt sind, gleich anführen.

$nz = nt$	$+\,\{1{,}667 + 1{,}01786\,nt\} \sin g$	$+\,\{1{,}694 - 1{,}13539\,nt\} \cos g$
	$+\,\{-0{,}007 + 0{,}01224\,nt\} \sin 2g$	$+\,\{0{,}035 - 0{,}01366\,nt\} \cos 2g$
	$+\,0{,}00029\,nt \sin 3g$	$-\,0{,}00033\,nt \cos 3g$
	$-\,0{,}012 \sin(-3g+g')$	$+\,0{,}025 \cos(-3g+g')$
	$-\,0{,}243 \sin(-2g+g')$	$+\,1{,}381 \cos(-2g+g')$
	$+\,15{,}579 \sin(-g+g')$	$+\,78{,}853 \cos(-g+g')$
	$-\,8{,}420 \sin g'$	$+\,4{,}356 \cos g'$
	$-\,0{,}265 \sin(g+g')$	$-\,0{,}074 \cos(g+g')$
	$+\,0{,}058 \sin(-4g+2g')$	$-\,0{,}042 \cos(-4g+2g')$
	$+\,2{,}460 \sin(-3g+2g')$	$-\,1{,}424 \cos(-3g+2g')$
	$+\,178{,}447 \sin(-2g+2g')$	$-\,77{,}738 \cos(-2g+2g')$
	$+\,123{,}080 \sin(-g+2g')$	$+\,3{,}977 \cos(-g+2g')$
	$-\,1{,}265 \sin 2g'$	$+\,1{,}273 \cos 2g'$
	$-\,0{,}022 \sin(g+2g')$	$+\,0{,}013 \cos(g+2g')$
	$+\,0{,}013 \sin(-5g+3g')$	$+\,0{,}004 \cos(-5g+3g')$
	$+\,0{,}358 \sin(-4g+3g')$	$+\,0{,}233 \cos(-4g+3g')$
	$+\,8{,}865 \sin(-3g+3g')$	$+\,13{,}674 \cos(-3g+3g')$
	$-\,49{,}721 \sin(-2g+3g')$	$+\,66{,}091 \cos(-2g+3g')$
	$+\,12{,}390 \sin(-g+3g')$	$-\,8{,}029 \cos(-g+3g')$
	$+\,0{,}074 \sin 3g'$	$-\,0{,}144 \cos 3g'$
	$+\,0{,}004 \sin(-6g+4g')$	$+\,0{,}004 \cos(-6g+4g')$
	$-\,0{,}039 \sin(-5g+4g')$	$+\,0{,}153 \cos(-5g+4g')$
	$-\,2{,}218 \sin(-4g+4g')$	$+\,2{,}786 \cos(-4g+4g')$
	$+\,13{,}736 \sin(-3g+4g')$	$+\,6{,}398 \cos(-3g+4g')$
	$-\,2{,}253 \sin(-2g+4g')$	$+\,16{,}397 \cos(-2g+4g')$
	$+\,0{,}080 \sin(-g+4g')$	$-\,0{,}320 \cos(-g+4g')$
	$-\,0{,}078 \sin(-6g+5g')$	$+\,0{,}003 \cos(-6g+5g')$
	$-\,1{,}001 \sin(-5g+5g')$	$-\,0{,}494 \cos(-5g+5g')$
	$-\,2{,}427 \sin(-4g+5g')$	$+\,2{,}752 \cos(-4g+5g')$
	$-\,154{,}495 \sin(-3g+5g')$	$+\,12{,}576 \cos(-3g+5g')$
	$+\,424{,}937 \sin(-2g+5g')$	$+\,989{,}498 \cos(-2g+5g')$
	$+\,0{,}276 \sin(-g+5g')$	$+\,0{,}384 \cos(-g+5g')$

Digitized by Google

$-0{,}^{\prime\prime}007 \sin(-7g+6g')$	$-0{,}^{\prime\prime}031 \cos(-7g+6g')$
$+0{,}091 \sin(-6g+6g')$	$-0{,}363 \cos(-6g+6g')$
$-0{,}809 \sin(-5g+6g')$	$+0{,}017 \cos(-5g+6g')$
$+0{,}430 \sin(-4g+6g')$	$+1{,}484 \cos(-4g+6g')$
$-1{,}746 \sin(-3g+6g')$	$+1{,}159 \cos(-3g+6g')$
$+0{,}106 \sin(-2g+6g')$	$+0{,}044 \cos(-2g+6g')$
$+0{,}140 \sin(-7g+7g')$	$+0{,}001 \cos(-7g+7g')$
$-0{,}068 \sin(-6g+7g')$	$-0{,}298 \cos(-6g+7g')$
$-0{,}333 \sin(-5g+7g')$	$+0{,}206 \cos(-5g+7g')$
$+1{,}109 \sin(-4g+7g')$	$+1{,}058 \cos(-4g+7g')$
$-0{,}686 \sin(-3g+7g')$	$+1{,}339 \cos(-3g+7g')$
$+0{,}011 \sin(-8g+8g')$	$+0{,}053 \cos(-8g+8g')$
$+0{,}113 \sin(-7g+8g')$	$-0{,}052 \cos(-7g+8g')$
$-0{,}098 \sin(-6g+8g')$	$-0{,}104 \cos(-6g+8g')$
$-0{,}099 \sin(-5g+8g')$	$+0{,}150 \cos(-5g+8g')$
$-0{,}413 \sin(-4g+8g')$	$-0{,}109 \cos(-4g+8g')$
$+0{,}019 \sin(-3g+8g')$	$+0{,}092 \cos(-3g+8g')$
$+0{,}031 \sin(-8g+9g')$	$+0{,}046 \cos(-8g+9g')$
$+0{,}035 \sin(-7g+9g')$	$-0{,}050 \cos(-7g+9g')$
$-0{,}054 \sin(-6g+9g')$	$-0{,}021 \cos(-6g+9g')$
$-0{,}004 \sin(-5g+9g')$	$+0{,}103 \cos(-5g+9g')$
$-0{,}088 \sin(-4g+9g')$	$+0{,}018 \cos(-4g+9g')$
$-0{,}024 \sin(-6g+10g')$	$+0{,}004 \cos(-6g+10g')$
$-0{,}192 \sin(-5g+10g')$	$-0{,}381 \cos(-5g+10g')$
$-1{,}037 \sin(-4g+10g')$	$+1{,}059 \cos(-4g+10g')$

$$l(r) = -2{,}^{\prime\prime}377 - 0{,}^{\prime\prime}01225\,nt$$

$+\{-0{,}245 - 0{,}50893\,nt\} \cos g$	$+\{0{,}^{\prime\prime}423 - 0{,}^{\prime\prime}56770\,nt\} \sin g$
$-0{,}01224\,nt \cos 2g$	$-0{,}01366\,nt \sin 2g$
$-0{,}00044\,nt \cos 3g$	$-0{,}00050\,nt \sin 3g$
$-0{,}116 \cos(-2g+g')$	$-1{,}038 \sin(-2g+g')$
$+5{,}054 \cos(-g+g')$	$-25{,}577 \sin(-g+g')$
$+1{,}777 \cos g'$	$+0{,}479 \sin g'$
$+0{,}185 \cos(g+g')$	$-0{,}041 \sin(g+g')$
$+2{,}631 \cos(-3g+2g')$	$+1{,}411 \sin(-3g+2g')$
$+100{,}313 \cos(-2g+2g')$	$+43{,}698 \sin(-2g+2g')$
$+18{,}119 \cos(-g+2g')$	$+1{,}077 \sin(-g+2g')$
$+0{,}576 \cos 2g'$	$+0{,}501 \sin 2g'$
$+0{,}367 \cos(-4g+3g')$	$-0{,}290 \sin(-4g+3g')$
$+6{,}130 \cos(-3g+3g')$	$-9{,}745 \sin(-3g+3g')$
$-20{,}708 \cos(-2g+3g')$	$-28{,}325 \sin(-2g+3g')$
$-2{,}209 \cos(-g+3g')$	$-1{,}601 \sin(-g+3g')$
$-0{,}058 \cos(-5g+4g')$	$-0{,}163 \sin(-5g+4g')$
$-1{,}680 \cos(-4g+4g')$	$-2{,}242 \sin(-4g+4g')$
$+8{,}347 \cos(-3g+4g')$	$-4{,}060 \sin(-3g+4g')$
$-0{,}239 \cos(-2g+4g')$	$-3{,}993 \sin(-2g+4g')$
$-0{,}048 \cos(-g+4g')$	$-0{,}149 \sin(-g+4g')$
$-0{,}888 \cos(-5g+5g')$	$+0{,}388 \sin(-5g+5g')$

Digitized by Google

	$-\;2{,}''304\cos(-4g+5g')$	$-\;2{,}''036\sin(-4g+5g')$
	$-\;76{,}555\cos(-3g+5g')$	$-\;6{,}316\sin(-3g+5g')$
	$-\;5{,}629\cos(-2g+5g')$	$+\;8{,}730\sin(-2g+5g')$
	$-\;0{,}139\cos(-\;g+5g')$	$+\;0{,}190\sin(-\;g+5g')$
	$+\;0{,}071\cos(-6g+6g')$	$+\;0{,}323\sin(-6g+6g')$
	$-\;0{,}649\cos(-5g+6g')$	$-\;0{,}004\sin(-5g+6g')$
	$+\;0{,}242\cos(-4g+6g')$	$-\;0{,}979\sin(-4g+6g')$
	$-\;0{,}568\cos(-3g+6g')$	$-\;0{,}432\sin(-3g+6g')$
	$-\;0{,}055\cos(-6g+7g')$	$+\;0{,}254\sin(-6g+7g')$
	$-\;0{,}253\cos(-5g+7g')$	$-\;0{,}146\sin(-5g+7g')$
	$+\;0{,}605\cos(-4g+7g')$	$-\;0{,}597\sin(-4g+7g')$
	$-\;0{,}053\cos(-3g+7g')$	$-\;0{,}174\sin(-3g+7g')$
	$-\;0{,}175\cos(-4g+8g')$	$+\;0{,}039\sin(-4g+8g')$
	$-\;0{,}096\cos(-5g+10g')$	$+\;0{,}187\sin(-5g+10g')$
$p=+0{,}''31024\,nt$	$-\;0{,}''062\sin g$	$+\;0{,}''012\cos g$
	$+\;0{,}100\sin 2g$	$-\;0{,}115\cos 2g$
	$-\;0{,}003\sin 3g$	$-\;0{,}006\cos 3g$
	$+\;0{,}047\sin(-3g+g')$	$-\;0{,}061\cos(-3g+g')$
	$-\;0{,}024\sin(-2g+g')$	$+\;0{,}018\cos(-2g+g')$
	$-\;0{,}136\sin(-\;g+g')$	$-\;0{,}709\cos(-\;g+g')$
	$+\;0{,}074\sin g'$	$-\;0{,}190\cos g'$
	$+\;0{,}137\sin(\;g+g')$	$+\;0{,}080\cos(\;g+g')$
	$+\;0{,}006\sin(2g+g')$	$-\;0{,}015\cos(2g+g')$
	$+\;0{,}035\sin(-4g+2g')$	$+\;0{,}016\cos(-4g+2g')$
	$-\;0{,}006\sin(-3g+2g')$	$-\;0{,}023\cos(-3g+2g')$
	$+\;0{,}328\sin(-2g+2g')$	$-\;0{,}137\cos(-2g+2g')$
	$-\;0{,}541\sin(-\;g+2g')$	$-\;0{,}150\cos(-\;g+2g')$
	$-\;0{,}113\sin 2g'$	$+\;0{,}349\cos 2g'$
	$+\;0{,}027\sin(g+2g')$	$-\;0{,}002\cos(g+2g')$
	$+\;0{,}017\sin(-4g+3g')$	$-\;0{,}004\cos(-4g+3g')$
	$+\;0{,}084\sin(-3g+3g')$	$+\;0{,}121\cos(-3g+3g')$
	$+\;0{,}054\sin(-2g+3g')$	$-\;0{,}146\cos(-2g+3g')$
	$-\;0{,}858\sin(-\;g+3g')$	$-\;0{,}117\cos(-\;g+3g')$
	$+\;0{,}003\sin 3g'$	$+\;0{,}060\cos 3g'$
	$-\;0{,}044\sin(-4g+4g')$	$+\;0{,}048\cos(-4g+4g')$
	$+\;0{,}068\sin(-3g+4g')$	$+\;0{,}020\cos(-3g+4g')$
	$+\;0{,}023\sin(-2g+4g')$	$+\;0{,}255\cos(-2g+4g')$
	$-\;0{,}096\sin(-\;g+4g')$	$+\;0{,}034\cos(-\;g+4g')$
	$-\;0{,}005\sin(-4g+5g')$	$+\;0{,}037\cos(-4g+5g')$
	$-\;0{,}048\sin(-3g+5g')$	$+\;0{,}017\cos(-3g+5g')$
	$-\;1{,}794\sin(-2g+5g')$	$-\;2{,}960\cos(-2g+5g')$
	$-\;0{,}008\sin(-4g+6g')$	$-\;0{,}012\cos(-4g+6g')$
	$-\;0{,}040\sin(-3g+6g')$	$+\;0{,}048\cos(-3g+6g')$
	$-\;0{,}018\sin(-3g+7g')$	$+\;0{,}051\cos(-3g+7g')$
$q=+0{,}''00346\,nt$	$-\;0{,}''052\sin g$	$-\;0{,}''018\cos g$
	$+\;0{,}117\sin 2g$	$+\;0{,}101\cos 2g$

Digitized by Google

$+0{,}''006 \sin 3g$	$-0{,}''003 \cos 3g$
$-0{,}062 \sin(-3g+g')$	$-0{,}047 \cos(-3g+g')$
$+0{,}007 \sin(-2g+g')$	$+0{,}038 \cos(-2g+g')$
$-0{,}040 \sin(-g+g')$	$-0{,}004 \cos(-g+g')$
$+0{,}022 \sin g'$	$-0{,}080 \cos g'$
$-0{,}082 \sin(g+g')$	$+0{,}143 \cos(g+g')$
$+0{,}016 \sin(2g+g')$	$+0{,}006 \cos(2g+g')$
$+0{,}017 \sin(-4g+2g')$	$-0{,}035 \cos(-4g+2g')$
$-0{,}027 \sin(-3g+2g')$	$+0{,}002 \cos(-3g+2g')$
$-0{,}052 \sin(-2g+2g')$	$-0{,}134 \cos(-2g+2g')$
$-0{,}100 \sin(-g+2g')$	$+0{,}078 \cos(-g+2g')$
$-0{,}365 \sin 2g'$	$-0{,}112 \cos 2g'$
$+0{,}002 \sin(g+2g')$	$+0{,}027 \cos(g+2g')$
$-0{,}002 \sin(-4g+3g')$	$-0{,}018 \cos(-4g+3g')$
$+0{,}052 \sin(-3g+3g')$	$-0{,}036 \cos(-3g+3g')$
$-0{,}038 \sin(-2g+3g')$	$-0{,}038 \cos(-2g+3g')$
$+0{,}091 \sin(-g+3g')$	$-0{,}973 \cos(-g+3g')$
$-0{,}061 \sin 3g'$	$+0{,}002 \cos 3g'$
$+0{,}021 \sin(-4g+4g')$	$+0{,}019 \cos(-4g+4g')$
$+0{,}013 \sin(-3g+4g')$	$-0{,}022 \cos(-3g+4g')$
$-0{,}332 \sin(-2g+4g')$	$+0{,}033 \cos(-2g+4g')$
$-0{,}037 \sin(-g+4g')$	$-0{,}100 \cos(-g+4g')$
$+0{,}012 \sin(-4g+5g')$	$+0{,}004 \cos(-4g+5g')$
$-0{,}025 \sin(-3g+5g')$	$-0{,}078 \cos(-3g+5g')$
$+3{,}220 \sin(-2g+5g')$	$-2{,}036 \cos(-2g+5g')$
$+0{,}028 \sin(-4g+6g')$	$-0{,}016 \cos(-4g+6g')$
$-0{,}045 \sin(-3g+6g')$	$-0{,}045 \cos(-3g+6g')$
$-0{,}056 \sin(-3g+7g')$	$-0{,}019 \cos(-3g+7g')$

Die Tafel XX. endlich zeigt die Controlle, die im Artikel 9. entwickelt ist. Sie giebt der Ordnung nach die beiden Glieder einer jeden der Gleichungen (31), deren Summe Null sein muſs. Die Columnen, deren Überschrift es anzeigt, geben die übrig gebliebenen Fehler; ich habe in diesen, um Raum zu gewinnen, 0,″001 zur Einheit angenommen. Hier ist zu bemerken, daſs das constante Glied in S und S′ der Bedingungsgleichung nicht Genüge leisten kann, denn dieses ist bloſs eine Folge davon, daſs wir in den vorhergehenden Störungsformeln $n\,(1-c)$ statt n substituirt haben und mit diesem $n\,(1-c)$, das ist mit dem Werthe von n, welcher sich aus den Beobachtungen ergiebt, die groſse Halbachse gerechnet haben. Dieses constante Glied ist aber gerade dieses Umstandes wegen für die Berechnung der Störungen der zweiten Ordnung wesentlich nothwendig.

Digitized by Google

17.

Wir kommen nun zu der Berechnung der Störungen der zweiten Ordnung in Beziehung auf die Massen, und müssen zu dem Ende die Gleichung (1) wieder vornehmen. Da man, um in aller Strenge bei der Integration derselben die Gröſsen τ und t als alleinige veränderliche Gröſsen ansehen zu können, die wahren Werthe der in der rechten Seite vorkommenden Gröſsen substituiren muſs, so ist jetzt, nachdem wir die rein elliptischen Werthe substituirt haben, um uns den wahren Werthen der Störungen mehr zu nähern, nothwendig die Vermehrungen, welche die rein elliptischen Werthe durch die eben berechneten Störungen der ersten Ordnung bekommen haben, in die Gleichung (1) zu substituiren. Es ist klar, daſs durch diese Substitution nur Störungen erzeugt werden können, welche mit den Quadraten und Producten zweier Dimensionen der Massen multiplicirt sind. Die Berechnung dieser nenne ich die zweite Approximation.

Es bieten sich uns sogleich zwei verschiedene Wege dar, die zweite Approximation auszuführen. Wir können durch die im Art. 13. vorgetragene Methode die nöthigen Differentialquotienten der Gröſse Ω jetzt wieder entwickeln, wenn wir nur die speciellen rein elliptischen Werthe der darin vorkommenden Gröſsen, um die den Werthen $g = 0$, $g = \frac{2\pi}{n}$ etc. $g' = 0$, $g' = \frac{2\pi}{n}$ etc. etc. correspondirenden Werthe der Störungen vermehren; da aber, wenn h störende Planeten vorhanden sind, die Störungen eines jeden Planeten von $h + 1$ veränderlichen Gröſsen abhängen, so werden die Differentialquotienten von Ω, welche in der ersten Approximation Functionen von zwei veränderlichen Gröſsen waren, jetzt Functionen von $h + 1$ veränderlichen Gröſsen sein, wodurch die Arbeit ungemein vermehrt wird. Hiezu kommt überdies noch, daſs man, um die Glieder der ersten Approximation zu berücksichtigen, die mit t multiplicirt sind, die ganze Rechnung mit zwei verschiedenen Werthen von t, also doppelt ausführen muſs. Die Factoren der Differentialquotienten von Ω könnte man durch dieselbe Methode bestimmen, ja man braucht nur jeden speciellen Werth des Factors mit dem correspondirenden des Differentialquotienten von Ω zu multipliciren,

Digitized by Google

um sogleich die ganze rechte Seite der Gleichung (1) entwickelt zu bekommen. Man sieht leicht, daſs man durch diese Rechnung die Störungen der zweiten Ordnung nicht von denen der ersten Ordnung abgesondert, sondern mit ihnen vereinigt bekommt; wenn man also diese in der That äuſserst lange Rechnung durchgeführt hat, so ist die erwünschte Genauigkeit doch nicht erreicht, wenn, wie immer zu vermuthen ist, die Beobachtungen eine Änderung in den zum Grunde gelegten Massen verlangen.

Auf weit kürzerem Wege kann man durch das auf mehrere veränderliche Gröſsen ausgedehnte Taylorsche Theorem jede verlangte Genauigkeit erlangen. Dieses Theorem ist es in der That, welches immer den Astronomen gedient hat, um nach der Theorie der Veränderung der willkührlichen Constanten die Störungen, welche von den Quadraten und Producten der Massen abhängen, zu berechnen, aber man hat die Rechnung immer nur mit vielen Vernachlässigungen für gewisse Argumente und bis zu einer gewissen Ordnung in Beziehung auf die Excentricitäten und Neigungen geführt. Ich werde im Folgenden zeigen, daſs nach unserer Methode diese Einschränkungen keinesweges nöthig sind und daſs man, ohne das Mindeste zu vernachlässigen, bis auf eine beliebige numerische Gröſse genau alle Störungen der zweiten und selbst der höheren Ordnungen vermittelst dieses Theorems berechnen kann. Es verursacht ferner gar keine Vermehrung der Arbeit, die mit verschiedenen Massen multiplicirten Störungen von einander abzusondern, wodurch man in der Folge, wenn die Beobachtungen Änderungen in den zum Grunde gelegten Massen verlangen, die Störungen leicht so abändern kann, als wären sie ursprünglich mit den berichtigten Massen berechnet. Diesen letztgenannten Punkt halte ich bei der Auflösung der uns beschäftigenden Aufgabe für unerläſslich nothwendig, wenn sie nicht bloſs vorübergehenden, sondern bleibenden wissenschaftlichen Werth haben soll, denn die Werthe der Massen können wir erst mit der erforderlichen Genauigkeit in Erfahrung bringen, wenn die Störungen berechnet sind.

Bei Anwendung der zuerst genannten Methode kann man nichts Weiteres thun als alle Störungen der ersten Ordnung, die man gefunden

Digitized by Google

hat, bei der zweiten Approximation anwenden; bei der zuletzt genannten Methode kann man dasselbe, und zwar mit weit weniger Arbeit thun, man hat den Einfluſs eines jeden Coëfficienten vor Augen und kann den kleineren, wenn er ein merkliches Resultat geben wird, berücksichtigen, so wie den gröſseren, wenn er Unmerkliches hervorbringt, übergehen. Die sichere Lösung dieses Punktes liegt einzig und allein in einer zweckmäſsigen Anordnung der numerischen Rechnung, und die Genauigkeit, welche man alsdann erhält, beruht nur auf der Genauigkeit der dieser Rechnung zur Grundlage dienenden Gröſsen, das ist der Störungen der ersten Ordnung und der Hülfsgröſsen, welche auſserdem gebraucht werden. Wir haben aber die Genauigkeit der Störungen der ersten Ordnung nicht nach den Potenzen und Producten der Excentricitäten und Neigungen, welches unsicher ist, abgemessen, sondern nach einer festgesetzten numerischen Gröſse, und werden bei den noch zu berechnenden Hülfsgröſsen dasselbe thun.

18.

Wir wollen nun die Gleichung (1) in dem ausgedehntesten Sinne nehmen, nemlich sie als für eine beliebige Anzahl störender Planeten geltend ansehen, deren Störungen erster Ordnung nach den in dieser Abhandlung gegebenen Regeln berechnet seien. Da die rechte Seite dieser Gleichung von der ersten Ordnung in Beziehung auf die Massen ist, so brauchen wir, um die Glieder der zweiten Ordnung zu finden, nur das erste Glied des Taylorschen Theorems. Sei nun wie früher:

$$\frac{d\cdot\frac{\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)}{\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)}}{d\tau} = T$$

und dieses T werde in zwei Theile zerlegt, nemlich:

$$T = T_1 + T_2$$

wo T_1 die Gröſsen erster und T_2 die Gröſsen zweiter Ordnung enthalten soll. Wir können nun T als eine Function der Gröſsen λ, ν, ν',

Digitized by Google

v'' etc. ϱ, r, r', r'' etc. P, Q, $P_{,,}$ $Q_{,}$, $P_{,,}$, $Q_{,,}$ etc. $\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}$ und $\frac{1}{a(1-e^2)}$ anſehen. Hier wie im Folgenden verſtehe ich unter $P_{,}$ und $Q_{,}$ zwei Gröſsen, die von der Lage der Planetenbahn m'' zu der Planetenbahn m eben ſo abhängen als P und Q von der Lage der Bahn m' zu der Bahn m, und eben ſo für die folgenden ähnlichen Gröſsen. Aber um den wahren Werth irgend einer Function von λ, v, v' etc. und von ϱ, r, r' etc., die die Elemente übrigens nicht enthält, zu bekommen, müſsen wir allenthalben ſtatt $n\tau$, nt, $n't$ etc. reſp. $n\zeta$, nz, $n'z'$ etc. ſubſtituiren und $l\varrho$, lr, lr' etc. reſp. um $l(\varrho)$, $l(r)$, $l(r')$ etc. vermehren. Setzen wir alſo, wie es im Vorigen bereits auch geſchehen iſt:

$$n\zeta - n\tau = n(\zeta) \quad , \quad nz - nt = n(z) \quad , \quad n'z' - n't = n'(z')$$

ſo müſſen wir in T, in ſo fern dieſe Gröſse Function von λ, v, v' etc. und von ϱ, r, r' etc. iſt, $n\tau$, nt, $n't$ etc. reſp. um $n(\zeta)$, $n(z)$, $n'(z')$ etc. und $l\varrho$, lr, lr' etc. reſp. um $l(\varrho)$, $l(r)$, $l(r')$ etc. vermehren und auſserdem noch die Vermehrungen der übrigen oben genannten Gröſsen berückſichtigen. Da nun $d.n\tau = d\gamma$, $d.nt = dg$ etc. iſt, ſo haben wir nach dem Taylorſchen Theorem:

$$\left.\begin{aligned} T_2 = \frac{dT_1}{d\gamma}\,n(\zeta) + \frac{dT_1}{dg}\,n(z) + \frac{dT_1}{dg'}\,n'(z') + \text{etc.} \\ + \frac{dT_1}{dl\varrho}\,l(\varrho) + \frac{dT_1}{dlr}\,l(r) + \frac{dT_1}{dlr'}\,l(r') + \text{etc.} \\ + \frac{dT_1}{dP}\,\delta P + \frac{dT_1}{dQ}\,\delta Q + \text{etc.} \\ + \frac{dT_1}{d.l.\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}}\,\delta.l.\frac{an}{\sqrt{1-e^2}} + \frac{dT_1}{d.l.\frac{1}{a(1-e^2)}}\,\delta.l.\frac{1}{a(1-e^2)} \end{aligned}\right\}\ldots(39)$$

Wenn man den Theil der Differentialquotienten $\frac{dT_1}{dlr}$, $\frac{dT_1}{dlr'}$ etc., welcher aus der Differentiation von Ω entſteht, V, V, etc. nennt, ſo iſt zufolge der Gleichung (1):

$$\left.\begin{aligned} \text{V} = \left\{2\,\frac{\varrho}{r}\cos(v-\lambda) - 1 + 2\,\frac{\varrho}{a(1-e^2)}\,[\cos(v-\lambda) - 1]\right\}\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\,r\left(\frac{d^2\Omega}{dv\,dr}\right) \\ + 2\,\frac{\varrho}{r}\sin(v-\lambda)\,\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left\{r^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right) + r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\right\} \end{aligned}\right\}\ldots(40)$$

Digitized by Google

(40)..
$$\begin{cases} V_, = \left\{ 2\,\frac{\varrho}{r}\cos(v-\lambda) - 1 + 2\,\frac{\varrho}{a(1-e^2)}\left[\cos(v-\lambda)-1\right]\right\} \frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\, r' \left(\frac{d^2\Omega}{dv\,dr'}\right) \\ \qquad + 2\,\frac{\varrho}{r}\sin(v-\lambda)\,\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\, rr' \left(\frac{d^2\Omega}{dr\,dr'}\right) \\ V_{,,} = \text{etc.} \end{cases}$$

Aber bekanntlich ist

$$-\Omega = r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) + r'\left(\frac{d\Omega}{dr'}\right) + r''\left(\frac{d\Omega}{dr''}\right) + \text{etc.}$$

Hieraus bekommt man, wenn man nach v differentiirt:

$$-\left(\frac{d\Omega}{dv}\right) = r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,dv}\right) + r'\left(\frac{d^2\Omega}{dr'dv}\right) + r''\left(\frac{d^2\Omega}{dr''dv}\right) + \text{etc.}$$

und wenn man nach r differentiirt und darauf mit r multiplicirt:

$$-r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = \left\{r^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right) + r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\right\} + r'\left(\frac{d^2\Omega}{dr dr'}\right) + r''\left(\frac{d^2\Omega}{dr dr''}\right) + \text{etc.}$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit (40) zeigen, daſs

(40*)... $$-T = V + V_, + V_{,,} + \text{etc.}$$

und hieraus folgt, daſs wir die Gröſsen V, $V_,$, $V_{,,}$ etc., welche uns als Hülfsgröſsen dienen, nur bis auf eine zu berechnen brauchen, oder vielmehr daſs man nur Eine derselben, nemlich V zu berechnen braucht, um durch Hülfe der vorstehenden Gleichung die übrigen zu bekommen. Denn T ist von der Form

$$T = \alpha\,\frac{m'}{\mu} + \beta\,\frac{m''}{\mu} + \text{etc.}$$

und V von der Form

$$V = \alpha'\,\frac{m'}{\mu} + \beta'\,\frac{m''}{\mu} + \text{etc.}$$

wo α und α' periodische Functionen von γ, g und g', β und β' periodische Functionen von γ, g und g'' sind etc. Die obige Gleichung giebt also:

$$V_, + V_{,,} + \text{etc.} = -(\alpha+\alpha')\,\frac{m'}{\mu} - (\beta+\beta')\,\frac{m''}{\mu} - \text{etc.}$$

da aber $V_,$ nur mit m', $V_{,,}$ nur mit m'' multiplicirt sein kann etc., so ist sogleich:

Digitized by Google

$$V_{,} = -(\alpha+\alpha')\frac{m'}{\mu} \quad , \quad V_{,,} = -(\beta+\beta')\frac{m''}{\mu} \quad , \quad V_{,,,} = \text{etc.}$$

Sei nun noch

$$U = 2n\frac{\varrho}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\cos(v-\lambda) - 1\right]\left(\frac{d\Omega}{dv}\right) \qquad \text{....(41)}$$

so ergiebt sich durch die vollständige Differentiation der Gleichung (1), und wenn wir bedenken, daſs im Vorigen

$$S = \int \frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)dt$$

gesetzt wurde:

$$\frac{dT_{,}}{dl\varrho} = T_{,} + \frac{dS}{dt}$$

$$\frac{dT_{,}}{dlr} = -T_{,} + U - \frac{dS}{dt} + V$$

$$\frac{dT_{,}}{dlr'} = V_{,} \quad , \quad \frac{dT_{,}}{dlr''} = V_{,,} \quad , \quad \text{etc.}$$

$$\frac{dT_{,}}{d.l.\frac{1}{a(1-e^2)}} = U$$

$$\frac{dT_{,}}{d.l.\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}} = T_{,}$$

Ferner haben wir, wenn wir bedenken, daſs nach dem Art. 10. für die erste Approximation

$$\left(\frac{d\Omega}{dP}\right) = \left(\frac{d\Omega}{d\Theta}\right)\frac{1}{\sin I}$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dQ}\right) = \left(\frac{d\Omega}{dI}\right)\frac{1}{\cos I}$$

und eben so

$$\left(\frac{d\Omega}{dP_{,}}\right) = \left(\frac{d\Omega}{d\Theta_{,}}\right)\frac{1}{\sin I_{,}}$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dQ_{,}}\right) = \left(\frac{d\Omega}{dI_{,}}\right)\frac{1}{\cos I_{,}}$$

etc.

etc.

woraus man erhält:

$$\left(\frac{d^2\Omega}{dv\,dP}\right)=\left(\frac{d^2\Omega}{dv\,d\Theta}\right)\frac{1}{\sin \mathrm{I}}\quad;\quad r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,dP}\right)=r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,d\Theta}\right)\frac{1}{\sin \mathrm{I}}$$

$$\left(\frac{d^2\Omega}{dv\,dQ}\right)=\left(\frac{d^2\Omega}{dv\,d\mathrm{I}}\right)\frac{1}{\cos \mathrm{I}}\quad;\quad r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,dQ}\right)=r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,d\mathrm{I}}\right)\frac{1}{\cos \mathrm{I}}$$

$$\left(\frac{d^2\Omega}{dv\,dP_{,}}\right)=\left(\frac{d^2\Omega}{dv\,d\Theta_{,}}\right)\frac{1}{\sin \mathrm{I}_{,}}\quad;\quad r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,dP_{,}}\right)=r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,d\Theta_{,}}\right)\frac{1}{\sin \mathrm{I}_{,}}$$

$$\left(\frac{d^2\Omega}{dv\,dQ_{,}}\right)=\left(\frac{d^2\Omega}{dv\,d\mathrm{I}_{,}}\right)\frac{1}{\cos \mathrm{I}_{,}}\quad;\quad r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,dQ_{,}}\right)=r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,d\mathrm{I}_{,}}\right)\frac{1}{\cos \mathrm{I}_{,}}$$

etc. etc.

etc. etc.

die Differentialquotienten nach P und Q etc. folgendermaaſsen:

$$\left(\frac{dT_1}{dP}\right)=\left\{2\frac{\varrho}{r}\cos(v-\lambda)-1+2\frac{\varrho}{a(1-e^2)}[\cos(v-\lambda)-1]\right\}\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d^2\Omega}{dv\,d\Theta}\right)\frac{1}{\sin \mathrm{I}}$$
$$+2\frac{\varrho}{r}\sin(v-\lambda)\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\,r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,d\Theta}\right)\frac{1}{\sin \mathrm{I}}$$

$$\left(\frac{dT_1}{dQ}\right)=\left\{2\frac{\varrho}{r}\cos(v-\lambda)-1+2\frac{\varrho}{a(1-e^2)}[\cos(v-\lambda)-1]\right\}\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d^2\Omega}{dv\,d\mathrm{I}}\right)\frac{1}{\cos \mathrm{I}}$$
$$+2\frac{\varrho}{r}\sin(v-\lambda)\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\,r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,d\mathrm{I}}\right)\frac{1}{\cos \mathrm{I}}$$

$$\left(\frac{dT_1}{dP_{,}}\right)=\text{etc.}\quad;\quad\left(\frac{dT_1}{dQ_{,}}\right)=\text{etc. etc. etc.}$$

19.

Um δP und δQ zu finden, müssen wir uns der Gleichungen (H. 22.) oder deren Reihenentwickelung bedienen. Da aber die dort vorkommenden p', q', p und q von den in dieser Abhandlung auf gleiche Weise bezeichneten verschieden sind, so wollen wir hier für jene andere Zeichen einführen, nemlich für P, Q, p', q', p und q resp. X, Y, x', y', x und y schreiben. Die genannten Gleichungen geben demnach bis auf Gröſsen erster Ordnung incl.:

$$\mathrm{X}=x'-x$$
$$\mathrm{Y}=y'-y$$

Wir müssen uns jetzt erinnern, daſs, wie überall in dieser Abhandlung, p' und q' die Lage der Planetenbahn m', welche zu jeder

Digitized by Google

beliebigen Zeit t statt findet, gegen die Lage derselben Bahn, welche zur gewählten Zeitepoche statt fand, bestimmen, und daſs sie ihren Anfangspunkt im aufſteigenden Knoten der Planetenbahn m auf der Bahn m' haben. Daſs ferner gleicherweise p und q die jeder beliebigen Zeit t entsprechende Lage der Bahn m gegen die Lage derselben Bahn bestimmen, welche zur gewählten Zeitepoche statt fand, und daſs sie ihren Anfangspunkt im aufſteigenden Knoten der Bahn m' auf der Bahn m, also 180° entfernt von jenen haben. Dahingegen beziehen sich in den Gleichungen (H. 22.) oder in den vorstehenden Abkürzungen derselben x', y', x und y auf eine und dieselbe, übrigens willkührliche dritte Ebene, und X und Y beziehen die Ebene, welcher x' und y' zukommt, auf gleiche Weise auf die Ebene, welcher x und y angehört, wie diese beiden Ebenen resp. durch $x'y'$ und xy auf die dritte Ebene bezogen sind. Auch sind alle diese sechs Gröſsen von einem und demselben, übrigens willkührlichen Anfangspunkte gezählt.

Um nun erstlich p' und q' als von demselben Anfangspunkte wie p und q ausgehend zu betrachten, ist nichts weiter nöthig als dafür resp. $-p'$ und $-q'$ zu schreiben. Um sie zweitens auf eine und dieselbe Ebene wie p und q, das ist auf die Bahn des Planeten m, welche zur gewählten Zeitepoche statt fand, hinzuführen, müssen wir für einen Augenblick die Bahn des Planeten m', welche zur Zeitepoche statt fand, als obige dritte Ebene annehmen. Hieraus ergiebt sich gleich, daſs $-p'$ und $-q'$ resp. mit x' und y' correspondiren. Weil nun in der gewählten Zeitepoche (P) und (Q) die Lage der Bahn m' gegen die Lage der Bahn m, also $-(P)$ und $-(Q)$ mit unverändertem Anfangspunkte die Lage der Bahn m gegen die Lage der Bahn m' bestimmen (*), so correspondiren $-(P)$ und $-(Q)$ resp. mit x und y. Nennen wir also statt X und Y die beiden Gröſsen, welche die für jede beliebige Zeit t

(*) Man muſs nemlich für den Zweck in den abgekürzten Ausdrücken für P und Q, den Bogen Θ', das ist den aufſteigenden Knoten der Bahn m auf der Bahn m' für Θ substituiren und dann Θ abziehen. Es wird, so zu sagen, der Endpunkt und nicht der Anfangspunkt dadurch um 180° verändert, woraus folgt, daſs P und Q in $-P$ und $-Q$ übergehen. (Die Bemerkung bezieht sich eigentlich nur auf (Q), weil $(P) = 0$ ist.)

Digitized by Google

statt findende Lage der Bahn m' gegen die zur Zeitepoche statt findende Lage der Bahn m bestimmen, h und k, so erhalten wir aus

$$X = x' - x$$
$$Y = y' - y$$

die folgenden Gleichungen:

$$h = -p' + (P)$$
$$k = -q' + (Q)$$

Um von hier aus zu den Gröſsen P und Q überzugehen, wodurch die gegenseitige Lage der Bahnen m' und m zur beliebigen Zeit t bestimmt wird, dienen die mehrmals angeführten Gleichungen unmittelbar, wenn wir P und Q resp. für X und Y, h und k resp. für x' und y', so wie p und q resp. für x und y schreiben. Also

$$P = \quad - p' - p$$
$$Q = (Q) - q' - q$$

weil $(P) = 0$ ist.

Ich bemerke, daſs die Gleichungen (H. 22.) allerdings mehrere Glieder der ersten Ordnung in Beziehung auf die Massen geben, allein die hier weggelassenen sind zugleich mit den Quadraten und Producten von (P) und (Q) multiplicirt und können daher, wenn die gegenseitige Neigung so klein ist wie bei dem Jupiter und Saturn, unbedenklich als Gröſsen einer höheren Ordnung angesehen werden. Bei andern Planeten, wo es nothwendig sein möchte, ist es ein Leichtes sie hinzuzufügen. Da wir nun bei der ersten Approximation (P) und (Q) zum Grunde gelegt haben, so ist

$$\delta P = - (p' + p)$$
$$\delta Q = - (q' + q)$$

und eben so bekommen wir

$$\delta P_{,} = - (p'' + p)$$
$$\delta Q_{,} = - (q'' + q)$$
etc.

Digitized by Google

ich bemerke zum Überfluſs, daſs hier wie in allen allgemeinen Formeln die unaccentuirten Gröſsen sich immer auf den Planeten m, dessen Störungen wir untersuchen, beziehen.

Nach (H. Art. 13.) haben wir ferner:

$$\delta . l . \frac{an}{\sqrt{1-e^2}} = - \; \mathrm{S}$$

$$\delta . l . \frac{1}{a(1-e^2)} = -2\mathrm{S}$$

und die Gröſse S ergiebt sich durch die Gleichung (30). Man muſs bei der Anwendung dieser den vollständigen Werth von $l(r)$ substituiren, nemlich den Werth aus (28) mit Inbegriff der dieser Gleichung zugefügten Constante, denn auſserdem wäre das Glied, welches wir der Gleichung (18), nemlich $-cn\tau$, hinzugefügt haben, nicht vollständig berücksichtigt. In den Tafeln XIV und XIX. ist schon hierauf Rücksicht genommen, oder mit andern Worten, die Columnen, welche S′ und S geben, sind streng nach der Gleichung (30) berechnet. Die Gleichung (30) giebt uns noch:

$$l(\varrho) = \frac{1}{2}\,\mathrm{S} - \frac{1}{2}\left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right)$$

Wenn wir nun die Werthe der verschiedenen Theile der Gleichung (39), die wir in diesem und im vorigen Artikel gefunden haben, substituiren, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} T_2 = \frac{dT_1}{d\gamma}\, n(\zeta) - \frac{1}{2}\, T_1\left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{d\mathrm{S}}{dt}\right)\left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right) & \\ + \frac{dT_1}{dg}\, n(z) + \left(\mathrm{V} - T_1 + U - \left(\frac{d\mathrm{S}}{dt}\right)\right) l(r) & \\ + \left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\mathrm{S}}{dt}\right) - \frac{1}{2}\, T - 2U\right)\mathrm{S} + \frac{dT_1}{dg'}\, n'(z') + \text{etc.}\ \mathrm{V}_1\, l(r') + \text{etc.} & \quad \ldots (43) \\ - \frac{dT_1}{dP}\,(p'+p) - \frac{dT_1}{dQ}\,(q'+q) + \text{etc.} & \end{aligned}$$

Aber aus

$$\frac{d . \frac{\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)}{\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)}}{d\tau} = T_1 + T_2$$

Digitized by Google

folgt, daſs

$$\frac{d\zeta}{dt} = \left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)\int T_1 d\tau + \left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)\int T_2 d\tau$$

Da nun

$$\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right) = 1 + \left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right)$$

ist, so haben wir, wenn wir die vorletzte Gleichung nach τ differentiiren und bedenken, daſs das Glied $\int T_1 d\tau$ die Störungen der ersten Ordnung giebt, die wir schon berechnet haben, und daſs das Glied $\left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right) T_2$ und das Glied $\left(\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}\right)\int T_2 d\tau$ von der dritten Ordnung sind:

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau dt} = \left(\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}\right)\int T_1 d\tau + \left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right) T_1 + T_2$$

welche Gleichung die Störungen zweiter Ordnung vollständig enthält. Substituiren wir nun hierin den Werth von T_2 aus (43), so entsteht:

$$(44)\ldots\frac{d^2\zeta}{d\tau dt} = \left(\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}\right)\int T_1 d\tau + \frac{dT_1}{d\gamma}\, n(\zeta) + \frac{1}{2}\left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right) T_1$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right)\left(\frac{dS}{dt}\right) + \frac{dT_1}{dg}\, n(z) + \left(V - T_1 + U - \left(\frac{dS}{dt}\right)\right) l(r)$$
$$+ \left(\frac{1}{2}\left(\frac{dS}{dt}\right) - \frac{1}{2}T - 2U\right) S + \frac{dT_1}{dg'}\, n'(z') + \text{etc.}$$
$$+ V_1 l(r') + \text{etc.} - \frac{dT_1}{dP}(p'+p) - \frac{dT_1}{dQ}(q'+q) + \text{etc.}$$

Das Integral dieser Gleichung giebt also die Störungen der zweiten Ordnung vollständig. Es wäre gar nicht weitläuftig, für ein willkührliches allgemein angenommenes Glied den Ausdruck des Integrals analytisch zu entwickeln, aber es ist vortheilhafter, unmittelbar nach dieser Differentialgleichung die numerischen Rechnungen zu führen und hierauf mit den numerischen Werthen der Coëfficienten, wie wir es auch schon bei den Störungen der ersten Ordnung gethan haben, den Integrationsproceſs vorzunehmen. Man muſs also die in dieser Gleichung vorkommenden Factoren, die nicht durch die erste Approximation gegeben sind, berechnen, und dann alles nach Vorschrift der Gleichung multipliciren.

Digitized by Google

20.

Die Gröſsen, welche nicht unmittelbar durch die erste Approximation gegeben sind, sind:

$$\frac{dS}{dt},\ V,\ V_{,},\ \text{etc.}\ \left(\frac{dT_{,}}{dP}\right),\ \left(\frac{dT_{,}}{dQ}\right)\ \text{etc. und}\ U$$

Die Gröſse S ist gegeben, und wenn man seinen Ausdruck in einer Reihe, wie er im Artikel 9. bereits angeführt ist,

$$S = N_{,}^{i,i'} \cos(ig + i'g') + N_{,,}^{i,i'} \sin(ig + i'g')$$

setzt, so bekommt man:

$$\frac{dS}{dt} = nH_{,}^{i,i'} \sin(ig + i'g') + nH_{,,}^{i,i'} \cos(ig + i'g')$$

wenn man

$$\left.\begin{aligned} H_{,}^{i,i'} &= -\frac{in + i'n'}{n} N_{,,}^{i,i'} \\ H_{,,}^{i,i'} &= \frac{in + i'n'}{n} N_{,}^{i,i'} \end{aligned}\right\} \quad \ldots .(45)$$

macht. Die allgemeinen Ausdrücke für die übrigen Hülfsgröſsen sind bereits unter (40), (41) und (42) gegeben, aber offenbar unterscheiden sich diese, mit Ausnahme des Ausdrucks für U, von der Gleichung (1) nur dadurch, daſs die in dieser vorkommenden Differentialquotienten von Ω in Beziehung auf eine gewisse darin enthaltene Gröſse differentiirt sind. Wenn wir also mit den Gleichungen (40) und (42) dieselbe Transformation vornehmen, die wir bei der Gleichung (1) angewendet haben, so müssen wir nothwendig ein analoges Resultat bekommen. Wir werden nemlich z. B. für $\int V d\tau$ eine Gleichung bekommen, die sich von der Gleichung (15) nur dadurch unterscheidet, daſs

$$\frac{d.r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{d\epsilon}\ \text{statt}\ \left(\frac{d\Omega}{d\epsilon}\right)\ \text{und}\ r^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right) + r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\ \text{statt}\ r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

vorkommt.

Wenn wir also annehmen, daſs

$$r^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right) + r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = \frac{m'}{\mu}\{i, i', c\} \cos(ig + i'g') + \frac{m'}{\mu}\{i, i', s\} \sin(ig + i'g')$$

Digitized by Google

sei, so haben wir ohne Weiteres der Gleichung (17) analog:

$$(46)\ldots\int \mathrm{V}d\tau = \frac{am'}{\mu}\Big\{(i-k)[i-k,i',c]C^{\varkappa,k}+\{i-k,i',c\}D^{\varkappa,k}\Big\}\cos(\varkappa\gamma+ig+i'g')$$
$$+\frac{am'}{\mu}\Big\{(i-k)[i-k,i',s]C^{\varkappa,k}+\{i-k,i',s\}D^{\varkappa,k}\Big\}\sin(\varkappa\gamma+ig+i'g')$$
$$+\frac{am'}{\mu}C^{0,0}i[i,i',s]x\cos(ig+i'g')$$
$$-\frac{am'}{\mu}C^{0,0}i[i,i',c]x\sin(ig+i'g')$$

wo die Gröſsen $C^{\varkappa,k}$, $D^{\varkappa,k}$, $[i-k,\ i',\ c]$ und $[i-k,\ i',\ s]$ bereits durch die erste Approximation bekannt sind.

Aus dieser Gleichung bekommen wir die Gleichungen für $\int\left(\frac{dT_1}{dP}\right)d\tau$ und $\int\left(\frac{dT_1}{dQ}\right)d\tau$, wenn wir die Entwickelungscoëfficienten von $r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ resp. durch die von $\left(\frac{d\Omega}{d\Theta}\right)\frac{1}{\sin \mathrm{I}}$ und $\left(\frac{d\Omega}{d\mathrm{I}}\right)\frac{1}{\cos \mathrm{I}}$ und die Coëfficienten von $r^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right)+r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ resp. durch die von $r\left(\frac{d^2\Omega}{drd\Theta}\right)\frac{1}{\sin \mathrm{I}}$ und $r\left(\frac{d^2\Omega}{drd\mathrm{I}}\right)\frac{1}{\cos \mathrm{I}}$ ersetzen; die Gröſsen $\int \mathrm{V}_{,}d\tau$, $\int \mathrm{V}_{,,}d\tau$ etc. bekommt man, wie oben gezeigt ist, durch $\int \mathrm{V}d\tau$ und $\int T_1 d\tau$. Wenn wir nemlich die Gleichung (40*) mit $d\tau$ multipliciren und integriren, so haben wir:

$$(47)\ldots\quad -\int T_1 d\tau = \int \mathrm{V}d\tau + \int \mathrm{V}_{,}d\tau + \int \mathrm{V}_{,,}d\tau + \text{etc.}$$

auf welche dieselben Bemerkungen anzuwenden sind, die wir bei der Gleichung (40*) gemacht haben. Man braucht in der Gleichung (46) so wie in den analogen, wie früher in $\int Td\tau$ nur die Glieder zu berechnen, in welchen $\varkappa=0$, $\varkappa=1$ und $\varkappa=-1$ ist, denn die übrigen haben nothwendig zu diesen dieselbe Relation, welche im Artikel 8. entwickelt ist. Man braucht diese Glieder weiter gar nicht, nur zur Controlle ist die kleine Mühe, die deren Berechnung kostet, nicht zu scheuen, wenn man sie nemlich hinzugefügt hat, so muſs $\int \mathrm{V}d\tau = 0$ werden, wenn man darin τ in t verwandelt, und eben dasselbe findet natürlich auch bei den übrigen auf analoge Art zu berechnenden Gröſsen statt. Um eben dieser Controlle willen habe ich die Integrale nach τ statt der Gröſsen V, $\left(\frac{dT_1}{dP}\right)$, $\left(\frac{dT_1}{dQ}\right)$ etc. selbst, welche eigentlich für die Rechnung

Digitized by Google

nach (44) gebraucht werden, zu berechnen vorgeschrieben; die Arbeit ist dadurch um nichts vermehrt, wohl aber die Sicherheit des Resultats dadurch vergröſsert worden.

Es bedarf also für die Berechnung der zweiten Approximation auſser den Differentialquotienten von Ω, welche für die erste Approximation schon berechnet sind, noch

$$r^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right),\ r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,dI}\right) \text{ und } r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,d\Theta}\right)$$

In Beziehung auf den ersten Theil von Ω, nemlich $\Omega_{,}$, rechnet man am sichersten nach der Methode des Artikels 13. Man kann die hier verlangten Gröſsen durch eine kürzere Rechnung bekommen wie die in der ersten Approximation erforderlichen. Denn einestheils braucht man nicht so viele Entwickelungscoëfficienten und anderntheils reicht man mit weniger Decimalen aus; dies folgt schon aus dem Umstande, daſs die Störungen der zweiten Approximation nothwendig kleiner sein müssen wie die ersten. Der Fall, wo die Störungen der zweiten Ordnung eben so groſs oder gar gröſser wären als die der ersten Ordnung, ist freilich an sich nicht unmöglich, aber wenn er eintritt, so ist die allgemeine Auflösung der Aufgabe bei dem jetzigen Zustande der Wissenschaft unmöglich (Siehe II. Art. 1.). In unserm Sonnensysteme trifft er nicht ein. Die genannten Differentialquotienten bekommt man leicht durch die Differentiation der Ausdrücke für die ersten Differentialquotienten, welche im Artikel 13. gegeben sind. Nemlich:

$$r^2\left(\frac{d^2\Omega_{,}}{dr^2}\right) = \frac{\mu}{m'}\,3\Delta_{,}\,r^2\left(\frac{d\Omega_{,}}{dr}\right)^2 - \frac{r^2}{\Delta_{,}^3}$$

$$r\left(\frac{d^2\Omega_{,}}{dr\,dI}\right) = \frac{\mu}{m'}\,3\Delta_{,}\quad\left(\frac{d\Omega_{,}}{dI}\right)r\left(\frac{d\Omega_{,}}{dr}\right) + \left(\frac{d\Omega_{,}}{dI}\right)$$

$$r\left(\frac{d^2\Omega_{,}}{dr\,d\Theta}\right) = \frac{\mu}{m'}\,3\Delta_{,}\quad\left(\frac{d\Omega_{,}}{d\Theta}\right)r\left(\frac{d\Omega_{,}}{dr}\right) + \left(\frac{d\Omega_{,}}{d\Theta}\right)$$

Die speciellen Werthe der in der rechten Seite dieser Gleichungen vorkommenden Gröſsen hat man bereits aus den für die erste Approximation geführten Rechnungen.

Digitized by Google

21.

Den bereits entwickelten Differentialquotienten von ψ oder $\Omega_{,,}$ ist nichts hinzuzufügen, denn es ist:

$$\left(\frac{d^2\Omega_{,,}}{dr^2}\right) = 0$$

$$r\left(\frac{d^2\Omega_{,,}}{dr\,d\mathrm{l}}\right) = \left(\frac{d\Omega_{,,}}{d\mathrm{l}}\right)$$

$$r\left(\frac{d^2\Omega_{,,}}{dr\,d\Theta}\right) = \left(\frac{d\Omega_{,,}}{d\Theta}\right)$$

Durch die angeführten Gröſsen hat man bereits diejenigen, welche man brauchen muſs, um die Störungen der zweiten Ordnung der Planeten m', m'' etc. zu berechnen. Denn aus der Gleichung

$$-\Omega = r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) + r'\left(\frac{d\Omega}{dr'}\right) + r''\left(\frac{d\Omega}{dr''}\right) + \text{etc.}$$

folgt:

$$-\left(\frac{d\Omega}{d\mathrm{l}}\right) = r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,d\mathrm{l}}\right) + r'\left(\frac{d^2\Omega}{dr'd\mathrm{l}}\right)$$

$$-\left(\frac{d\Omega}{d\mathrm{l}_{,}}\right) = r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,d\mathrm{l}_{,}}\right) + r''\left(\frac{d^2\Omega}{dr''d\mathrm{l}_{,}}\right)$$

etc.

$$-\left(\frac{d\Omega}{d\Theta}\right) = r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,d\Theta}\right) + r'\left(\frac{d^2\Omega}{dr'd\Theta}\right)$$

$$-\left(\frac{d\Omega}{d\Theta_{,}}\right) = r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,d\Theta_{,}}\right) + r''\left(\frac{d^2\Omega}{dr''d\Theta_{,}}\right)$$

etc.

$$2\Omega + 4r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) + r^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right) = r'^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr'^2}\right) + r''^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr''^2}\right) + \text{etc.}$$

Hieraus leitet man leicht die betreffenden Differentialquotienten der Gröſsen Ω', Ω'' etc. ab. Die Gröſsen V' etc. müssen aber für jeden andern Planeten besonders berechnet werden, weil alsdann $C^{n,i}$ und $D^{n,i}$ anders sind.

Digitized by Google

22.

Wir haben nun noch U zu entwickeln. Wenn wir den unter (7) gegebenen Werth von

$$\left(\frac{d\,.\,\frac{r^2}{a^2}}{dg}\right)$$

nach g und nach e differentiiren, so ergiebt sich:

$$\left(\frac{d^2\,.\,\frac{r^2}{a^2}}{dg^2}\right) = \quad 2\,\frac{e^2 \sin^2 (\nu - \pi)}{1 - e^2} + 2\,\frac{a}{r}\,e \cos (\nu - \pi)$$

$$\left(\frac{d^2\,.\,\frac{r^2}{a^2}}{dg\,de}\right) = -\,2\,\frac{e \sin (\nu - \pi) \cos (\nu - \pi)}{\sqrt{1 - e^2}} + 2\,\frac{a}{r} \sin (\nu - \pi) \sqrt{1 - e^2}$$

Diese Gleichungen lassen sich durch den schon mehrmals angewendeten Werth der Einheit, nemlich durch

$$1 = \frac{r}{a}\,\frac{1}{1 - e^2} + \frac{r}{a}\,\frac{e \cos (\nu - \pi)}{1 - e^2}$$

einfacher machen. Wenn man das letzte Glied einer jeden damit multiplicirt, so bekommt man ohne Mühe:

$$\left(\frac{d^2\,.\,\frac{r^2}{a^2}}{dg^2}\right) = 2\,\frac{e \cos (\nu - \pi)}{1 - e^2} + 2\,\frac{e^2}{1 - e^2}$$

$$\left(\frac{d^2\,.\,\frac{r^2}{a^2}}{dg\,de}\right) = 2\,\frac{\sin (\nu - \pi)}{\sqrt{1 - e^2}}$$

woraus sich ergiebt:

$$\left.\begin{aligned} \cos (\nu - \pi) &= \frac{1 - e^2}{2e}\left(\frac{d^2\,.\,\frac{r^2}{a^2}}{dg^2}\right) - e \\ \sin (\nu - \pi) &= \frac{\sqrt{1 - e^2}}{2}\left(\frac{d^2\,.\,\frac{r^2}{a^2}}{dg\,de}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots.(18)$$

Die Gleichung für den Radius Vector giebt leicht:

$$\frac{\varrho}{a} = 1 - e^2 - \frac{\varrho}{a}\,e \cos (\lambda - \pi)$$

Digitized by Google

oder

$$\frac{\varrho}{a} = (1-e^2) + e\left(\frac{d\,.\,\frac{\varrho^2}{a^2}}{de}\right)$$

Vermittelst dieser Gleichungen und der dritten und vierten der Gleichungen (7) verwandelt sich (41) in

$$U = \frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\frac{1}{2e}\left(\frac{d\,.\,\frac{\varrho^2}{a^2}}{d\gamma}\right)\left(\frac{d^2\,.\,\frac{r^2}{a^2}}{dg\,de}\right) - \frac{1}{2e}\left(\frac{d\,.\,\frac{\varrho^2}{a^2}}{de}\right)\left(\frac{d^2\,.\,\frac{r^2}{a^2}}{dg^2}\right) - 2\right\}\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)$$

Da nun aus den Gleichungen (9) folgt, daſs

$$\left(\frac{d^2\,.\,\frac{r^2}{a^2}}{dg\,de}\right) = -\,k\left(\frac{dR^{(k)}}{de}\right)\sin kg$$

$$\left(\frac{d^2\,.\,\frac{r^2}{a^2}}{dg^2}\right) = -\,k^2\quad R^{(k)}\quad \cos kg$$

so verwandelt sich die vorstehende Gleichung, wenn man die Beziehung habenden Gleichungen (9) und die Relationen (11) zu Hülfe nimmt, in folgende:

$$U = \frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\frac{k}{2}\left[k\,\frac{R^{(k)}}{e}\left(\frac{dR^{(\varkappa)}}{de}\right) - \varkappa\,\frac{R^{(\varkappa)}}{e}\left(\frac{dR^{(k)}}{de}\right)\right]\cos(\varkappa\gamma + kg) - 2\right\}\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)$$

Ferner ist

$$\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dv}\right) = \frac{dS}{dt}$$

also da die Entwickelung von $\frac{dS}{dt}$ unter (45) zu berechnen gelehrt ist:

$$\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dv}\right) = nH_s^{i,i'}\sin(ig + i'g') + nH_c^{i,i'}\cos(ig + i'g')$$

Wenn wir demnach

$$E^{\varkappa,k} = \frac{k}{2}\left[k\,\frac{R^{(k)}}{e}\left(\frac{dR^{(\varkappa)}}{de}\right) - \varkappa\,\frac{R^{(\varkappa)}}{e}\left(\frac{dR^{(k)}}{de}\right)\right]$$

ausgenommen:

$$E^{0,0} = -\,2$$

setzen, so ist in Folge der Relationen (11):

Digitized by Google

$$U = nE^{\varkappa,k}\, H_{,}^{-k,i'} \sin(\varkappa\gamma + ig + i'g') + nE^{\varkappa,k}\, H_{,}^{-k,i'} \cos(\varkappa\gamma + ig + i'g') \ldots\ldots(49)$$

Die Gröſsen $E^{\varkappa,k}$ lassen sich leicht auf die bei den früheren Entwickelungen gebrauchten zurückführen. Durch Vergleichung der eben gegebenen Werthe mit den Ausdrücken (14) ergiebt sich sogleich:

$$\left.\begin{array}{ll} & E^{\varkappa,k} = -(1-e^2)\,\varkappa k D^{\varkappa,k} \\ \text{ausgenommen:} & \\ & E^{0,k} = -3\,(1-e^2)\,k^2 D^{k,0} \\ \text{ausgenommen:} & \\ & E^{0,0} = -2 \end{array}\right\} \ldots\ldots(50)$$

Hier bedeutet $D^{k,0}$, daſs man in $D^{\varkappa,0}$ $\varkappa$ in k verwandeln soll. Man braucht für die folgenden Rechnungen hier auch nur die Glieder, in welchen $\varkappa = 0$, $\varkappa = 1$ und $\varkappa = -1$ ist. Aus (41) folgt, daſs $U = 0$ wird, wenn man τ in t verwandelt, und aus diesem Grunde habe ich hier nicht, wie bei den übrigen Hülfsgröſsen, das Integral nach τ, sondern die Gröſse selbst berechnet. Um die angeführte Eigenschaft als eine Prüfung der Rechnung zu benutzen, muſs man die Glieder hinzufügen, in deren Argumente $\varkappa$ gröſser als ± 1 ist, und dies geschähe, wie man leicht erkennen wird, wenn wir $\int U d\tau$ berechnet hätten, durch die nemlichen Relationen, welche uns früher dazu gedient haben, denn die Ableitung, welche im Artikel 8. vorgetragen ist, kann man Wort für Wort auf $\int U d\tau$ anwenden. In diesem Falle aber, wo wir das Differential nach τ der Gröſse $\int U d\tau$ vor uns haben, muſs man die Zeichen der zweiten Glieder der Relationen (23) umkehren und alsdann die Werthe, welche man für irgend einen Coëfficienten, in dessen Argument $\varkappa = \pm p$ ist, bekommt, mit $+p$ multipliciren; dies folgt unmittelbar aus den bekannten Regeln der Differentiation.

Da wir die Relationen nachher in dieser Gestalt brauchen werden, so will ich sie vollständig hersetzen. Es seien also $\beta_{,}^{(\varkappa)}$ und $\beta_{,}^{(\varkappa)}$ die Entwickelungscoëfficienten irgend einer der vorkommenden Gröſsen, welche nicht nach τ integrirt ist, so verwandeln sich die Relationen (23), wenn man, $\varkappa$ immer positiv genommen,

$$\xi^{(\varkappa)} = (\varkappa + 1)\,\eta^{(\varkappa)}$$
$$\sigma^{(\varkappa)} = (\varkappa + 1)\,\theta^{(\varkappa)}$$

Digitized by Google

setzt, für ein positives $\varkappa$ in folgende:

$$\beta_s^{(\varkappa+1)} = \xi^{(\varkappa)} \,.\, \beta_s^{(\varkappa)} - \sigma^{(\varkappa)} \,.\, \beta_s^{(-\varkappa)}$$
$$\beta_c^{(\varkappa+1)} = \xi^{(\varkappa)} \,.\, \beta_c^{(\varkappa)} - \sigma^{(\varkappa)} \,.\, \beta_c^{(-\varkappa)}$$

(51).... und für ein negatives $\varkappa$, wobei man bemerken muſs, daſs $\xi^{(-\varkappa)} = \xi^{(\varkappa)}$ und $\sigma^{(-\varkappa)} = \sigma^{(\varkappa)}$ angenommen wird, in folgende

$$\beta_s^{(\varkappa-1)} = \xi^{(\varkappa)} \,.\, \beta_s^{(\varkappa)} - \sigma^{(\varkappa)} \,.\, \beta_s^{(-\varkappa)}$$
$$\beta_c^{(\varkappa-1)} = \xi^{(\varkappa)} \,.\, \beta_c^{(\varkappa)} - \sigma^{(\varkappa)} \,.\, \beta_c^{(-\varkappa)}$$

wo aber, so wie in den früheren, der Werth $\varkappa = 0$ ausgeschlossen ist.

23.

Da wir in der ersten Approximation die Gröſse $\int T_1 d\tau$ als eine unendliche Reihe berechnet haben, die nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen von γ, g und g', und wenn man sich mehrere störenden Planeten hinzudenkt, auch nach den Vielfachen von γ, g und g''; γ, g und g'''; etc. fortschreitet, so sind die in (44) verlangten Differentialquotienten der Gröſse T_1 nach γ, g, g', g'' etc. ohne Mühe zu bekommen, und somit haben wir alles was zur Berechnung von $\frac{d^2\zeta}{d\tau dt}$ erforderlich ist. Ich werde aber noch auf Einiges aufmerksam machen, wodurch man sich die Rechnung beträchtlich abkürzen kann.

Die vier ersten Producte der Gleichung (44) lassen sich auf **Eins** reduciren, durch welches man mit wenig Mühe jene ableiten kann. Zu dem Ende schreibe man in $n(\zeta)$ überall Γ sowohl statt γ als auch statt x und nenne die so entstehende Gröſse nZ, dann bilde man das Product

$$nZ \times \int T_1 d\tau$$

Dieses wird natürlich in seinen Argumenten vier veränderliche Gröſsen Γ, γ, g, g' enthalten, wozu noch, wenn mehr als ein störender Planet vorhanden ist, resp. g'', g''' etc. kommen, so daſs in diesem Falle höchstens fünf veränderliche Gröſsen in jedem Argumente vorhanden sein können. Die Anzahl der zu berechnenden Glieder wird durch die Einführung von Γ um kein einziges vermehrt, nur werden im Endresultat,

Digitized by Google

wenn man die von gleichen Argumenten abhängigen addirt hat, mehrere Glieder vorhanden sein, als in einem der vier angeführten Producte; diese Anzahl aber wird sich gleich noch reduciren. Aus $nZ \times \int T_1 d\tau$ bekommt man aber, wie leicht zu erkennen ist,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{n}\left(\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}\right)\int T_1 d\tau &= \frac{d^2\,(nZ\times\int T_1 d\tau)}{d\Gamma^2}\\
\frac{1}{n}\left(\frac{dT_1}{d\gamma}\right) n(\zeta) &= \frac{d^2\,(nZ\times\int T_1 d\tau)}{d\gamma^2}\\
\frac{1}{n}\left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right) T_1 &= \frac{d^2\,(nZ\times\int T_1 d\tau)}{d\gamma d\Gamma}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots.(52)$$

wenn man bei den Differentiationen nach γ die Gröſse x für γ ansieht und nach den Differentiationen wieder Γ in γ verwandelt. Ferner

$$\frac{1}{n}\left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right)\left(\frac{dS}{dt}\right) = \frac{d^2\,(nZ\times\int T_1 d\tau)}{d\gamma d\Gamma} \quad \ldots.(53)$$

wenn man ebenfalls bei der Differentiation nach γ die Gröſse x für γ ansieht, nach den Differentiationen aber γ in g und Γ in γ verwandelt. Die für die Differentiation nach γ gemachte Bemerkung kann man dadurch überflüssig machen, daſs man vor der Multiplication in $\int T_1 d\tau$ überall γ statt x schreibt. Die vier obigen Producte sind aber, wie man sieht, die vier ersten der in (44) verlangten. Wir haben also auſser den Hülfsgröſsen, deren Berechnung immer nur wenig Mühe verursacht, für die vollständige Berechnung der Störungen der zweiten Ordnung der Länge und des Radius Vectors nur acht Producte zu berechnen, wenn Ein störender Planet vorhanden ist. Jeder ferner hinzukommende Planet fügt diesen vier Producte hinzu und addirt zu den schon vorhandenen neue den vorigen ähnliche Glieder.

Da aus dem Vorhergehenden erhellet, daſs für jeden der beiden Factoren des Products $nZ \times \int T_1 d\tau$ zwischen den von $\varkappa$ abhängenden Gliedern die Relationen statt finden, welche unter (23) gegeben sind, und für den einen Factor eines jeden der noch in (44) zu berechnenden Producte die Relationen, welche (51) zeigen, so muſs nach den Multiplicationen dasselbe statt finden. Wir brauchen daher bei den Multiplicationen nur die Glieder zu berücksichtigen, in welchen $\varkappa = 0$,

Digitized by Google

$\varkappa = 1$ und $\varkappa = -1$ ist, die übrigen, die merklich sein möchten, kann man nachher durch die genannten Relationen ohne Mühe ersetzen; hieraus erwächst eine beträchtliche Abkürzung der Arbeit. Man brauchte im ersten Producte im Factor $\int T_1 d\tau$ auch eigentlich die Glieder, in welchen $\varkappa = 0$ und zugleich x nicht vorkommt, nicht zu berücksichtigen, denn man könnte sie nach der Multiplication durch die Bedingungsgleichung $\int T_1 d\tau = 0$, wenn man τ in t verwandelt, ersetzen, aber es ist vortheilhafter die genannten Glieder mitzunehmen und nachher diese Bedingungsgleichung zur Prüfung der Richtigkeit der Ausführung der Multiplication zu benutzen.

24.

Die Formel (44) kann unmittelbar zur numerischen Rechnung dienen. Wir haben nach dem Vorhergehenden jeden Factor als eine convergirende unendliche Reihe; die Form des einen Factors irgend eines in (44) vorkommenden Products ist immer $p_s \cos(\varkappa\gamma + ig + lg^{(\nu)}) + p_c \cos(\varkappa\gamma + ig + lg^{(\nu)})$ und die Form des andern Factors ist $q_s \sin(hg + fg^{(\mu)}) + q_c \cos(hg + fg^{(\mu)})$ mit Ausnahme des Products $nZ \times \int T_1 d\tau$, wo die Form des einen Factors statt der letztgenannten Form diese ist: $q_s \sin(\varepsilon\Gamma + hg + fg^{(\mu)}) + q_c \cos(\varepsilon\Gamma + hg + fg^{(\mu)})$; hier bezeichnen $g^{(\nu)}$ und $g^{(\mu)}$ die mittleren Anomalien irgend zweier der störenden Planeten, und es ist zu bemerken, daſs in Folge des Vorgetragenen $\varkappa$ sowohl als ε nur die Werthe 0, 1 und -1 bekommt. Das Product irgend zweier Glieder in $nZ \times \int T_1 d\tau$ ist also, wenn man die Producte der Sinusse und Cosinusse in linearische Sinusse und Cosinusse verwandelt hat:

$$
\begin{aligned}
&= (\tfrac{1}{2} p_c q_s + \tfrac{1}{2} p_s q_c) \sin(\varkappa\gamma + \varepsilon\Gamma + (i+h)g + lg^{(\nu)} + fg^{(\mu)}) \\
&+ (\tfrac{1}{2} p_c q_c - \tfrac{1}{2} p_s q_s) \cos(\varkappa\gamma + \varepsilon\Gamma + (i+h)g + lg^{(\nu)} + fg^{(\mu)}) \\
&+ (\tfrac{1}{2} p_c q_s - \tfrac{1}{2} p_s q_c) \sin(-\varkappa\gamma + \varepsilon\Gamma - (i-h)g - lg^{(\nu)} + fg^{(\mu)}) \\
&+ (\tfrac{1}{2} p_c q_c + \tfrac{1}{2} p_s q_s) \cos(-\varkappa\gamma + \varepsilon\Gamma - (i-h)g - lg^{(\nu)} + fg^{(\mu)})
\end{aligned}
$$

und die nemliche Form kommt den übrigen sieben Producten zu, mit dem alleinigen Unterschiede, daſs für diese alle $\varepsilon = 0$ ist. Ein specieller Fall der vorstehenden Form der Producte ist aber wo $\nu = \mu$; alsdann ziehen sich die beiden letzten Glieder der Argumente in Eins zusammen

Digitized by Google

und es entsteht in den beiden ersten Argumenten $(l+f)\,g^{(\nu)}$ und in den beiden letzten $(f-l)\,g^{(\nu)}$. Aber wir können uns in derselben Allgemeinheit kürzer fassen. Sei irgend ein Glied des einen Factors irgend eines der zu bildenden Producte

$$= p_c \cos a + p_s \sin a$$

und irgend ein Glied des andern Factors desselbigen Products

$$= q_s \sin b + q_c \cos b$$

dann sind im Producte die hieraus entstehenden Glieder:

$$\left.\begin{array}{l} = (\tfrac{1}{2} p_c q_s + \tfrac{1}{2} p_s q_c) \sin (a + b) + (\tfrac{1}{2} p_c q_c - \tfrac{1}{2} p_s q_s) \cos (a + b) \\ + (\tfrac{1}{2} p_c q_s - \tfrac{1}{2} p_s q_c) \sin (-a + b) + (\tfrac{1}{2} p_c q_c + \tfrac{1}{2} p_s q_s) \cos (-a + b) \end{array}\right\} \ldots (54)$$

Diese Formel kann zum Leitfaden für alle zu machenden Multiplicationen dienen, wie groſs auch die Zahl der störenden Planeten sei, und sie hat mir beim Jupiter und Saturn auch wirklich dazu gedient. Man muſs sich nur, um die Rechnung sicher auszuführen, für dieselbe im voraus ein festes Schema entwerfen und in der Reihenfolge der Argumente an eine gewisse Ordnung, am einfachsten an die, welche man bei der ersten Approximation des gestörten Planeten befolgt hat, halten. Ich werde die Form, die ich diesen Multiplicationen gegeben habe, ausführlich beschreiben und durch ein Beispiel aus meinen Rechnungen erläutern.

Ich überziehe das Papier, welches zur Rechnung dienen soll, mit horizontalen und verticalen Linien, wodurch Rechtecke gebildet werden, deren jedes geschickt ist zwei Logarithmen aufzunehmen. Oben am Rande des Papiers schreibe ich über je zwei Rechtecke die Indices der Argumente des einen Factors des zu machenden Products der Reihe nach, wie sie in der ersten Approximation gefunden und in den beifolgenden Tafeln angeführt sind. Unter diese kommen die Logarithmen der resp. Coëfficienten, von welchen ich den Logarithmus von 2 (206265″) abziehe, um das Product sogleich in Secunden ausgedrückt zu bekommen. Am linken Rande des Papiers, oder sicherer am linken und am rechten Rande von oben nach unten, werden die Indices des zweiten

Factors desselben Products jeder in ein Rechteck geschrieben, wobei dieselbe Reihenfolge beobachtet wird. Die Logarithmen der Coëfficienten dieses Factors schreibe ich an den untern Rand eines Streifen Papiers samt den ihren Argumenten zukommenden Indices. Man addirt nun zu jedem einzelnen Logarithmus des einen Factors alle Logarithmen des andern Factors, und diese Addition geschieht vermittelst des bekannten Anlegens des Papierstreifens, worauf die Logarithmen des einen Factors geschrieben sind. Die Glieder, welche unmerklich werden, erkennt man durch die Addition der ersten Ziffern der Logarithmen ohne Mühe, und die ihnen zukommenden Rechtecke bleiben leer. Um alle Glieder zu bekommen, die merklich werden können, hebt man, bevor man die Multiplication anfängt, das gröſste Glied eines jeden Factors aus und dividirt durch dasselbe die Hälfte der numerischen Grenze, bis zu welcher herab man die Störungen genau haben will; der Coëfficient ist das kleinste Glied des andern Factors, welches ein merkliches Glied im Product hervorbringen kann.

Ein anderes, durch verticale Linien in Columnen getheiltes Papier dient hierauf um das zu gleicher Zeit auf linearische Sinusse und Cosinusse gebrachte Product aufzunehmen. Die Reduction der Producte der Cosinusse und Sinusse auf linearische Cosinusse und Sinusse mache ich nemlich zu gleicher Zeit mit dem Aufschlagen der den Logarithmensummen zugehörigen Zahlen nach der Formel (54). Die Logarithmen der vier in dieser Formel vorkommenden Producte finden sich der eben gegebenen Beschreibung zufolge auf dem ersten Papiere in folgender Ordnung gestellt:

	a	
	$\log \frac{1}{2} p_c$	$\log \frac{1}{2} p_s$
b	$\log \frac{1}{2} p_c q_s$ $\log \frac{1}{2} p_c q_c$	$\log \frac{1}{2} p_s q_s$ $\log \frac{1}{2} p_s q_c$

und es ist daher ein Leichtes, die Zahlen dieser Logarithmen gleich in die Columnen des zweiten Papiers, welche für die durch Addition und Subtraction der Argumente *a* und *b* sich ergebenden Argumente bestimmt

Digitized by Google

sind, hinzuschreiben. Es giebt mancherlei kleine Hülfsmittel, die jedem Rechner, ohne daſs ich sie anführe, bei der Hand sein werden, um sich gegen Fehler bei der Rechnung zu schützen; zwei dieser Hülfsmittel verdienen jedoch besonderer Erwähnung. Um sich gegen Irrungen in den algebraischen Zeichen der einzelnen Glieder zu schützen, dient die Bemerkung, daſs, wie auch die Zeichen der Coëfficienten p_c, p_s, q_c und q_s beschaffen sein mögen, von den vier partiellen Producten, welche zusammen die Coëfficienten des linearischen Sinus und Cosinus des Products, sei es in der Summe oder in der Differenz der Argumente der Factoren, ausmachen, immer drei das nemliche und Eins das diesem entgegengesetzte Zeichen haben müssen. Ferner: man nenne die Zahlen der vier in dem obigen Täfelchen vorkommenden Logarithmen der Reihe nach (1), (2), (3), (4), dann werden auf dem zweiten Papier in den Columnen für die Summe und für die Differenz der Argumente a und b diese Gröſsen folgendermaaſsen gestellt sein:

$a+b$		$-a+b$	
sin	cos	sin	cos
+ (1)	+ (3)	+ (1)	+ (3)
+ (4)	− (2)	− (4)	+ (2)

und zwischen diesen Zahlen müssen ohne Rücksicht auf die Zeichen die Gleichungen

$$\frac{(1)}{(3)} = \frac{(2)}{(4)} \quad \text{und} \quad \frac{(1)}{(2)} = \frac{(3)}{(4)}$$

statt finden. Durch diese kann man, wenn man das Product mit den Augen durchgeht, jeden Fehler entdecken, der durch falsches Addiren der Logarithmen oder Aufschlagen der ihnen zukommenden Zahlen begangen sein mag, wenn er nur nicht gar zu klein ist.

Man sieht aus dieser Darstellung, daſs hier ein Aufsuchen der Glieder, die ein merkliches Resultat geben können, nicht vorkommt, sondern daſs diejenigen, welche nicht vernachlässigt werden können, sich gleichsam von selbst ergeben. Will man nicht alle, sondern nur den Coëfficienten eines gegebenen Arguments berechnen, so ist zu bedenken, daſs in jedem Producte im Allgemeinen jedes Argument durch

Digitized by Google

Addition oder Subtraction mit einem gewissen Argumente des andern Factors jedes gegebene Argument des Products hervorbringen kann; dieses muſs also, wenn man nichts übergangen hat, in jeder der von den Rechtecken des ersten Papiers gebildeten Columnen vorkommen. Argumente des Products, worin nur die mittlere Anomalie Eines störenden Planeten vorkommt, können aus jedem Argumente der Factoren durch Addition und Subtraction hervorgebracht werden; jedes solcher Argumente muſs sich also in jeder der eben genannten Columnen zweimal befinden. Die Argumente im Producte, welche nur ein Vielfaches von γ enthalten, können bloſs durch Subtraction zweier Argumente entstehen, welche bis auf $\varkappa\gamma$ einander gleich sind; solche können also in jeder Columne nur einmal vorkommen.

Als Beispiel gebe ich eine Stelle aus dem Producte $\left(\frac{dT_{,}}{dg}\right)n(z)$. Die betreffenden Logarithmen des Factors $n(z)$ sind, nachdem davon der Logarithmus von 2 (206265″) subtrahirt worden ist, folgende:

sin	cos
1, 0 (nt)	
$5,1036_n$	$5,3123_n$
3, — 1	
$5,8233_n$	$5,6816$
4, — 1	
$3,8439_n$	$2,727$
1, — 2	
$4,3072_n$	$4,7777_n$
2, — 2	
$5,8449_n$	$5,4832$
3, — 2	
$5,6463_n$	$5,6458$

Die überschriebenen Zahlen, welche die Argumente andeuten, sind so zu verstehen, daſs z. B. 1, 0 (nt)...$nt \sin g$ und $nt \cos g$; 4, —1... $\sin(4g-g')$ und $\cos(4g-g')$ etc. anzeigen; eben dasselbe gilt auch von den folgenden Bezeichnungen; g ist hier die mittlere Anomalie des Saturns und g' die des Jupiters. Die Tafel für die Logarithmen des Products steht nun so:

Digitized by Google

	0, 1, − 2		−1, +2, −2		0, 2, − 2		−1, +3, −2		1, + 1, − 2	
	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin
	1,5445$_n$	2,2494	8,793$_n$	2,0767$_n$	2,7359$_n$	2,3408$_n$	2,9959	2,6195	1,4728	1,0599
1,0(nt)	6,648 6,857	7,353$_n$ 7,562$_n$		7,180 7,389	7,840 8,0482	7,444 7,6531	8,0995$_n$ 8,3082$_n$	7,7231$_n$ 7,9318$_n$	6,576$_n$ 6,785$_n$	6,163$_n$ 6,372$_n$
2, −1										
3, −1					8,559 8,417$_n$	8,164 8,002$_n$	8,819$_n$ 8,678	8,443$_n$ 8,301		
4, −1										
1, −2	5,851 6,322	6,557$_n$ 7,027$_n$		6,384 6,854					5,780$_n$ 6,251$_n$	5,367$_n$ 5,837$_n$
2, −2				7,9216 7,5599$_n$	8,5808 8,2191$_n$	8,1897 7,8240$_n$	8,8408$_n$ 8,4791	8,4644$_n$ 8,1027	7,318$_n$ 6,956	6,905$_n$ 6,543
3, −2					8,382 8,382$_n$	7,987 7,987$_n$	8,6422$_n$ 8,6417	8,2658$_n$ 8,2653		
4, −2										

Die oberste Reihe dieser Tafel enthält die Logarithmen der Coëfficienten von $\left(\frac{dT_1}{dg}\right)$, z. B. 2,0767$_n$ ist der Logarithmus des Coëfficienten von cos $(-\gamma+2g-2g')$, etc. Das übrige ist aus der vorhergehenden Darstellung deutlich. Die diesen Logarithmensummen zukommenden Zahlen zeigt das folgende Täfelchen, wo die Überschriften, welche sich auf das Product beziehen, eben so zu verstehen sind wie die früheren.

sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos
0, 0, − 2 (nt)		−1, +1, −2 (nt)		1, −1, −2, (nt)		0, 1, − 2 (nt)		−1, +2, −2 (nt)		1, 0, − 2 (nt)	
″	″	″	″			″	″	″	″	″	″
−0,00044	+0,00072	....	....	....	....	−0,00692	+0,01117	+0,01257	−0,02033	+0,00038	−0,00061
− 363	− 225	+0,00245	+0,00152	....	....	+ 450	+ 278	− 855	− 829	− 24	− 15
0, 2, − 2 (nt)		−1, +3, −2 (nt)		1, +1, −2, (nt)		0, 3, − 2 (nt)		−1, +4, −2 (nt)		1, +2, −2 (nt)	
+0,00044	+0,00072	....	....	....	....	+0,00692	+0,01117	−0,01257	−0,02033	−0,00038	−0,00061
− 363	+ 225	+0,00245	−0,00152	....	....	+0,00450	− 278	− 655	+ 829	−0,00024	+0,0001[illegible]
0, 5, − 3		− 1, 6, − 3		1, 4, − 3		0, − 1, − 1		− 1, 0, − 1		1, − 2, − 1	
+0,036	−0,026	−0,066	+0,048	....	....	−0,036	−0,026	+0,066	+0,048	....	....
− 10	− 15	+ 20	+ 28	....	....	− 10	+ 15	+ 20	− 28	....	....

sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos
0, 0, 0		1, — 1, 0				0, 1, 0		— 1, + 2, 0		1, 0, 0	
....	+ 0″,00021	....	....	....	....	....	....	....	....	+ 0″,00006	— 0″,00015
....	— 36	....	+ 0″,00024	....	....	....	....	....	....	— 7	— 2
....	— 1636	— 0″,009	+ 3014	....	....	....	....	....	....	....	....
....	+ 1548	— 13	— 2913	....	....	....	....	....	....	+ 363	+ 835
....	....	+ 2	+ 90	....	....	+ 0″,024	— 0″,024	....	....	— 4387	+ 4382
....	....	....	— 50	....	....	+ 10	+ 10	....	....	— 1842	— 1844
0, 4, — 4		— 1, 5, — 4		1, 3, — 4		0, 5, — 4		— 1, 6, — 4		1, 4, — 4	
+ 0″,038	— 0,017	— 0,060	+ 0,030	....	....	+ 0,024	— 0,024	— 0″,044	+ 0″,044	....	....
— 7	— 15	+ 13	+ 29	....	....	— 10	— 10	+ 18	+ 18	....	....

Auf diese Art wird das ganze Product durchgeführt und am Ende der Rechnung werden die in der zweiten Tafel in jeder Columne befindlichen, einem und demselben Argumente zukommenden einzelnen Glieder addirt.

Wir wollen nun noch einige besondere Fälle betrachten, die jedes der zu machenden Producte darbietet. Es kommen im Allgemeinen in jedem Producte in jeder Columne zwei Argumente mit einander in Verbindung, deren Differenz eine bloſse Function von γ ist, und, wie wir bereits bei der ersten Approximation gesehen haben, giebt ein Glied, dessen Argument nur γ enthält, in $n\zeta$ und in nz ein Glied, welches mit t multiplicirt ist. Da nun solche Glieder gemeiniglich mit mehreren Decimalen berechnet werden müssen wie die rein periodischen, so muſs man bei den Multiplicationen hierauf Achtung haben und sie mit mehr Stellen ansetzen. Auſser diesen giebt der Coëfficient von $\cos(\gamma - g)$, wo, wie früher, g die mittlere Anomalie des gestörten Planeten bedeutet, im Logarithmus des Radius Vectors ein mit t multiplicirtes Glied, wie dies auch in der ersten Approximation der Fall war. Im Producte $nZ \times \int T_{,} d\tau$ gilt das eben Gesagte für die Glieder, welche in dem Argumente bloſs γ und Γ enthalten, oder genauer bestimmt, für die Glieder, welche nach den Verwandelungen, welche γ und Γ erleiden, solche, wie die genannten sind, erzeugen können. Da diese Glieder jeden Falls eine begrenzte Anzahl ausmachen, so wird es nicht undienlich sein sie namentlich anzuführen. Es erzeugen in $n\zeta$ das Argument $\cos(\gamma - g)$ folgende Glieder des Products $nZ \times \int T_{,} d\tau$:

Digitized by Google

$$\cos\,(0\Gamma+\gamma-\;\;g\;\;0g^{(\nu)}\;0g^{(\mu)})$$
$$\Gamma\sin\,(0\Gamma+\gamma-\;\;g\;\;0g^{(\nu)}\;0g^{(\mu)})$$
$$\cos\,(\;\Gamma\quad 0\gamma-\;\;g\;\;0g^{(\nu)}\;0g^{(\mu)})$$
$$\cos\,(\;\Gamma+\gamma-2g\;\;0g^{(\nu)}\;0g^{(\mu)})$$
$$\gamma\sin\,(\;\Gamma\quad 0\gamma-\;\;g\;\;0g^{(\nu)}\;0g^{(\mu)})$$

und die Argumente ${}^{\sin}_{\cos}\gamma$ folgende:

$${}^{\sin}_{\cos}(0\Gamma+\gamma\quad 0g\;0g^{(\nu)}\;0g^{(\mu)})$$
$$\Gamma\;{}^{\sin}_{\cos}(0\Gamma+\gamma\quad 0g\;0g^{(\nu)}\;0g^{(\mu)})$$
$${}^{\sin}_{\cos}(\;\Gamma\quad 0\gamma\quad 0g\;0g^{(\nu)}\;0g^{(\mu)})$$
$${}^{\sin}_{\cos}(\;\Gamma-\gamma+g\;0g^{(\nu)}\;0g^{(\mu)})$$
$${}^{\sin}_{\cos}(\;\Gamma+\gamma-g\;0g^{(\nu)}\;0g^{(\mu)})$$
$$\gamma\;{}^{\sin}_{\cos}(\;\Gamma\quad 0\gamma\quad 0g\;0g^{(\nu)}\;0g^{(\mu)})$$

Für den Factor x habe ich in diesen Argumenten nach Art. 23. beziehungsweise Γ und γ geschrieben. Es scheint als ob die Argumente ${}^{\sin}_{\cos}(\Gamma+\gamma)$ ähnliche Glieder erzeugen könnten, allein es ist leicht zu beweisen, daſs die Coëfficienten dieser Argumente Null sind. Ebenso verhält es sich auch mit den Coëfficienten von $\cos(\Gamma-\gamma)$. Auſser den angeführten Gliedern kommen noch diejenigen in Betracht, welche nach den Relationen (23) berechnet werden müssen, aber da die Factoren, womit bei dieser Rechnung die schon vorhandenen Glieder multiplicirt werden, klein sind, wenn die Excentricität nicht gar zu groſs ist, so ist hinsichtlich der ursprünglich in $nZ\times\int T_{\iota}d\tau$ anzusetzenden Zahl von Decimalen weiter keine Ausnahme zu machen nöthig. Wenn, wie bei dem Jupiter und Saturn, die Bewegungen zweier Planeten nahe commensurabel sind und daher unter den Gröſsen $\frac{n}{in+i'n'}$ Eine sehr groſs ist, so muſs man in den Summen und Differenzen der Argumente derjenigen Glieder der Factoren, welche sowohl mit Rücksicht als ohne Rücksicht auf γ das Argument $ig+i'g'$ im Producte hervorbringen, eben dasselbe beobachten, welches eben für die nachher mit t multi-

Digitized by Google

plicirten Glieder gesagt ist (*); die Zahl der mehr hinzuzufügenden Decimalen bestimmt man nach Maaſsgabe der Gröſse des genannten Factors. Wären die mittleren Bewegungen genau commensurabel, so würden in der That hieraus mit t multiplicirte Glieder entstehen. Da die Anzahl der Glieder, von welchen jetzt geredet wird, auch immer begrenzt ist, so will ich sie ebenfalls namentlich anführen. Es bekommen bei den Integrationen den Factor $\frac{n}{pn+qn'}$ folgende Glieder des Products $nZ \times \int T d\tau$:

${}^{\sin}_{\cos}(-\Gamma - \gamma + pg + qg')$	${}^{\sin}_{\cos}(\Gamma \;0\gamma + (p-1)g + qg')$
${}^{\sin}_{\cos}(0\Gamma - \gamma + pg + qg')$	${}^{\sin}_{\cos}(\Gamma - \gamma + pg + qg')$
$\Gamma\,{}^{\sin}_{\cos}(0\Gamma - \gamma + pg + qg')$	${}^{\sin}_{\cos}(\Gamma + \gamma + (p-2)g + qg')$
${}^{\sin}_{\cos}(-\Gamma \;0\gamma + pg + qg')$	$\gamma\,{}^{\sin}_{\cos}(\Gamma \;0\gamma + (p-1)g + qg')$
${}^{\sin}_{\cos}(-\Gamma - \gamma + (p+1)g + qg')$	${}^{\sin}_{\cos}(-\Gamma \;0\gamma + (p+1)g + qg')$
${}^{\sin}_{\cos}(-\Gamma + \gamma + (p-1)g + qg')$	${}^{\sin}_{\cos}(-\Gamma - \gamma + (p+2)g + qg')$
$\gamma\,{}^{\sin}_{\cos}(-\Gamma \;0\gamma + pg + qg')$	${}^{\sin}_{\cos}(-\Gamma + \gamma + pg + qg')$
${}^{\sin}_{\cos}(0\Gamma - \gamma + (p+1)g + qg')$	$\gamma\,{}^{\sin}_{\cos}(-\Gamma \;0\gamma + (p+1)g + qg')$
${}^{\sin}_{\cos}(0\Gamma + \gamma + (p-1)g + qg')$	${}^{\sin}_{\cos}(0\Gamma + \gamma + pg + qg')$
$\Gamma\,{}^{\sin}_{\cos}(0\Gamma \;0\gamma + pg + qg')$	$\Gamma\,{}^{\sin}_{\cos}(0\Gamma + \gamma + pg + qg')$
$\Gamma\,{}^{\sin}_{\cos}(0\Gamma - \gamma + (p+1)g + qg')$	${}^{\sin}_{\cos}(\Gamma \;0\gamma + pg + qg')$
$\Gamma\,{}^{\sin}_{\cos}(0\Gamma + \gamma + (p-1)g + qg')$	${}^{\sin}_{\cos}(\Gamma - \gamma + (p+1)g + qg')$
$\gamma\Gamma\,{}^{\sin}_{\cos}(0\Gamma \;0\gamma + pg + qg')$	${}^{\sin}_{\cos}(\Gamma + \gamma + (p-1)g + qg')$
	$\gamma\,{}^{\sin}_{\cos}(\Gamma \;0\gamma + pg + qg')$
	${}^{\sin}_{\cos}(\Gamma + \gamma + pg + qg')$

Wenn die Bewegungen dreier Planeten nahe commensurabel sind, so erleidet das eben Gesagte keine andere Abänderung, als daſs man in den angeführten Argumenten $qg^{(\nu)} + q'g^{(\mu)}$ statt qg' setzen muſs, vorausgesetzt nemlich, daſs $\frac{n}{pn + qn^{(\nu)} + q'n^{(\mu)}}$ der sehr groſse Factor ist. Bei

(*) Dieses war, wie wir gesehen haben, auch bei der ersten Approximation der Fall.

den übrigen Producten ist nichts weiter zu bemerken, als das was bei der ersten Approximation im Artikel 16. in Beziehung auf den vorliegenden Fall gesagt ist.

Der eine Factor eines jeden der in (44) vorkommenden Producte enthält Glieder, deren Coëfficienten mit t multiplicirt sind; diese Glieder verursachen keine Ausnahme von den für die Multiplicationen gegebenen Regeln. Sie geben nach der Integration die von der Zeit abhängigen Veränderungen der Störungscoëfficienten. Wo diese Glieder mit denjenigen Gliedern des resp. andern Factors in Verbindung kommen, welche im Product Glieder erzeugen, die nur γ im Argumente enthalten, geben sie nach der Integration in nz und in $l(r)$ Glieder, die mit t^2 multiplicirt sind, und diese vertreten nach unserer Methode die Stelle der Glieder, die man bis jetzt als vom Quadrate der Zeit abhängige Veränderungen der Elemente dargestellt hat. Für die hierher gehörigen Glieder sind in dem Producte $nZ \times \int T d\tau$ die Coëfficienten von $\cos(\Gamma-\gamma)$ und von $\frac{\sin}{\cos}(\Gamma+\gamma)$ nicht Null, wie es bei den obigen der Fall war. In nZ kommt nur Ein mit t multiplicirtes Glied vor, weil $\varkappa$ nicht gröſser als 1 gemacht wird; in einigen der übrigen Factoren sind eigentlich mehrere der Art vorhanden, aber in $n(z)$, $n'(z')$ etc. folgen diese Glieder immer nach, nach der vorangegangenen Verwandelung von τ in t der Relation (23); man braucht daher nur das mit Sinus und Cosinus von g, g' etc. multiplicirte Glied in diese Factoren aufzunehmen, um ohne Weiteres in den resp. Producten den Einfluſs der übrigen ähnlichen Glieder berücksichtigen zu können. In den Factoren $l(r)$, $l(r')$ etc. muſs man zwei dieser Glieder direct mit dem resp. andern Factor multipliciren, nemlich das von $\cos \varrho g$, $\cos \varrho g'$ etc. und das resp. vom Cosinusse und Sinusse von g, g' etc. abhängige; die Einwirkung der übrigen auf das Resultat berechnet man nach den Relationen (51). Die Factoren der übrigen in (44) vorkommenden Producte enthalten jeder nur Ein mit t multiplicirtes Glied. Man sieht aus dieser Darstellung, daſs die vom Quadrate und von den Producten der Massen abhängigen und mit t^2 multiplicirten Glieder weit einfacher zu berechnen sind als die übrigen.

Wir haben noch ein Glied zu betrachten, welches sich vor den übrigen auszeichnet. Ganz gleiche Argumente in jedem der beiden

Digitized by Google

Factoren irgend eines in (44) vorkommenden Products bringen nothwendig in $\frac{d^2\zeta}{d\tau dt}$ ein constantes Glied hervor; dieses Glied würde nach der Integration in den Störungen der mittleren Länge ein Glied hervorbringen, welches von der Form αt^2 wäre, wo α constant ist. Einem solchen Gliede correspondirt aber, wie man weiſs, in der groſsen Achse ein der Zeit proportionales Glied; es ist hingegen früher bewiesen (*), daſs selbst mit Rücksicht auf die Quadrate und Producte der störenden Kräfte kein solches Glied in der groſsen Achse existirt; das constante Glied, von dem ich rede, muſs also in dem vollständigen Werthe von $\frac{d^2\zeta}{d\tau dt}$ Null sein, obgleich es nicht für jedes einzelne Product Null ist. Gleiche Argumente in den Factoren, von denen aber das eine mit t multiplicirt ist, geben ferner ein Glied in $\frac{d^2\zeta}{d\tau dt}$, welches von der Form βt^2 ist, welchem in der groſsen Achse ein dem Quadrate der Zeit proportionales Glied correspondirt; dieses β muſs also aus demselben Grunde Null sein. Man könnte dem zufolge bei den Multiplicationen diese beiden Glieder überall weglassen, allein es ist nützlich sie zu berechnen, um sich nach der Addition der Producte zu überzeugen, in wie weit man richtig gerechnet hat, denn wenn einer oder mehrere der concurrirenden Logarithmen der Factoren falsch hingeschrieben sind, oder wenn man merkliche Glieder in den Factoren weggelassen hat, so werden diese Glieder nicht Null werden.

Es kommt jedoch auſserdem in nz ein mit t^2 multiplicirtes Glied vor; dieses entsteht aus den Gliedern, die in $\frac{d^2\zeta}{d\tau dt}$ mit $nt\cos(\gamma-g)$, $nt\cos 2(\gamma-g)$, etc. multiplicirt sind; dieses Glied hat deshalb keinen Einfluſs auf die groſse Achse und ist im Allgemeinen nicht Null. Es vertritt die Stelle der Säcularveränderung der mittleren Bewegung; es ist übrigens aber nicht ganz das, was man sonst darunter versteht, wie man sich leicht durch die Analysirung unserer Formeln überzeugen kann. Man sieht, daſs dessen Berechnung, so wie die der übrigen Glieder, den oben gegebenen allgemeinen Regeln folgt.

Die Integrationen und die Differentiationen, die noch zu machen sind, werden ein wenig einfacher, wenn man in allen mit t multiplicir-

---

(*) Namentlich von Hrn. Poisson zuerst, und nach ihm von La Grange u. La Place.

Digitized by Google

ten Gliedern den Factor n als algebraisches Zeichen stehen läſst, wie wir es bereits in der ersten Approximation gethan haben. Bei den Beziehung habenden Gliedern der störenden Planeten ist es vortheilhaft, n statt n', n'', etc. einzuführen; man addire also vor den Multiplicationen zu den Logarithmen der Coëfficienten von $n't$, $n''t$, etc. resp. die Logarithmen von $\frac{n'}{n}$, $\frac{n''}{n}$, etc.

Es ist bereits oben gesagt worden, daſs das Product $nZ \times \int T d\tau$ Null werden muſs, wenn man γ in g verwandelt; dieser Umstand dient zur Controlle der Rechnung. Auf die nemliche Art kann man auch das Product $\left(\frac{1}{2}\left(\frac{dS}{dt}\right) - \frac{1}{2} T + 2U\right) S$ in (44) prüfen, denn es geht aus den Gleichungen (1) und (41) hervor, daſs der erste Factor, mithin auch das Product, Null werden muſs, wenn man τ in t verwandelt. Die übrigen Producte werden nach dieser Verwandelung nicht Null, aber man könnte einem jeden solche Glieder hinzufügen, durch welche diese Eigenschaft erzeugt würde; die daraus in dem Producte entstehenden Glieder würde man, wenn sie zur Controlle gedient haben, wegwerfen. Ich habe indeſs bei den für den Saturn geführten Rechnungen nicht für nothwendig gehalten dieses zu thun.

25.

Wenn man die Multiplicationen alle gemacht und nach den Gleichungen (52 u. 53.) aus dem Producte $nZ \times \int T d\tau$ die betreffenden Producte abgeleitet hat, so addirt man nach der Vorschrift des Ausdrucks (44), oder vielmehr man theilt den Werth von $\frac{d^2\zeta}{d\tau dt}$ in so viele partielle Summen, als Quadrate und Producte vorkommen. Man integrirt jede partielle Summe und erhält somit die Störungen der zweiten Ordnung, die mit verschiedenen Massen multiplicirt sind, von einander abgesondert; wenn also in der Folge die Beobachtungen eine Änderung in den bei der Rechnung angewandten Massen anzeigen, so kann man die Störungen dem gemäſs streng abändern. Da T_1 mit der Masse m nicht multiplicirt ist, so kann in den Störungen der zweiten Ordnung das Quadrat der Masse m nicht vorkommen, übrigens alle Combinationen von je zwei Massen.

Digitized by Google

Die allgemeine Form von $\frac{d^2\zeta}{d\tau dt}$ ist nun:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\zeta}{d\tau dt} &= n\alpha_, \;\sin X &&+ n\alpha_, \;\cos X \\ &+ n\beta_, \;\sin(\varkappa\gamma + X) &&+ n\beta_, \;\cos(\varkappa\gamma + X) \\ &+ n\varepsilon_, x \sin(\varkappa\gamma + X) &&+ n\varepsilon_, x \cos(\varkappa\gamma + X)\end{aligned}$$

wo zur Abkürzung X für $ig + i'g' + i''g''$ geschrieben ist. Unter den Werthen, welche $\varkappa$ annimmt, ist die Null ausgeschlossen, weil die dahin gehörenden Glieder besonders angesetzt sind; übrigens wird angenommen, daſs die Coëfficienten der Argumente, in denen $\varkappa$ gröſser ist als ± 1, nach den gegebenen Regeln schon berechnet sind. Unter den Coëfficienten α, β, ε dieses Ausdrucks werden sowohl diejenigen verstanden, welche mit nt multiplicirt sind, als auch diejenigen, welche diesen Factor nicht enthalten. Das Integral nach τ des vorstehenden Ausdrucks findet sich durch theilweise Integration leicht, wie folgt:

$$(55)\ldots\left\{\begin{aligned}\frac{d\zeta}{dt} = &-\left\{\frac{1}{\varkappa}\beta_, - \frac{1}{\varkappa^2}\varepsilon_,\right\}\cos(\varkappa\gamma + X) &&+ \left\{\frac{1}{\varkappa}\beta_, + \frac{1}{\varkappa^2}\varepsilon_,\right\}\sin(\varkappa\gamma + X) \\ &+ \alpha_, x \cos X &&+ \alpha_, x \sin X \\ &- \frac{1}{\varkappa}\varepsilon_, x \cos(\varkappa\gamma + X) &&+ \frac{1}{\varkappa}\varepsilon_, x \sin(\varkappa\gamma + X) \\ &+ \text{Const.}\end{aligned}\right.$$

Die Constante ist, wie man sieht, in den Gliedern, wo $\varkappa = 0$ ist, schon berücksichtigt. Um den übrigen Theil dieser zu finden, verwandelt man in dem numerischen Werthe des vorstehenden Ausdrucks τ in t und addirt alle Glieder, die ein gleiches Argument haben; diese Summen, mit umgekehrtem Zeichen genommen, sind die noch hinzuzufügenden Glieder der Constante, denn es ist klar, daſs hierauf der obige Ausdruck Null werden muſs, wenn man darin τ in t verwandelt Wir können nun diesen dem folgenden gleich stellen:

$$(56)\ldots\ldots\quad\begin{aligned}\frac{d\zeta}{dt} &= A_, \;\cos(\varkappa\gamma + X) &&+ A_, \;\sin(\varkappa\gamma + X) \\ &+ B_, x \cos(\varkappa\gamma + X) &&+ B_, x \sin(\varkappa\gamma + X) \\ &+ C_, nt \cos(\varkappa\gamma + X) &&+ C_, nt \sin(\varkappa\gamma + X) \\ &+ D_, xnt \cos(\varkappa\gamma + X) &&+ D_, xnt \sin(\varkappa\gamma + X)\end{aligned}$$

Digitized by Google

wo unter den Werthen von x die Null keine Ausnahme macht. Dieser Ausdruck giebt nun durch theilweiſe Integration das mit n multiplicirte Integral nach t in folgender Geſtalt:

$$\begin{aligned} n\zeta = & \{fA_{,} - f^2B_{,} + f^2C_{,} + 2f^3D_{,}\} \sin(\varkappa\gamma + X) \\ & - \{fA_{,} + f^2B_{,} - f^2C_{,} + 2f^3D_{,}\} \cos(\varkappa\gamma + X) \\ & + \{fB_{,} + f^2D_{,}\}\, x \sin(\varkappa\gamma + X) \quad - \{fB_{,} - f^2D_{,}\}\, x \cos(\varkappa\gamma + X) \\ & + \{fC_{,} - f^2D_{,}\}\, nt \sin(\varkappa\gamma + X) \quad - \{fC_{,} + f^2D_{,}\}\, nt \cos(\varkappa\gamma + X) \\ & + fD_{,}\, xnt \sin(\varkappa\gamma + X) \quad - fD_{,}\, xnt \cos(\varkappa\gamma + X) \qquad \ldots.(57) \end{aligned}$$

wo f für $\frac{n}{in + i'n' + i''n''}$ geſchrieben iſt. Dieſer Ausdruck, ſo wie die früheren der Art, hört auf richtig zu ſein, wenn in $X..\, i = i' = i'' = 0$ iſt. Mit alleiniger Rückſicht auf dieſe Glieder iſt aber unſer Integral:

$$\begin{aligned} n\zeta = & A_{,} nt \sin\varkappa\gamma + A_{,} nt \cos\varkappa\gamma + B_{,} xnt \sin\varkappa\gamma + B_{,} xnt \cos\varkappa\gamma \\ & + \tfrac{1}{2}\{C_{,} + B_{,}\}\, n^2t^2 \sin\varkappa\gamma \quad + \tfrac{1}{2}\{C_{,} + B_{,}\}\, n^2t^2 \cos\varkappa\gamma \qquad \ldots.(58) \end{aligned}$$

Es muſs bemerkt werden, daſs für dieſe Glieder $D_{,} = 0$ und $D_{,} = 0$ iſt, denn dieſe Glieder könnten, wenn ſie da wären, nur aus dem Producte $nZ \times \int Td\tau$ entſtehen, aber damit in dieſem ein Glied wie $D_{,}\, xnt \frac{\sin}{\cos}(\varkappa\gamma + \varepsilon\Gamma)$ vorkomme, iſt erforderlich, daſs in $\int Td\tau$ ein Glied wie $\lambda x \frac{\sin}{\cos} \varkappa\gamma$ enthalten ſei, welches aber nicht der Fall iſt, wie die Formeln der erſten Approximation zeigen.

Die dem obigen Integral hinzuzufügende Conſtante vereinigt ſich mit der der Gleichung (21) im Art. 7. Dort haben wir die Conſtante $= (1 - c)\, n\tau$ angenommen und werden ſie deshalb hier

$$= -\, c_{,} n\tau$$

ſetzen; $c_{,}$ iſt demnach eine Correction, die die zweite Approximation der Conſtante c, welche durch die Gleichung (20) beſtimmt wurde, hinzufügt. Sie wird dieſem gemäſs beſtimmt und iſt alſo gleich dem Coëfficienten von $nt \cos 0$ in (56), oder vielmehr, ſie wird ſo angenommen, daſs

$$nz = nt + \text{periodiſchen Gliedern}$$

iſt. Nach der Verwandelung von τ in t haben wir nemlich durch die numeriſchen Werthe von (57) und (58):

P

Digitized by Google

$$nz = -c_{,}nt + Ent + \text{periodischen Gliedern}$$

und daher, um die genannte Bedingung zu erfüllen, wenn man bedenkt, daſs nt schon in der ersten Approximation hinzugefügt ist:

$$c_{,} = E$$

26.

Die Bedingungsgleichung

$$\overline{\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)} = \left(\frac{dz}{dt}\right)$$

dient hier, um die richtige Ausführung der Integration zu untersuchen. Wir wollen irgend ein Glied der linken Seite dieser Gleichung unter folgender Form darstellen:

$$\overline{\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)} = H_{,} \cos X + H_{,} \sin X + I_{,} nt \cos X + I_{,} nt \sin X$$
$$+ K_{,} n^2t^2 \cos X + K_{,} n^2t^2 \sin X$$

und das correspondirende in nz durch

$$nz = H'_{,} \sin X + H'_{,} \cos X + I'_{,} nt \sin X + I'_{,} nt \cos X$$
$$+ K'_{,} n^2t^2 \sin X + K'_{,} n^2t^2 \cos X$$

Durch die Differentiation dieses Ausdrucks ergiebt sich:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = \left\{\frac{1}{f} H'_{,} + I'_{,}\right\} \cos X - \left\{\frac{1}{f} H'_{,} - I'_{,}\right\} \sin X$$
$$+ \left\{\frac{1}{f} I'_{,} + 2K'_{,}\right\} nt \cos X - \left\{\frac{1}{f} I'_{,} - 2K'_{,}\right\} nt \sin X$$
$$+ \frac{1}{f} K'_{,} n^2t^2 \cos X - \frac{1}{f} K'_{,} n^2t^2 \sin X$$

(Hier haben X und f die nemliche Bedeutung wie im vorigen Artikel). Zufolge der angeführten Bedingungsgleichung ist also

$$H'_{,} = f(H_{,} - I'_{,}) \quad ; \quad H'_{,} = -f(H_{,} - I'_{,})$$
$$I'_{,} = f(I_{,} - 2K'_{,}) \quad ; \quad I'_{,} = -f(I_{,} - 2K'_{,})$$

und auſserdem entstehen noch zwei Gleichungen, die aber nichts anzeigen können.

Digitized by Google

27.

Für die Störungen der zweiten Ordnung des Logarithmus des Radius Vectors wollen wir uns wieder der Gleichung (H. 16.) bedienen. Diese ist, wenn man für das erste Glied der rechten Seite die hier eingeführte Bezeichnung setzt und die im zweiten Gliede angezeigte Diſferentiation ausführt:

$$2\left(\frac{dl(\varrho)}{dt}\right) - 2\,\frac{\left(\frac{dl(\varrho)}{d\tau}\right)\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)}{\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)} = \frac{dS}{dt} - \frac{\left(\frac{d^2\zeta}{d\tau\, dt}\right)}{\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)} + \frac{\left(\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}\right)\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)}{\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)^2}$$

Diese Gleichung ist integrabel. Wenn man sie mit $\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)$ multiplicirt, so ergiebt sich nach der Umstellung einiger Glieder von der linken Seite zur rechten und umgekehrt:

$$2\left(\frac{dl(\varrho)}{dt}\right)\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right) - \left(\frac{dS}{dt}\right)\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right) + \frac{\left(\frac{d^2\zeta}{d\tau\, dt}\right)}{\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)}\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)$$

$$= 2\left(\frac{dl(\varrho)}{d\tau}\right)\left(\frac{d\zeta}{dt}\right) + \frac{\left(\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}\right)}{\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)}\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)$$

und diese Gleichung läſst sich, wenn man bedenkt, daſs S kein τ enthält, folgendermaaſsen schreiben:

$$\frac{d\,.\left\{2l(\varrho) - S + l\,.\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)\right\}}{dt}\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right) = \frac{d\,.\left\{2l(\varrho) - S + l\,.\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)\right\}}{d\tau}\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)$$

Das Integral dieser partiellen Differentialgleichung ist:

$$2l(\varrho) - S + l\cdot\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right) = \phi(\zeta)$$

wo $\phi(\zeta)$ eine willkührliche Function von ζ ist. Um diese zu bestimmen, wollen wir den Fall betrachten, wo die störenden Kräfte Null sind. Wir haben in diesem Falle $S = 0$; $l\,.\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right) = 0$; $\phi(\zeta) = \phi(\tau)$ also:

$$2l(\varrho) = \phi(\tau)$$

Digitized by Google

aber es ist alsdann $l(\varrho)=0$, oder vielmehr gleich einer Constante, weil wir angenommen haben, daſs zur Berechnung von $l\varrho$ nicht der rein elliptische Werth von la, sondern derjenige Werth angewendet werden soll, welcher sich aus dem durch die Beobachtungen gegebenen n ergiebt. Es ist daher nothwendig $\phi(\tau) = \text{Const.}$ und daher auch allgemein:

$$\phi(\zeta) = \text{Const.}$$

Das Integral geht demnach in folgenden Ausdruck über:

$$(60)\ldots\quad l(\varrho) = \tfrac{1}{2}\,S - \tfrac{1}{2}\,l\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right) + \text{Const.}$$

Wenn wir in der vorstehenden Gleichung die rechte Seite in eine unendliche Reihe auflösen und dabei bedenken, daſs

$$\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right) = 1 + \left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right)$$

ist, so haben wir:

$$(61)\ldots\quad l(\varrho) = \tfrac{1}{2}\,S - \tfrac{1}{2}\left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right) + \tfrac{1}{4}\left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right)^2 - \tfrac{1}{6}\left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right)^3 \pm \text{etc.}$$

wo ich die Constante weggelassen habe, weil wir sie uns der Gröſse S hinzugefügt denken können, wobei man aber bedenken muſs, daſs diese nicht der rein elliptische Werth von S oder $a^2 n \sqrt{1-e^2}$ ist, sondern auf die nemliche Art bestimmt werden muſs, wie wir es in der ersten Approximation gethan haben.

Um S fortzuschaffen, differentiire man diese Gleichung nach τ; hiedurch ergiebt sich, mit Weglassung der Glieder der dritten und höheren Ordnungen:

$$\frac{dl(\varrho)}{d\tau} = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right)\left(\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}\right)$$

aber es ist

$$\overline{\frac{dl(\varrho)}{d\tau}} = \frac{dl(r)}{dt}$$

wenn wir daher in der vorstehenden Gleichung τ in t verwandeln und für die linke Seite diesen Werth substituiren, so erhalten wir:

Digitized by Google

$$\frac{dl(r)}{dt} = -\frac{1}{2}\overline{\left(\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}\right)} + \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right)\left(\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}\right)}$$

also wenn wir mit dt multipliciren und integriren:

$$l(r) = -\frac{1}{2}\int\overline{\left(\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}\right)}\,dt + \int\overline{\left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right)\left(\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}\right)}\,dt + \text{Const.}$$

Um diese Constante zu bestimmen, dienen dieselben Betrachtungen, die wir bereits im Artikel 9. angestellt haben. Nemlich die Gleichung (61) giebt:

$$l(r) = \frac{1}{2}\,\mathrm{S} - \frac{1}{2}\left(\frac{d(z)}{dt}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{d(z)}{dt}\right)^2$$

wo zu bemerken ist, daſs die der Gröſse S hinzugedachte Constante bloſs von der Annahme, die wir für die Berechnung von la gemacht haben, herrührt. Wenn wir also einen Augenblick von dieser Annahme abstrahiren, so haben wir durch die Vergleichung der beiden letzten Gleichungen:

$$\text{Const.} = -\frac{1}{2}\left(\frac{d(z)}{dt}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{d(z)}{dt}\right)^2$$

mit alleiniger Rücksicht auf das in der rechten Seite enthaltene constante Glied. Die mittlere Bewegung, so wie sie ohne das Dasein der störenden Kräfte beschaffen wäre, ist nach dem Vorhergehenden

$$= n\ (1 - c - c_{,})$$

und daher für die vorhergehende Gleichung:

$$nz = n\ (1 + c + c_{,})\ t$$

also:

$$\left(\frac{d(z)}{dt}\right) = c + c_{,}\ \ ;\ \ \left(\frac{d(z)}{dt}\right)^2 = c^2 + k$$

wo k das constante Glied ist, welches bei der Quadrirung aus den periodischen Gliedern entsteht. Wir haben daher:

$$\text{Const.} = -\frac{1}{2}\,c - \frac{1}{2}\,c_{,} + \frac{1}{4}\,c^2 + \frac{1}{4}\,k$$

Berücksichtigen wir nun den Einfluſs der rücksichtlich der groſsen Achse gemachten Bedingung, so finden wir durch dieselbe Rechnung, die im Artikel 9. ausgeführt ist:

Digitized by Google

$$la_0 - la = -\tfrac{2}{3}\, l\,(1-c-c)$$

oder bis auf Gröſsen der zweiten Ordnung incl. genau

$$\tfrac{2}{3}\,c + \tfrac{2}{3}\,c_, + \tfrac{1}{3}\,c^2$$

fügen wir nun diese Gröſse dem obigen Ausdrucke für die Constante hinzu, so haben wir vollständig:

$$\text{Const.} = \tfrac{1}{6}\,c + \tfrac{1}{6}\,c' + \tfrac{7}{12}\,c^2 + \tfrac{1}{4}\,k$$

Es ist also, weil das Glied $\frac{1}{6}c$ schon in der ersten Approximation berücksichtigt ist, für die Störungen der zweiten Ordnung:

$$(62)\ldots. l(r) = -\tfrac{1}{2}\int\overline{\left(\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}\right)}\,dt + \tfrac{1}{2}\int\overline{\left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right)\left(\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}\right)}\,dt + \tfrac{1}{6}\,c_, + \tfrac{7}{12}\,c^2 + \tfrac{1}{4}\,k$$

Um das zweite Glied der rechten Seite zu finden, dient das bereits für die Störungen der Länge berechnete Product $T\left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right)$. Denn da bis auf Gröſsen erster Ordnung incl. genau

$$T_1 = \frac{d^2\zeta}{d\tau\, dt}$$

ist, so haben wir:

$$(63)\ldots. \quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right)^2 = \int T_1\left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right) dt + \text{Const.}$$

wo die Constante eine Function von τ oder vielmehr von γ sein kann. Es ergiebt sich aus dieser Gleichung, wenn wir sie nach τ differentiiren, τ in t verwandeln und hierauf nach t integriren:

$$(64)\ldots. \quad \int\overline{\left(\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}\right)\left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right)}\,dt = \int\overline{\left(\frac{\int T_1\left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right)dt}{d\tau}\right)}\,dt + \overline{\text{Const.}}$$

Diese überstrichene Constante ist also eine Function von nt oder vielmehr von g. Um sie zu bestimmen, müssen wir einen bestimmten Werth einer jeden Seite der Gleichung (63) mit einander vergleichen. Wir wollen τ in t verwandeln, woraus sich ergiebt:

$$(65)\ldots. \quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{d(z)}{dt}\right)^2 = \overline{\left(\int T_1\left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right)dt\right)} + \overline{\text{Const.}}$$

Digitized by Google

Die überstrichene Constante bleibt, weil sie bloſs g enthält, unverändert, wie wir auch über g', g' etc. verfügen. Wir wollen daher, weil dies das Einfachste ist, $g' = g'' =$ etc. $= 0$ machen und unter dieser Annahme

$$\frac{\left(\frac{d(z)}{dt}\right)}{\left(\int T_1 \left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right) dt\right)} \begin{matrix} = \phi(g) \\ = \psi(g) \end{matrix}$$

setzen. Wir haben daher, wenn wir diese Werthe in (65) substituiren, für die Bestimmung der Constante folgende Gleichung:

$$\overline{\text{Const.}} = \tfrac{1}{2} (\phi(g))^2 - \psi(g) \qquad \ldots.(66)$$

Die hier vorgeschriebene Rechnung ist leicht auszuführen, wie man sehen wird, wenn ich zur Darlegung der numerischen Rechnungen komme. Das wirklich constante Glied der Gleichung (63) ist, wenn man es verdoppelt, die Gröſse, die vorhin k genannt wurde. Die Berücksichtigung dieser kleinen Glieder ist für den Saturn und Jupiter eigentlich überflüssig, aber ich habe sie der Vollständigkeit wegen nicht übergeben wollen.

Wenn man die Gröſsen zweiter Ordnung in $n\zeta$ zweimal nach τ differentiirt und das Differential des zweiten Gliedes in (62) hinzu addirt hat, so nimmt $\frac{dl(r)}{dt}$ folgende Form an, worin die mit t^2 multiplicirten Glieder nur mit Argumenten, worin $g' = g'' = 0$ ist, behaftet erscheinen:

$$\begin{aligned} \frac{dl(r)}{dt} = {} & nA_s \sin X + nA_c \cos X + nB_s nt \sin X + nB_c nt \cos X \\ & + nC_s n^2t^2 \sin X + nC_c n^2t^2 \cos X \end{aligned} \qquad \ldots.(67)$$

Das Integral hiervon findet sich durch theilweise Integration wie folgt:

$$\begin{aligned} l(r) = {} & - \{fA_s - f^2B_c - 2f^3C_s\} \cos X + \{fA_c + f^2B_s - 2f^3C_c\} \sin X \\ & - \{fB_s - 2f^2C_c\}\, nt \cos X \qquad + \{fB_c + 2f^2C_s\}\, nt \sin X \\ & - \quad fC_s n^2t^2 \cos X \qquad\qquad + \quad fC_c n^2t^2 \sin X \end{aligned} \qquad \ldots.(68)$$

Das Glied, in dessen Argument $g = g' = g'' = 0$ ist, macht hier wieder eine Ausnahme; das Integral davon ist, mit Hinzufügung der Constante der Gleichung (62), welches den vorstehenden Werth von $l(r)$ ergänzt,

Digitized by Google

(69).... $$l(r) = \frac{1}{6} c_{,} + \frac{7}{12} c^2 + \frac{1}{4} k + A_{,} nt + \frac{1}{2} B_{,} n^2 t^2$$

Es ist wohl kaum nöthig zu erinnern, daſs in den vorstehenden Gleichungen, wie früher, X für $ig + i'g' + i''g''$ und f für $\frac{n}{in + i'n' + i''n''}$ geschrieben ist. Das vorher zu berechnende Integral $\int T_{,} \left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right) dt$ kann nach denselben Formeln ausgeführt werden, wenn man nur X die Bedeutung $\varkappa\gamma + ig + i'g' + i''g''$ giebt.

Wir haben nun, um die Richtigkeit der berechneten Störungen der zweiten Ordnung zu prüfen, eine ähnliche Gleichung wie in der ersten Approximation. Die Gleichung (61) giebt nemlich:

(70).... $$S = 2l(r) + \left(\frac{d(z)}{dt}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{d(z)}{dt}\right)^2$$

wo für das letzte Glied sein Werth aus (65) genommen wird. Eben so haben wir für die übrigen Planeten:

$$S' = 2l(r') + \left(\frac{d(z')}{dt}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{d(z')}{dt}\right)^2$$

$$S'' = 2l(r'') + \left(\frac{d(z'')}{dt}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{d(z'')}{dt}\right)^2$$

etc.

wo, wie immer,

$$S = \int \frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{d\Omega}{dv}\right) dt$$

$$S' = \int \frac{a'n'}{\sqrt{1-e'^2}} \left(\frac{d\Omega'}{dv'}\right) dt$$

$$S'' = \int \frac{a''n''}{\sqrt{1-e''^2}} \left(\frac{d\Omega''}{dv''}\right) dt$$

etc.

ist. Die folgende Gleichung, welche im Artikel 9. für die Störungen erster Ordnung die Bedingungsgleichung ergab,

$$\frac{\mu}{m'}\left(\frac{d\Omega_{,}}{dv}\right) + \frac{\mu'}{m}\left(\frac{d\Omega'_{,}}{dv'}\right) = -\frac{\mu}{m'}\left(\frac{d\Omega_{,}}{d\Theta}\right)$$

läſst sich folgendermaaſsen auf eine beliebige Anzahl von Planeten ausdehnen. Es ist

Digitized by Google

$$\Omega_{,} = \frac{m'}{\mu}\,\frac{1}{\Delta_{,}} + \frac{m''}{\mu}\,\frac{1}{\Delta_{,,}} + \frac{m'''}{\mu}\,\frac{1}{\Delta_{,,,}} + \text{etc.}$$

$$\Omega'_{,} = \frac{m}{\mu'}\,\frac{1}{\Delta'} + \frac{m''}{\mu'}\,\frac{1}{\Delta'_{,,}} + \frac{m'''}{\mu'}\,\frac{1}{\Delta'_{,,,}} + \text{etc.}$$

$$\Omega''_{,} = \frac{m}{\mu''}\,\frac{1}{\Delta''} + \frac{m'}{\mu''}\,\frac{1}{\Delta''_{,}} + \frac{m'''}{\mu''}\,\frac{1}{\Delta''_{,,,}} + \text{etc.}$$

$$\Omega'''_{,} = \frac{m}{\mu'''}\,\frac{1}{\Delta'''} + \frac{m'}{\mu'''}\,\frac{1}{\Delta'''_{,}} + \frac{m''}{\mu'''}\,\frac{1}{\Delta'''_{,,}} + \text{etc.}$$

etc.

Hier bedeutet $\Delta^{(\alpha)}_{(\beta)}$ sowohl als $\Delta^{(\beta)}_{(\alpha)}$ die Entfernung der Planeten $m^{(\alpha)}$ und $m^{(\beta)}$; es ist also $\Delta^{(\alpha)}_{(\beta)} = \Delta^{(\beta)}_{(\alpha)}$.

Es ist eine characteriſtiſche Eigenſchaft der Gröſsen Ω, daſs

$$\left(\frac{d\Omega_{,}}{dv}\right)+\left(\frac{d\Omega_{,}}{dv'}\right)+\left(\frac{d\Omega_{,}}{dv''}\right)+\left(\frac{d\Omega_{,}}{dv'''}\right)+\text{etc.} = -\left(\frac{d\Omega_{,}}{d\Theta_{,}}\right)-\left(\frac{d\Omega_{,}}{d\Theta_{,,}}\right)-\left(\frac{d\Omega_{,}}{d\Theta_{,,,}}\right)-\text{etc.}$$

$$\left(\frac{d\Omega'_{,}}{dv}\right)+\left(\frac{d\Omega'_{,}}{dv'}\right)+\left(\frac{d\Omega'_{,}}{dv''}\right)+\left(\frac{d\Omega'_{,}}{dv'''}\right)+\text{etc.} = -\left(\frac{d\Omega'_{,}}{d\Theta'}\right)-\left(\frac{d\Omega'_{,}}{d\Theta'_{,,}}\right)-\left(\frac{d\Omega'_{,}}{d\Theta'_{,,,}}\right)-\text{etc.}$$

$$\left(\frac{d\Omega''_{,}}{dv}\right)+\left(\frac{d\Omega''_{,}}{dv'}\right)+\left(\frac{d\Omega''_{,}}{dv''}\right)+\left(\frac{d\Omega''_{,}}{dv'''}\right)+\text{etc.} = -\left(\frac{d\Omega''_{,}}{d\Theta''}\right)-\left(\frac{d\Omega''_{,}}{d\Theta''_{,}}\right)-\left(\frac{d\Omega''_{,}}{d\Theta''_{,,,}}\right)-\text{etc.}$$

$$\left(\frac{d\Omega'''_{,}}{dv}\right)+\left(\frac{d\Omega'''_{,}}{dv'}\right)+\left(\frac{d\Omega'''_{,}}{dv''}\right)+\left(\frac{d\Omega'''_{,}}{dv'''}\right)+\text{etc.} = -\left(\frac{d\Omega'''_{,}}{d\Theta'''}\right)-\left(\frac{d\Omega'''_{,}}{d\Theta'''_{,}}\right)-\left(\frac{d\Omega'''_{,}}{d\Theta'''_{,,}}\right)-\text{etc.}$$

etc. etc. etc.

wo $\Theta^{(\alpha)}_{(\beta)}$ der aufſteigende Knoten der Planetenbahn $m^{(\beta)}$ auf der Planetenbahn $m^{(\alpha)}$ iſt. Da aber alle Ω Functionen von $2\Theta^{(\alpha)}_{(\beta)}$ ſind, ſo können wir hier auch $\Theta^{(\alpha)}_{(\beta)}$ und $\Theta^{(\beta)}_{(\alpha)}$ mit einander verwechſeln.

Die Differentiation des erſten Syſtems von Gleichungen giebt uns:

$$\left(\frac{d\Omega_{,}}{dv}\right) = \frac{m'\mu'}{m\mu}\left(\frac{d\Omega'_{,}}{dv}\right) + \frac{m''\mu''}{m\mu}\left(\frac{d\Omega''_{,}}{dv}\right) + \frac{m'''\mu'''}{m\mu}\left(\frac{d\Omega'''_{,}}{dv}\right) + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{d\Omega'_{,}}{dv'}\right) = \frac{m\mu}{m'\mu'}\left(\frac{d\Omega_{,}}{dv'}\right) + \frac{m''\mu''}{m'\mu'}\left(\frac{d\Omega''_{,}}{dv'}\right) + \frac{m'''\mu'''}{m'\mu'}\left(\frac{d\Omega'''_{,}}{dv'}\right) + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{d\Omega''_{,}}{dv''}\right) = \frac{m\mu}{m''\mu''}\left(\frac{d\Omega_{,}}{dv''}\right) + \frac{m'\mu'}{m''\mu''}\left(\frac{d\Omega'_{,}}{dv''}\right) + \frac{m'''\mu'''}{m''\mu''}\left(\frac{d\Omega'''_{,}}{dv''}\right) + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{d\Omega'''_{,}}{dv'''}\right) = \frac{m\mu}{m'''\mu'''}\left(\frac{d\Omega_{,}}{dv'''}\right) + \frac{m'\mu'}{m'''\mu'''}\left(\frac{d\Omega'_{,}}{dv'''}\right) + \frac{m''\mu''}{m'''\mu'''}\left(\frac{d\Omega''_{,}}{dv'''}\right) + \text{etc.}$$

Digitized by Google

Ferner ist zufolge der obigen Bemerkung:

$$m\mu\left(\frac{d\Omega_{,}}{d\Theta_{,}}\right) = m'\mu'\left(\frac{d\Omega'_{,}}{d\Theta'}\right) \quad ; \quad m\mu\left(\frac{d\Omega_{,}}{d\Theta_{,,}}\right) = m''\mu''\left(\frac{d\Omega''_{,}}{d\Theta''}\right) \quad ;$$

$$m\mu\left(\frac{d\Omega_{,}}{d\Theta_{,,,}}\right) = m'''\mu'''\left(\frac{d\Omega'''_{,}}{d\Theta'''}\right) \quad ; \quad m'\mu'\left(\frac{d\Omega'_{,}}{d\Theta'_{,,}}\right) = m''\mu''\left(\frac{d\Omega''_{,}}{d\Theta''_{,}}\right) \quad ;$$

$$m'\mu'\left(\frac{d\Omega'_{,}}{d\Theta'_{,,,}}\right) = m'''\mu'''\left(\frac{d\Omega'''_{,}}{d\Theta'''_{,}}\right) \quad ; \quad m''\mu''\left(\frac{d\Omega''_{,}}{d\Theta''_{,,,}}\right) = m'''\mu'''\left(\frac{d\Omega'''_{,}}{d\Theta'''_{,,}}\right) \quad ;$$

etc. etc. etc. etc.

Aus der Combination der vorstehenden Gleichungen bekommt man nun leicht die folgende, welche für vier Planeten vollständig hingeschrieben ist.

$$m\mu\left(\frac{d\Omega_{,}}{dv}\right) + m'\mu'\left(\frac{d\Omega'_{,}}{dv'}\right) + m''\mu''\left(\frac{d\Omega''_{,}}{dv''}\right) + m'''\mu'''\left(\frac{d\Omega'''_{,}}{dv'''}\right) + \text{etc.} =$$

$$- m\,\mu\left\{\left(\frac{d\Omega_{,}}{d\Theta_{,}}\right) + \left(\frac{d\Omega_{,}}{d\Theta_{,,}}\right) + \left(\frac{d\Omega_{,}}{d\Theta_{,,,}}\right) + \text{etc.}\right\}$$

$$- m'\mu'\left\{\left(\frac{d\Omega'_{,}}{d\Theta'_{,,}}\right) + \left(\frac{d\Omega'_{,}}{d\Theta'_{,,,}}\right) + \text{etc.}\right\}$$

$$- m''\mu''\left\{\left(\frac{d\Omega''_{,}}{d\Theta''_{,,,}}\right) + \text{etc.}\right\}$$

$$- \text{etc.}$$

Wenn die Differentialquotienten von Ω bis auf eine gewisse Ordnung in Beziehung auf die Massen entwickelt sind, so muſs nothwendig diese Gleichung von selbst in so viele Gleichungen zerfallen, als verschiedene Combinationen der Massen vorhanden sind. Für die Störungen zweiter Ordnung giebt daher die Verbindung eines jeden störenden Planeten mit dem gestörten sowohl, wie die Verbindung der Coordinaten des gestörten mit den mit seiner Masse multiplicirten Gröſsen abgesonderte Gleichungen; wir brauchen daher bei der Entwickelung der Bedingungsgleichungen für die Störungen zweiter Ordnung auch nur zwei Planeten zu berücksichtigen; die so entstehenden Gleichungen können, wenn sie mit der vorstehenden verglichen werden, bei jeder beliebigen Anzahl von Planeten angewendet werden. Wir brauchen also nur, um zu unserm Zweck zu gelangen, die Gleichungen (31) des

Digitized by Google

Artikel 9. oder vielmehr die Gleichung, aus welcher diese entstanden ist, bis auf Gröſsen zweiter Ordnung genau zu entwickeln.

Die in der Gröſse $\left(\frac{d\Omega}{d\Theta_,}\right)$ enthaltenen Gröſsen zweiter Ordnung können unbedenklich Null gesetzt werden, denn man hat gesehen, daſs sie für die Störungen erster Ordnung bei dem Jupiter und Saturn schon gleich Null hätte gesetzt werden können. Es ist selbst wahrscheinlich, daſs die in ihr enthaltenen Gröſsen zweiter Ordnung für weit gröſsere Neigungen als die des Jupiters und Saturns gleich Null gesetzt werden können; übrigens ist es nicht schwierig, diese Glieder zn berücksichtigen. Wir haben es hier also eigentlich nur mit den in $\left(\frac{d\Omega'}{dv'}\right)$, $\left(\frac{d\Omega_,}{dv}\right)$, $\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}$ und $\frac{a'n'}{\sqrt{1-e'^2}}$ enthaltenen Gröſsen zweiter Ordnung zu thun, und diese führen, wegen der zwischen ihren Differentialquotienten statt findenden Relationen, auf einfache Ausdrücke, die jeder mit Benutzung des hier obwaltenden Princips leicht wird ableiten können. Deshalb und weil ich die Bedingungsgleichung doch nicht anwenden kann, bevor ich die Störungen der zweiten Ordnung des Jupiters berechnet habe, übergehe ich bis dahin die Entwickelungen.

Schlieſslich bemerke ich, daſs die obige Bedingungsgleichung für die verschiedenen Ω, auch statt findet für die im Artikel 12. ψ genannte Gröſse, wenn man sie mit den analogen, den andern Planeten zukommenden Gröſsen verbindet.

28.

Wir haben, wenn wir die Gleichungen (32) des Artikel 10. auf eine beliebige Anzahl störender Planeten ausdehnen:

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} = &- \frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \cos I \left(\frac{d\Omega}{dQ}\right) + \frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \frac{P}{1+\cos I} \left[\left(\frac{d\Omega}{dv}\right) + Q\left(\frac{d\Omega}{dP}\right) - P\left(\frac{d\Omega}{dQ}\right)\right] \\
&- \frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \cos I_, \left(\frac{d\Omega}{dQ_,}\right) + \frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \frac{P_,}{1+\cos I_,} \left[\left(\frac{d\Omega}{dv}\right) + Q_,\left(\frac{d\Omega}{dP_,}\right) - P_,\left(\frac{d\Omega}{dQ_,}\right)\right] \\
&- \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.} \\
\frac{dq}{dt} = & \frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \cos I \left(\frac{d\Omega}{dP}\right) + \frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \frac{Q}{1+\cos I} \left[\left(\frac{d\Omega}{dv}\right) + Q\left(\frac{d\Omega}{dP}\right) - P\left(\frac{d\Omega}{dQ}\right)\right] \\
&+ \frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \cos I_, \left(\frac{d\Omega}{dP_,}\right) + \frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \frac{Q_,}{1+\cos I_,} \left[\left(\frac{d\Omega}{dv}\right) + Q_,\left(\frac{d\Omega}{dP_,}\right) - P_,\left(\frac{d\Omega}{dQ_,}\right)\right] \\
&+ \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Digitized by Google

wobei man jedoch bemerken muſs, daſs unter $\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)$, wo diese Gröſse mit P oder Q multiplicirt ist, nur der Theil des vollständigen Werthes verstanden wird, welcher in der ersten Approximation von den Coordinaten der Planeten m und m' abhängt, und daſs von derselben Gröſse, wo sie mit $P_{,}$ oder $Q_{,}$ multiplicirt ist, nur der Theil genommen werden soll, welcher von den Coordinaten der Planeten m und m'' abhängt, und so ferner.

Um die Störungen der zweiten Ordnung in Beziehung auf die Massen zu bekommen, müssen wir die vorstehenden Gleichungen als Functionen von $\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}$; nz, $n'z'$, $n''z''$, etc. lr, lr', lr'' etc. P, Q, $P_{,}$, $Q_{,}$ etc. betrachten, also demgemäſs differentiiren und in das erste Glied des Taylorschen Theorems substituiren. Da

$$\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dv}\right) = \frac{dS}{dt}$$

ist, so ist es vortheilhaft, in den vorstehenden Gleichungen bei den Differentiationen die Glieder, welche $\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)$ enthalten, von den übrigen abzusondern. Setzen wir daher:

$$\frac{d\overset{\text{I}}{p}}{dt} = \frac{dp}{dt} - \frac{P}{1+\cos \text{I}}\,\frac{d\overset{\text{I}}{S}_{,}}{dt} - \frac{P_{,}}{1+\cos \text{I}_{,}}\,\frac{d\overset{\text{II}}{S}_{,}}{dt} - \text{etc.}$$

$$\frac{d\overset{\text{I}}{q}}{dt} = \frac{dq}{dt} - \frac{Q}{1+\cos \text{I}}\,\frac{d\overset{\text{I}}{S}_{,}}{dt} - \frac{Q_{,}}{1+\cos \text{I}_{,}}\,\frac{d\overset{\text{II}}{S}_{,}}{dt} - \text{etc.}$$

wo $\overset{\text{I}}{S}_{,}$, $\overset{\text{II}}{S}_{,}$ etc. resp. die Theile von S bedeuten, die in Beziehung auf das eben Gesagte von den Coordinaten der Planeten m und m' und von denen der Planeten m und m'' u. s. w. abhängen; bezeichnen wir ferner mit S_2 die Störungen zweiter Ordnung in S, und erinnern wir uns, daſs

$$\delta \,.\, l \,.\, \frac{an}{\sqrt{1-e^2}} = - S$$

ist, so ergeben sich die Differentiale der Störungen zweiter Ordnung wie folgt, wo indeſs nur Ein störender Planet berücksichtigt ist, weil die Glieder, die ein zweiter und dritter erzeugt, leicht den dastehenden analog hinzugefügt werden können.

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} = &-\left(\frac{d\overset{\text{I}}{p}}{dt}\right)\mathrm{S}_{,} + \left(\frac{d^2\overset{\text{I}}{p}}{dg\,dt}\right)n(z) + r\left(\frac{d^2\overset{\text{I}}{p}}{dr\,dt}\right)l(r) \\
&+ \left(\frac{d^2\overset{\text{I}}{p}}{dg'dt}\right)n'(z') + r'\left(\frac{d^2\overset{\text{I}}{p}}{dr'dt}\right)l(r') + \text{etc.} \\
&- \left[\left(\frac{d^2\overset{\text{I}}{p}}{dP\,dt}\right) + \left(\frac{d\overset{\text{I}}{\mathrm{S}}_{,}}{dt}\right)\frac{d\,.\,\frac{P}{1+\cos\mathrm{I}}}{dP}\right](p'+p) \\
&\qquad - \left[\left(\frac{d^2\overset{\text{I}}{p}}{dQ\,dt}\right) + \left(\frac{d\overset{\text{I}}{\mathrm{S}}_{,}}{dt}\right)\frac{d\,.\,\frac{P}{1+\cos\mathrm{I}}}{dQ}\right](q'+q) + \text{etc.} \\
&+ \frac{(P)}{1+\cos(\mathrm{I})}\left(\frac{d\mathrm{S}_{2}}{dt}\right) + \text{etc.} \\
\frac{dq}{dt} = &-\left(\frac{d\overset{\text{I}}{q}}{dt}\right)\mathrm{S}_{,} + \left(\frac{d^2\overset{\text{I}}{q}}{dg\,dt}\right)n(z) + r\left(\frac{d^2\overset{\text{I}}{q}}{dr\,dt}\right)l(r) \\
&+ \left(\frac{d^2\overset{\text{I}}{q}}{dg'dt}\right)n'(z') + r'\left(\frac{d^2\overset{\text{I}}{q}}{dr'dt}\right)l(r') + \text{etc.} \\
&- \left[\left(\frac{d^2\overset{\text{I}}{q}}{dP\,dt}\right) + \left(\frac{d\overset{\text{I}}{\mathrm{S}}_{,}}{dt}\right)\frac{d\,.\,\frac{Q}{1+\cos\mathrm{I}}}{dP}\right](p'+p) \\
&\qquad - \left[\left(\frac{d^2\overset{\text{I}}{q}}{dQ\,dt}\right) + \left(\frac{d\overset{\text{I}}{\mathrm{S}}_{,}}{dt}\right)\frac{d\,.\,\frac{Q}{1+\cos\mathrm{I}}}{dQ}\right](q'+q) + \text{etc.} \\
&+ \frac{(Q)}{1+\cos(\mathrm{I})}\left(\frac{d\mathrm{S}_{2}}{dt}\right) + \text{etc.}
\end{aligned}\right\}\ldots(71)$$

Wir wollen jetzt, indem wir die Ausdrücke für die in den vorstehenden Formeln enthaltenen Differentialquotienten entwickeln, von dem im Art. 10. Vorgetragenen Gebrauch machen, und demzufolge Θ auſserhalb Ω gleich Null setzen. Wir haben demnach sogleich:

$$\frac{d\overset{\text{I}}{p}}{dt} = \frac{dp}{dt}$$

$$\frac{d\overset{\text{I}}{q}}{dt} = \frac{dq}{dt} - \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{I}\,\frac{d\overset{\text{I}}{\mathrm{S}}_{,}}{dt} - \mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{I}_{,}\,\frac{d\overset{\text{II}}{\mathrm{S}}_{,}}{dt} - \text{etc.}$$

oder wenn wir die im Art. 10. gegebenen Werthe von $\frac{dp}{dt}$ und $\frac{dq}{dt}$ substituiren und für zwei störende Planeten hinschreiben:

$$\frac{d\overset{1}{p}}{dt} = -\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{d\mathrm{I}}\right) \qquad - \frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{d\mathrm{I}_{,}}\right) \qquad - \text{etc.}$$

$$\frac{d\overset{1}{q}}{dt} = \frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{d\Theta}\right)\frac{1}{\sin \mathrm{I}} + \frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{d\Theta_{,}}\right)\frac{1}{\sin \mathrm{I}_{,}} + \text{etc.}$$

Die Entwickelung dieser Gleichungen kann aus demselben Artikel ohne Weiteres entnommen werden. Da diese nach den Vielfachen der Anomalien g, g', g'' etc. geordnet sind, so ist hinsichtlich der Differentialquotienten der Gröſsen $\frac{d\overset{1}{p}}{dt}$ und $\frac{d\overset{1}{q}}{dt}$ nach g, g', g'' etc. nichts anderes zu thun als geradezu in Beziehung auf diese zu differentiiren. Wir haben ferner:

$$r\left(\frac{d^2\overset{1}{p}}{dr\,dt}\right) = -\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\,r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,d\mathrm{I}}\right) \qquad - \frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\,r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,d\mathrm{I}_{,}}\right) \qquad - \text{etc.}$$

$$r\left(\frac{d^2\overset{1}{q}}{dr\,dt}\right) = \frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\,r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,d\Theta}\right)\frac{1}{\sin \mathrm{I}} + \frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\,r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,d\Theta_{,}}\right)\frac{1}{\sin \mathrm{I}_{,}} + \text{etc.}$$

Da die Entwickelung dieser Gleichungen nach Anleitung des Vorhergehenden gemacht werden kann und da wir die bezüglichen Differentialquotienten von Ω schon bei der Berechnung der Störungen der Länge gebraucht haben, so bietet sie weiter nichts Bemerkenswerthes dar. Die Gröſsen

$$r'\left(\frac{d^2\overset{1}{p}}{dr'dt}\right)\;;\; r''\left(\frac{d^2\overset{1}{p}}{dr''dt}\right)\;;\; \text{etc.}\;;\; r'\left(\frac{d^2\overset{1}{q}}{dr'dt}\right)\;;\; r''\left(\frac{d^2\overset{1}{q}}{dr''dt}\right)\;;\; \text{etc.}$$

ergeben sich aus jenen vermittelst der Gleichungen:

$$-\left(\frac{d\overset{1}{p}}{dt}\right) = r\left(\frac{d^2\overset{1}{p}}{dr\,dt}\right) + r'\left(\frac{d^2\overset{1}{p}}{dr'dt}\right) + r''\left(\frac{d^2\overset{1}{p}}{dr''dt}\right) + \text{etc.}$$

$$-\left(\frac{d\overset{1}{q}}{dt}\right) = r\left(\frac{d^2\overset{1}{q}}{dr\,dt}\right) + r'\left(\frac{d^2\overset{1}{q}}{dr'dt}\right) + r''\left(\frac{d^2\overset{1}{q}}{dr''dt}\right) + \text{etc.}$$

wobei die in den Artikeln 20 und 21. gemachten Bemerkungen ebenfalls anzubringen sind. Für die Entwickelung der vier Gröſsen

Digitized by Google

$$\left(\frac{d^2\overset{1}{p}}{dPdt}\right)+\frac{d.\frac{dP}{1+\cos I}}{dP}\left(\frac{d\overset{1}{S}}{dt}\right)\;;\;\left(\frac{d^2\overset{1}{p}}{dQdt}\right)+\frac{d.\frac{P}{1+\cos I}}{dQ}\left(\frac{d\overset{1}{S}}{dt}\right)\;;$$

$$\left(\frac{d^2\overset{1}{q}}{dPdt}\right)+\frac{d.\frac{Q}{1+\cos I}}{dP}\left(\frac{d\overset{1}{S}}{dt}\right)\;;\;\left(\frac{d^2\overset{1}{q}}{dQdt}\right)+\frac{d.\frac{Q}{1+\cos I}}{dQ}\left(\frac{d\overset{1}{S}}{dt}\right)$$

die ich zur Abkürzung der Reihe nach mit A, B, C, D bezeichnen werde, will ich einige Hülfsgröſsen anführen. Wir haben (H. 18.):

$$dI=\frac{\sin\Theta}{\cos I}\,dP+\frac{\cos\Theta}{\cos I}\,dQ$$

$$d\Theta=\frac{\cos\Theta}{\sin I}\,dP-\frac{\sin\Theta}{\sin I}\,dQ$$

also wenn man $\Theta=0$ macht:

$$\left(\frac{dI}{dP}\right)=0\;;\;\left(\frac{dI}{dQ}\right)=\frac{1}{\cos I}\;;\;\left(\frac{d\Theta}{dP}\right)=\frac{1}{\sin I}\;;\;\left(\frac{d\Theta}{dQ}\right)=0$$

woraus

$$\frac{d.\cos I}{dP}=0\;;\;\frac{d.\cos I}{dQ}=-\operatorname{tg}I\;;\;\frac{d.\frac{1}{1+\cos I}}{dP}=0\;;\;\frac{d.\frac{1}{1+\cos I}}{dQ}=\frac{\operatorname{tg}I}{(1+\cos I)^2}\;;$$

sich ergiebt. Ferner stehen die Werthe von $\frac{d\overset{1}{p}}{dt}$ und $\frac{d\overset{1}{q}}{dt}$ vollständig folgendermaaſsen:

$$\frac{d\overset{1}{p}}{dt}=-\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left[\cos I\left(\frac{d\Omega}{dQ}\right)-\frac{PQ}{1+\cos I}\left(\frac{d\Omega}{dP}\right)+\frac{P^2}{1+\cos I}\left(\frac{d\Omega}{dQ}\right)\right]-\text{etc.}$$

$$\frac{d\overset{1}{q}}{dt}=\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left[\cos I\left(\frac{d\Omega}{dP}\right)+\frac{Q^2}{1+\cos I}\left(\frac{d\Omega}{dP}\right)-\frac{PQ}{1+\cos I}\left(\frac{d\Omega}{dQ}\right)\right]+\text{etc.}$$

und wenn man diese Ausdrücke mit Berücksichtigung der vorstehenden Gleichungen differentiirt, so ergiebt sich leicht:

$$A=-\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left[\cos I\left(\frac{d^2\Omega}{dPdQ}\right)-\frac{\sin I}{1+\cos I}\left(\frac{d\Omega}{dP}\right)\right]+\frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}I}\left(\frac{d\overset{1}{S}}{dt}\right)$$

$$B=-\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left[\cos I\left(\frac{d^2\Omega}{dQ^2}\right)-\operatorname{tg}I\left(\frac{d\Omega}{dQ}\right)\right]$$

Digitized by Google

$$C = \frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left[\left(\frac{d^2\Omega}{dP^2}\right) - \frac{\sin I}{1+\cos I}\left(\frac{d\Omega}{dQ}\right)\right]$$

$$D = \frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d^2\Omega}{dPdQ}\right) + \frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}I\cos I}\left(\frac{d\overset{1}{S}}{dt}\right)$$

wo in den Differentialquotienten von Ω noch $\Theta = 0$ gemacht werden muſs, in so fern dieser Bogen isolirt vorkommt. Wir erhalten diese Differentialquotienten durch die Differentiation der Gleichungeu

$$\left(\frac{d\Omega}{dP}\right) = \left(\frac{d\Omega}{dI}\right)\frac{\sin\Theta}{\cos I} + \left(\frac{d\Omega}{d\Theta}\right)\frac{\cos\Theta}{\sin I}$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dQ}\right) = \left(\frac{d\Omega}{dI}\right)\frac{\cos\Theta}{\cos I} - \left(\frac{d\Omega}{d\Theta}\right)\frac{\sin\Theta}{\sin I}$$

mit Berücksichtigung der eben gegebenen Werthe von $\left(\frac{dI}{dP}\right)$ etc. Die leicht auszuführende Rechnung giebt:

$$\left(\frac{d^2\Omega}{dP^2}\right) = \left(\frac{d^2\Omega}{d\Theta^2}\right)\frac{1}{\sin^2 I} + \left(\frac{d\Omega}{dI}\right)\frac{1}{\sin I\cos I}$$

$$\left(\frac{d^2\Omega}{dPdQ}\right) = \left(\frac{d^2\Omega}{dId\Theta}\right)\frac{1}{\sin I\cos I} - \left(\frac{d\Omega}{d\Theta}\right)\frac{1}{\sin^2 I}$$

$$\left(\frac{d^2\Omega}{dQ^2}\right) = \left(\frac{d^2\Omega}{dI^2}\right)\frac{1}{\cos^2 I} + \left(\frac{d\Omega}{dI}\right)\frac{\sin I}{\cos^3 I}$$

substituirt man diese Ausdrücke sowohl als die folgenden:

$$\left(\frac{d\Omega}{dP}\right) = \left(\frac{d\Omega}{d\Theta}\right)\frac{1}{\sin I}$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dQ}\right) = \left(\frac{d\Omega}{dI}\right)\frac{1}{\cos I}$$

in die obigen für A, B, C, D, so bekommt man:

(72)..
$$\begin{cases} A = -\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left[\left(\frac{d^2\Omega}{dId\Theta}\right)\frac{1}{\sin I} - \left(\frac{d\Omega}{d\Theta}\right)\frac{1}{\sin^2 I}\right] + \frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}I}\left(\frac{d\overset{1}{S}}{dt}\right) \\ B = -\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d^2\Omega}{dI^2}\right)\frac{1}{\cos I} \\ C = \frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left[\left(\frac{d^2\Omega}{d\Theta^2}\right)\frac{1}{\sin^2 I} + \left(\frac{d\Omega}{dI}\right)\frac{1}{\sin I}\right] \\ D = \frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left[\left(\frac{d^2\Omega}{dId\Theta}\right)\frac{1}{\sin I\cos I} - \left(\frac{d\Omega}{d\Theta}\right)\frac{1}{\sin^2 I}\right] + \frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}I\cos I}\left(\frac{d\overset{1}{S}}{dt}\right) \end{cases}$$

Digitized by Google

Statt der Gleichungen (71) haben wir nun die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} = &-\left(\frac{d\overset{1}{p}}{dt}\right) S_{,} + \left(\frac{d^2\overset{1}{p}}{dg\,dt}\right) n(z) + r\left(\frac{d^2\overset{1}{p}}{dr\,dt}\right) l(r) \\
&+ \left(\frac{d^2\overset{1}{p}}{dg'dt}\right) n'(z') + r'\left(\frac{d^2\overset{1}{p}}{dr'dt}\right) l(r') + \text{etc.} \\
&- A\,(p'+p) - B\,(q'+q) - \text{etc.} \\
\frac{dq}{dt} = &-\left(\frac{d\overset{1}{q}}{dt}\right) S_{,} + \left(\frac{d^2\overset{1}{q}}{dg\,dt}\right) n(z) + r\left(\frac{d^2\overset{1}{q}}{dr\,dt}\right) l(r) \\
&+ \left(\frac{d^2\overset{1}{q}}{dg'dt}\right) n'(z') + r'\left(\frac{d^2\overset{1}{q}}{dr'dt}\right) l(r') + \text{etc.} \\
&- C\,(p'+p) - D\,(q'+q) - \text{etc.} \\
&+ \text{tg}\,\tfrac{1}{2}\,I\left(\frac{dS_2}{dt}\right) + \text{etc.}
\end{aligned}\right\} \ldots.(73)$$

wie man sieht, fügt das letzte Glied der Gröſse q selbst unmittelbar den Ausdruck $\text{tg}\,\frac{1}{2}\,I\,.\,S_2 + \text{etc.}$ hinzu.

Die Ausdrücke für die ersten Differentialquotienten von $\Omega_{,}$, welche ich im Artikel 13. gegeben habe, geben leicht die zweiten Differentialquotienten nach I und Θ folgendergestalt:

$$\left(\frac{d^2\Omega_{,}}{dI^2}\right) = 3\,\frac{\mu}{m'}\,\Delta_{,}\left(\frac{d\Omega_{,}}{dI}\right)^2 + \left(\frac{d\Omega_{,}}{dI}\right)$$

$$\left(\frac{d^2\Omega_{,}}{dI\,d\Theta}\right) = 3\,\frac{\mu}{m'}\,\Delta_{,}\left(\frac{d\Omega_{,}}{dI}\right)\left(\frac{d\Omega_{,}}{d\Theta}\right) + \text{cotg}\,\frac{1}{2}\,I\left(\frac{d\Omega_{,}}{d\Theta}\right)$$

$$\left(\frac{d^2\Omega_{,}}{d\Theta^2}\right) = 3\,\frac{\mu}{m'}\,\Delta_{,}\left(\frac{d\Omega_{,}}{d\Theta}\right)^2 - 4\,\frac{rr'\sin^2\frac{1}{2}\,I\cos(u+u')}{\Delta_{,}^3}$$

Die Entwickelung der zweiten Differentialquotienten von $\Omega_{,,}$ geschieht nach den Formeln (36) des Artikel 12., nachdem man darin für σ, η, λ, ζ ihre resp. Differentialquotienten substituirt hat. Diese bekommt man durch zweimalige Differentiation der Ausdrücke (35) ohne Mühe, wie folgt:

$$\left(\frac{d^2\eta}{dI^2}\right) = -\frac{1}{2}\,aa'\cos I\sin(\pi-\Theta)\sin(\pi'-\Theta)$$

$$\left(\frac{d^2\eta}{\sin I\,dI\,d\Theta}\right) = \frac{1}{2}\,aa'\sin(\pi+\pi'-2\Theta)$$

Digitized by Google

$$\left(\frac{d^2 r}{\sin^2 1 d\Theta^2}\right) = -\frac{1}{2}\,\frac{aa'}{\cos^2 \frac{1}{2} I}\cos(\pi+\pi'-2\Theta)$$

und ferner hieraus resp.:

$$\left(\frac{d^2 \zeta}{d1^2}\right);\ \left(\frac{d^2 \zeta}{\sin 1 d1 d\Theta}\right);\ \left(\frac{d^2 \zeta}{\sin^2 1 d\Theta^2}\right)$$

wenn man $\pi'+90°$ für π' schreibt und mit $\sqrt{1-e'^2}$ multiplicirt;

$$\left(\frac{d^2 \lambda}{d1^2}\right);\ \left(\frac{d^2 \lambda}{\sin 1 d1 d\Theta}\right);\ \left(\frac{d^2 \lambda}{\sin^2 1 d\Theta^2}\right)$$

wenn man $\pi-90°$ für π schreibt und mit $\sqrt{1-e^2}$ multiplicirt:

$$\left(\frac{d^2 \tau}{d1^2}\right);\ \left(\frac{d^2 \tau}{\sin 1 d1 d\Theta}\right);\ \left(\frac{d^2 \tau}{\sin^2 1 d\Theta^2}\right)$$

wenn man $\pi+90°$ für π, $\pi'+90°$ für π' schreibt und mit $\sqrt{1-e^2}.\sqrt{1-e'^2}$ multiplicirt.

Für die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns wird von der Reihenentwickelung dieser Gröſsen nur ein einziges, nemlich das constante Glied gebraucht. Aus diesem Grunde habe ich sie nicht nach der im Artikel 13. gegebenen Methode berechnet, sondern Rechnungen benutzt, die ich bereits vor ein paar Jahren mit den hier zum Grunde gelegten Elementen nach einer der La Place'schen ähnlichen Methode ausgeführt, aber wieder liegen gelassen habe, weil ich sah, daſs ich die gewünschte Genauigkeit nicht überall erreichen würde. Für den Zweck, um den es sich hier handelt, sind diese Hülfsgröſsen, wie ich weiter unten zeigen werde, hinreichend genau.

Wir haben hiermit alles, was zur vollständigen Berechnung der Störungen der zweiten Ordnung in p und q erforderlich ist. Das was im Artikel 25. über die Art der Ausführung der Multiplicationen gesagt ist, findet hier ebenfalls Anwendung.

Die periodischen Glieder der zwei Factoren irgend eines der in (73) vorkommenden Producte geben durch Addition und Subtraction der Argumente im Producte wieder periodische Glieder; sie geben durch Subtraction auch ein constantes Glied. Das mit nt in dem einen Factor eines Products multiplicirte Glied giebt, wie früher, die Verän-

Digitized by Google

derungen der Störungscoëfficienten, die der Zeit proportional sind; sie geben überdies ein Glied, welches nur mit nt multiplicirt ist, aus welchem bei der Integration in p und q ein Glied entsteht, welches dem Quadrate der Zeit proportional ist.

Die allgemeine Form der rechten Seite der Gleichungen (71) ist also nach den ausgeführten Multiplicationen:

$$nH_{\prime} \cos X + nH_{\prime} \sin X + nH'_{\prime} nt \cos X + nH'_{\prime} nt \sin X$$

wo X für $ig + i'g' + i''g''$ geschrieben ist. Das Integral hiervon ist, mit Ausnahme des Gliedes, wo $X = 0$:

$$\{fH_{\prime} + f^2 H'_{\prime}\} \sin X - \{fH_{\prime} - f^2 H'_{\prime}\} \cos X$$
$$+ fH'_{\prime} nt \sin X - fH'_{\prime} nt \cos X$$

Das Integral des Gliedes $X = 0$ ist:

$$H_{\prime} nt + \tfrac{1}{2} H'_{\prime} n^2 t^2$$

29.

Ich komme jetzt zur Darlegung der numerischen Rechnungen, welche ich für die Störungen zweiter Ordnung gemacht habe. Von diesen sind aber nur die des Saturns vollendet; es ist mir von dem Zeitpunkte an, wo ich zu dem Besitze der angewendeten Methode gelangte, bis zu dem Termine, den die Königl. Akademie für die Lösung der Preisfrage gesetzt hat, nicht Zeit genug geblieben, um auch den Jupiter vollständig zu berechnen. Es läſst sich aber mit Gewiſsheit voraussehen, daſs die Berechnung der Störungen zweiter Ordnung des Jupiters weniger Arbeit kosten werde wie die des Saturns, weil dort die störende Kraft kleiner ist, die Vorschriften daher, welche für die Bewegung des Saturns ausführbar sind, werden es mit mehrerem Grunde für die Störungen des Jupiters sein. Der Uranus kann in der Bewegung des Saturns merkliche Störungen, sowohl erster als zweiter Ordnung hervorbringen, allein da die Königl. Akademie in ihrer Preisfrage diese nicht verlangt hat, so habe ich keine Rücksicht darauf genommen; die hier gegebene Methode gestattet, sie, wenn man will, hinzuzufügen, und

Digitized by Google

um die mit verschiedenen Massen multiplicirten Glieder von einander getrennt zu erhalten, ist es sogar nothwendig, diese genannten Störungen abgesondert von den andern zu berechnen, obgleich einige von den nemlichen Argumenten abhängen und daher vor der Berechnung der Störungen zweiter Ordnung zu denen erster Ordnung hätten addirt werden können.

Die Tafel XXI. giebt die Entwickelungscoëfficienten der Gröſse $\Omega_{,}$, welche für die Berechnung der Störungen zweiter Ordnung der Länge und des Logarithmus des Radius Vectors erforderlich sind. Die Überschriften zeigen zur Genüge, was in den verschiedenen Columnen enthalten ist. Wegen der sehr kleinen gegenseitigen Neigung der Bahnen des Jupiters und Saturns fügen die Gröſsen P und Q den übrigen Störungen nur höchst Unbedeutendes hinzu, die hieher gehörigen Differentialquotienten stehen daher gröſstentheils nur da, um aufs Deutlichste zu zeigen, daſs man sie fast eben so gut hätte vernachlässigen können. Die Tafeln XXII. bis XXV. geben die Hülfsgröſsen, welche aus jenen nach Hinzufügung des aus $\Omega_{,,}$ entstehenden Theils, welcher bereits in den Tafeln, die der ersten Approximation angehören, enthalten ist, durch die Formeln (46) und (49) berechnet sind. Bei dem Producte $nZ \times \int T d\tau$, welches in der Tafel XXVI. gegeben ist, will ich etwas länger stehen bleiben und einige bemerkenswerthe Glieder, welche dieses darbietet, näher erklären.

Vor allen Dingen aber bemerke ich, daſs ich dem Artikel 23. gemäſs Γ für x in dem Factor nZ, und γ für x in dem Factor $\int T d\tau$ geschrieben habe; ferner ist hier, so wie in allen nachfolgenden Tafeln, um das wiederholte Hinschreiben der Null zu vermeiden, in allen mit nt multiplicirten Gliedern 0,"00001 zur Einheit angenommen worden.

30.

Es ist bereits im Art. 24. gesagt worden, daſs die Coëfficienten von $\cos(\Gamma - \gamma)$ und von $\frac{\sin}{\cos}(\Gamma + \gamma)$, die nicht zugleich mit nt multiplicirt sind, Null werden; dies kann auf folgende Art leicht bewiesen werden. Seien irgend zwei Glieder in nZ

$= a \sin(\Gamma+X) + b \cos(\Gamma+X) + c \sin(-\Gamma+X) + d \cos(-\Gamma+X)$

wo X für $ig+i'g'$ geschrieben ist; dann sind nothwendig die Glieder in $\int T_1 d\tau$, welche in Verbindung mit jenen die genannten Argumente hervorbringen,

$= ha \cos(\gamma+X) - hb \sin(\gamma+X) + hc \cos(-\gamma+X) - hd \sin(-\gamma+X)$

wo h für $\frac{in+i'n'}{n}$ geschrieben ist. Die Multiplication dieser Glieder giebt ohne Schwierigkeit:

$$\begin{aligned}
&h\,(a^2+b^2-c^2-d^2)\sin(\Gamma-\gamma) + h\,(ab-ba+ad-da)\cos(\Gamma-\gamma)\\
&+ h\,(ac+bd-ca-db)\sin(\Gamma+\gamma) + h\,(ad+cb-da-bc)\cos(\Gamma+\gamma)\\
&= h\,(a^2+b^2-c^2-d^2)\sin(\Gamma-\gamma)
\end{aligned}$$

welches nothwendig für je vier betreffende Glieder, also auch für das ganze Product statt finden muſs. In den gleichnamigen aber, mit nt multiplicirten Gliedern verhält es sich gerade umgekehrt; sie können nur durch die beiden folgenden Glieder

$$\alpha nt \sin\Gamma + \beta nt \cos\Gamma$$

in nZ und

$$\beta \cos\gamma + \alpha \sin\gamma$$

in $\int T_1 d\tau$ hervorgebracht werden, deren Product

$$\begin{aligned}
&= (\alpha\beta+\beta\alpha)\,nt \sin(\Gamma+\gamma) + (\beta^2-\alpha^2)\,nt\cos(\Gamma+\gamma)\\
&\quad (\alpha\beta-\beta\alpha)\,nt\sin(\Gamma-\gamma) + (\beta^2+\alpha^2)\,nt\cos(\Gamma-\gamma)
\end{aligned}$$

Die Coëfficienten von $\Gamma \left.{\sin \atop \cos}\right\}\gamma$ und $\gamma \left.{\sin \atop \cos}\right\}\Gamma$ sind bis auf ein einziges Glied einander gleich, aber mit entgegengesetzten Zeichen behaftet. Dieses Glied habe ich, um es bemerkbar zu machen, in der Tafel abgesondert und mit zwei Decimalen mehr angesetzt, weil es nach der Integration mit t^2 multiplicirt sein wird. Die Sache verhält sich so: Seien irgend drei Glieder in nZ

$$\begin{aligned}
\xi\Gamma \sin X + \lambda\Gamma\cos X + \delta \sin(\Gamma+X) + \varepsilon\cos(\Gamma+X)\\
+ \eta\sin(-\Gamma+X) + \theta\cos(-\Gamma+X)
\end{aligned}$$

dann sind die drei correspondirenden in $\int T d\tau$, welche in Verbindung mit jenen die genannten Argumente hervorbringen können, folgende:

Digitized by Google

$$h\xi\gamma \cos X - h\lambda\gamma \sin X + h\delta \cos(\ \ \gamma+X) - h\varepsilon \sin(\ \ \gamma+X)$$
$$+ h\eta \cos(-\gamma+X) - h\vartheta \sin(-\gamma+X)$$

und im Producte ergeben sich:

$$\begin{aligned}
&- h\ (\xi\delta + \varepsilon\lambda - \xi\eta - \lambda\vartheta)\ \Gamma \sin\gamma \\
&- h\ (\varepsilon\xi - \lambda\delta + \xi\vartheta - \lambda\eta)\ \Gamma \cos\gamma \\
&+ h\ (\xi\delta + \varepsilon\lambda - \xi\eta - \lambda\vartheta)\ \gamma \sin\Gamma \\
&+ h\ (\varepsilon\xi - \lambda\delta + \xi\vartheta - \lambda\eta)\ \gamma \cos\Gamma
\end{aligned}$$

Die Verbindung solcher Glieder giebt also die genannten Coëfficienten bis auf das Zeichen einander völlig gleich, und dies findet für das ganze Product bis auf Ein Glied statt. Nemlich das Glied in nZ, welches dem folgenden in $\int T d\tau$ correspondirt,

$$\beta \cos\gamma + \alpha \sin\gamma$$

weicht von der obigen Form ab, indem es mit nt multiplicirt ist, und daher entsteht im Coëfficienten von $\Gamma \left.{\sin \atop \cos}\right\} \gamma$ ein Glied, welches nicht in dem von $\gamma \left.{\sin \atop \cos}\right\} \Gamma$, sondern in $\ldots nt \left.{\sin \atop \cos}\right\} \Gamma$ das ihm correspondirende hat. Die obigen Glieder zeigen zu gleicher Zeit, daſs das constante, mit $\gamma\Gamma$ multiplicirte Glied Null ist, denn multiplicirt man die ersten Glieder der obigen Ausdrücke mit einander, so bekommt man zum Product:

$$h\ (\xi\lambda - \lambda\xi)\ \gamma\Gamma$$

welches offenbar Null ist.

Man darf aus diesem jedoch nicht folgern, daſs man bei der Multiplication die obigen vier Glieder, welche sich hier gegenseitig aufheben, weglassen könnte, denn bei der Addition der Argumente addiren diese Theile sich, welche hier subtrahirt werden. — In jede Abtheilung der Tafel gehört zum vollständigen Producte noch ein Glied, welches mit $\gamma \left.{\sin \atop \cos}\right\} X$ multiplicirt ist; da diese Glieder aber bei den nachher zu machenden Differentiationen von selbst verschwinden, so habe ich sie gar nicht aufgenommen. Die Glieder $\left.{\sin \atop \cos}\right\} X$, $\Gamma \left.{\sin \atop \cos}\right\} X$ fallen ebenfalls bei den Differentiationen aus, aber ich habe sie beibehalten, weil sie zur Prüfung der Rechnung dienen.

Nicht nur die hier angeführten Glieder des Products, sondern auch die übrigen, in welchen X nicht Null ist, bieten rücksichtlich

Digitized by Google

der Factoren, welche sie durch die Multiplication bekommen, manches Merkwürdige dar, von dem ich das Wesentlichste anführen will, weil es nützlich sein kann, es zu wissen, wenn die Bewegungen zweier oder dreier Planeten nahe commensurabel sind. Ich werde mich auf den Fall der genäherten Commensurabilität zweier Planeten beschränken, weil dieser für den Jupiter und Saturn statt findet und weil das, was ich sagen werde, leicht auf drei Planeten ausgedehnt werden kann.

Da die Argumente $\Gamma-\gamma+\pi' g'+\pi g$ und $-\Gamma+\gamma+\pi' g'+\pi g$, in welchen π' und π beliebige ganze Zahlen sind, nach den Differentiationen und der Verwandelung von Γ in γ in das Argument $0\gamma+\pi' g'+\pi g$ übergehen und ein solches Argument bei der nachherigen Integration in Beziehung auf τ den Factor x bekommt, so scheint es, daſs sie im Endresultat mit $\left(\frac{n}{\pi' n'+\pi n}\right)^2$ multiplicirt sein werden; ferner scheint es, als ob die Coëfficienten der Argumente $-\Gamma-\gamma+\pi' g'+\pi g$ und $\Gamma+\gamma+\pi' g'+\pi g$ im Endresultat mit $\frac{n}{\pi' n'+\pi n}$ multiplicirt sein werden; dem ist aber nicht immer so, denn sie erhalten oftmals durch die vorhergegangene Multiplication den Factor $\frac{\pi' n'+\pi n}{n}$. Dies läſst sich auf folgende Art zeigen. Wir wollen aus nZ folgende Glieder ausheben:

$$\frac{n}{p'n'+pn} a \sin(\Gamma+p'g'+pg) + \frac{n}{p'n'+pn} b \cos(\Gamma+p'g'+pg)$$
$$+ \frac{n}{p'n'+pn} e \sin(-\Gamma+p'g'+pg) + \frac{n}{p'n'+pn} f \cos(-\Gamma+p'g'+pg)$$
$$+ \frac{n}{q'n'+qn} c \sin(-\Gamma+q'g'+qg) + \frac{n}{q'n'+qn} d \cos(-\Gamma+q'g'+qg)$$
$$+ \frac{n}{q'n'+qn} h \sin(\Gamma+q'g'+qg) + \frac{n}{q'n'+qn} k \cos(\Gamma+q'g'+qg)$$

und aus $\int T_1 d\tau$ die folgenden:

$$a \cos(\gamma+p'g'+pg) - b \sin(\gamma+p'g'+pg)$$
$$+ e \cos(-\gamma+p'g'+pg) - f \sin(-\gamma+p'g'+pg)$$
$$+ c \cos(-\gamma+q'g'+qg) - d \sin(-\gamma+q'g'+qg)$$
$$+ h \cos(\gamma+q'g'+qg) - k \sin(\gamma+q'g'+qg)$$

Wie man leicht sieht, haben hier h und p und q nicht die ihnen früher beigelegte Bedeutung, sondern sie sind, jener ein numerischer

Coëfficient, und diese ganze Zahlen. Das Product dieser Glieder ist, mit alleiniger Rücksicht auf die Argumente, welche $(p' \pm q')\,g$ und $(p \pm q)\,g$ enthalten:

$$n\,\frac{(p'+q')\,n'+(p+q)\,n}{(p'n'+pn)\,(q'n'+qn)}\,(ec-fd)\sin(-\Gamma-\gamma+(p'+q')\,g'+(p+q)\,g)$$

$$+\,n\,\frac{(p'+q')\,n'+(p+q)\,n}{(p'n'+pn)\,(q'n'+qn)}\,(ed+fc)\cos(-\Gamma-\gamma+(p'+q')\,g'+(p+q)\,g)$$

$$-\,n\,\frac{(p'-q')\,n'+(p-q)\,n}{(p'n'+pn)\,(q'n'+qn)}\,(eh+fk)\sin(-\Gamma-\gamma+(p'-q')\,g'+(p-q)\,g)$$

$$-\,n\,\frac{(p'-q')\,n'+(p-q)\,n}{(p'n'+pn)\,(q'n'+qn)}\,(fh-ek)\cos(-\Gamma-\gamma+(p'-q')\,g'+(p-q)\,g)$$

$$+\,n\,\frac{(p'+q')\,n'+(p+q)\,n}{(p'n'+pn)\,(q'n'+qn)}\,(ah-bk)\sin(\Gamma+\gamma+(p'+q')\,g'+(p+q)\,g)$$

$$+\,n\,\frac{(p'+q')\,n'+(p+q)\,n}{(p'n'+pn)\,(q'n'+qn)}\,(ak+bh)\cos(\Gamma+\gamma+(p'+q')\,g'+(p+q)\,g)$$

$$-\,n\,\frac{(p'-q')\,n'+(p-q)\,n}{(p'n'+pn)\,(q'n'+qn)}\,(ac+db)\sin(\Gamma+\gamma+(p'-q')\,g'+(p-q)\,g)$$

$$+\,n\,\frac{(p'-q')\,n'+(p-q)\,n}{(p'n'+pn)\,(q'n'+qn)}\,(da-cb)\cos(\Gamma+\gamma+(p'-q')\,g'+(p-q)\,g)$$

$$+\left\{\frac{n}{q'n'+qn}(he-fk)+\frac{n}{p'n'+pn}(ac-bd)\right\}\sin(\Gamma-\gamma+(p'+q')\,g'+(p+q)\,g)$$

$$+\left\{\frac{n}{q'n'+qn}(hf+ke)+\frac{n}{p'n'+pn}(bc+ad)\right\}\cos(\Gamma-\gamma+(p'+q')\,g'+(p+q)\,g)$$

$$+\left\{\frac{n}{q'n'+qn}(ca-bd)+\frac{n}{p'n'+pn}(eh-fk)\right\}\sin(-\Gamma+\gamma+(p'+q')\,g'+(p+q)\,g)$$

$$+\left\{\frac{n}{q'n'+qn}(cb+ad)+\frac{n}{p'n'+pn}(hf+ke)\right\}\cos(-\Gamma+\gamma+(p'+q')\,g'+(p+q)\,g)$$

$$+\left\{\frac{n}{p'n'+pn}(ah+bk)-\frac{n}{q'n'+qn}(ce+df)\right\}\sin(\Gamma-\gamma+(p'-q')\,g'+(p-q)\,g)$$

$$+\left\{\frac{n}{p'n'+pn}(bh-ak)+\frac{n}{q'n'+qn}(de-cf)\right\}\cos(\Gamma-\gamma+(p'-q')\,g'+(p-q)\,g)$$

$$+\left\{\frac{n}{p'n'+pn}(ec+fd)-\frac{n}{q'n'+qn}(ha+kb)\right\}\sin(-\Gamma+\gamma+(p'-q')\,g'+(p-q)\,g)$$

$$+\left\{\frac{n}{p'n'+pn}(fc-ed)+\frac{n}{q'n'+qn}(ka-hb)\right\}\cos(-\Gamma+\gamma+(p'-q')\,g'+(p-q)\,g)$$

Wenn wir in den letzten acht Argumenten Γ in γ verwandeln, so gehen die Glieder in folgende über:

Digitized by Google

$$+ n \frac{(p'+q')n'+(p+q)n}{(p'n'+pn)(q'n'+qn)}(ch-fk+ac-bd) \sin(0\gamma+(p'+q')g'+(p+q)g)$$
$$+ n \frac{(p'+q')n'+(p+q)n}{(p'n'+pn)(q'n'+qn)}(hf+kc+bc+ad) \cos(0\gamma+(p'+q')g'+(p+q)g)$$
$$- n \frac{(p'-q')n'+(p-q)n}{(p'n'+pn)(q'n'+qn)}(ha+kb+ce+df) \sin(0\gamma+(p'-q')g'+(p-q)g)$$
$$+ n \frac{(p'-q')n'+(p-q)n}{(p'n'+pn)(q'n'+qn)}(ka-hb+de-cf) \cos(0\gamma+(p'-q')g'+(p-q)g)$$

Da nun die zu machenden Differentiationen hierauf keinen Einfluſs haben, so folgt aus dem Vorstehenden, daſs in $\frac{d^2\zeta}{d\tau dt}$ irgend ein Glied, dessen Argument $-2\gamma+\pi'g'+\pi g$ oder $+2\gamma+\pi'g'+\pi g$ oder $0\gamma+\pi'g'+\pi g$ ist, in so fern es aus den hier betrachteten Gliedern in nZ und in $\int T d\tau$, sei es durch Addition oder Subtraction der Argumente, entstanden ist, den Factor $\frac{\pi'n'+\pi n}{n}$ enthält; nach der Integration werden die beiden ersten Argumente also den Factor $\frac{n}{\pi'n'+\pi n}$ gar nicht, und das letztgenannte Argument ihn nur in der ersten Potenz enthalten. Hiebei sind aber noch einige Bemerkungen zu machen. Wenn $\frac{n}{\pi'n'+\pi n}$ am gröſsten unter allen $\frac{n}{i'n'+in}$ ist, so sind π' und π nothwendig incommensurabel, denn wenn $\pi'=m\varkappa'$ und $\pi=m\varkappa$ wäre, wo m, $\varkappa'$ und $\varkappa$ ganze Zahlen bedeuten, so lieſse sich aus $\frac{n}{m\varkappa'n'+m\varkappa n}$ durch Multiplication mit m die Gröſse $\frac{n}{\varkappa'n'+\varkappa n}$ hervorbringen, welche nothwendig m mal gröſser ist als jene, und da dies Verfahren sich so lange anwenden läſst, als π' und π einen gemeinschaftlichen Theiler haben, so sind sie für die gröſste jener Gröſsen nothwendig incommensurabel. Sei nun $p'+q'=\pi'$ und $p+q=\pi$, so ist nothwendig n i c h t zugleich $p'=mq'$ und $p=mq$, wo m wieder eine ganze Zahl ist, wenn wir $\frac{n}{\pi'n'+\pi n}$ für die gröſste jener Gröſsen nehmen; in den obigen Gliedern des Products, welche durch Addition zweier Argumente der Factoren entstanden sind, ist also der Coëfficient durch keinen seiner beiden Divisoren theilbar und der Factor $(p'+q')n'+(p+q)n$ existirt wirklich. Sei nun $p'-q'=\pi'$ und $p-q=\pi$; dann kann zugleich $p'=m\pi'$ und $p=m\pi$ sein, nemlich wenn auch $q'=(m-1)\pi'$ und $q=(m-1)\pi$ ist, und für diesen Fall ist der Factor eines der obigen Glieder des Products, welche durch Subtraction entstanden sind:

Digitized by Google

$$n\,\frac{(p'-q')\,n'+(p-q)\,n}{(p'n'+pn)\,(q'n'+qn)}=\frac{1}{m\,(m-1)}\cdot\frac{n}{\pi'n'+\pi n}$$

Die aus einer solchen Verbindung entstehenden Glieder enthalten also nach der Integration, wenn sie das Argument $\pm 2\gamma+\pi'g'+\pi g$ haben, den Factor $\frac{n}{\pi'n'+\pi n}$ im Quadrat, und wenn sie das Argument $0\gamma+\pi'g'+\pi g$ haben, diesen Factor in der dritten Potenz. Der einfachste Fall ist $m=2$. Aber es ist zu bemerken, daſs solche Glieder von einer höheren Ordnung in Beziehung auf die Excentricitäten und Neigungen sind. Es giebt auſserdem noch zwei Glieder, für welche die obige allgemeine Form nicht statt findet, nemlich die, welche aus der Verbindung vom Argumente $\pm\Gamma+\pi'g'+\pi g$ in nZ mit dem Argumente γ in $\int T d\tau$ entstehen, weil nemlich das diesem in nZ correspondirende Glied mit nt multiplicirt ist und also im Producte ein zu dieser Klasse gehöriges Glied giebt.

Wenn $\frac{n}{\pi'n'+\pi n}$ sehr groſs ist, so kann sich ereignen, daſs auch $\frac{n}{2\pi'n'+2\pi n}$ sehr über die andern ähnlichen Gröſsen hervorragt. Wir wollen daher diesem Argumente einige Zeilen widmen. Sei jetzt $p'+q'=2\pi'$ und $p+q=2\pi$; in so fern nun p' und q' so wie p und q von einander verschieden sind, gilt das oben für das Argument $\pi'g'+\pi g$ Gesagte hier auch, aber wenn $p'=q'$ und zugleich $p=q$ ist, so verwandelt sich der Factor

$$n\,\frac{(p'+q')\,n'+(p+q)\,n}{(p'n'+pn)\,(q'n'+qn)}\quad\text{in}\quad 2\,\frac{n}{\pi'n'+\pi n}$$

Die Verbindung solcher zwei Argumente giebt also durch die Addition im Producte Glieder, welche den Factor $\frac{n}{\pi'n'+\pi n}$ behalten; eben dieses findet auch, wie leicht einzusehen ist, für jedes Argument von der Form $m\pi'g'+m\pi g$ statt, wenn $p'=(m-1)\,q'$ und zugleich $p=(m-1)\,q$, so wie $p'+q'=m\pi'$ und $p+q=m\pi$ ist. Bei den Verbindungen, welche durch die Subtraction zweier Argumente entstehen, findet das nemliche, welches ich für das Argument $\pi'g'+\pi g$ gesagt habe, statt.

Auf die nemliche Art läſst sich beweisen, daſs die Glieder, deren Argumente in unserm Producte $\Gamma\,{}^{\sin}_{\cos}(\pm\Gamma\;0\gamma+\pi'g'+\pi g)$; $\gamma\,{}^{\sin}_{\cos}(0\gamma\pm\gamma+\pi'g'+\pi g)$; $\gamma\Gamma\,{}^{\sin}_{\cos}(0\Gamma\;0\gamma+\pi'g'+\pi g)$ sind, mit fast denselben Ausnah-

Digitized by Google

men nach der Integration nicht den Factor $\frac{n}{\pi' n' + \pi n}$ im Quadrat haben, wie es auf den ersten Anblick scheint. Es sind daher in unserm Producte nur die folgenden zwei Argumente, $\Gamma \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} (0\Gamma - \gamma + (\pi' + 1) g' + \pi g)$ und $\ldots . \Gamma \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} (0\Gamma + \gamma + (\pi' - 1) g' + \pi g)$, welche nach der Integration durchgängig das Quadrat dieses Factors haben, und zwar in so fern sie nach den vorgeschriebenen Verwandelungen zum Producte $\left(\frac{d(\Omega)}{d\tau}\right)\left(\frac{dS}{dt}\right)$ gehören.

Statt des Products $nZ \times \int T d\tau$ kann man auch das Product $nZ \times n(z)$ berechnen, und selbst mit Vortheil, denn da in beiden Factoren die Coëfficienten dieselben sind, so braucht man nur die Hälfte der Zahlen, die jenes Product erfordert (*). Für die nachherige Anwendung dieses Products wird man mit bedeutendem Vortheil einigen der Glieder in (44) eine etwas andere Form geben können; ich halte mich aber nicht länger dabei auf, da ich bei den Störungen des Saturns keinen Gebrauch davon gemacht habe, sondern bemerke bloſs, daſs ein Theil der Gleichung (44) an sich integrabel ist. Die Störungen zweiter Ordnung des Jupiters habe ich auf diese Art angefangen zu berechnen und werde, wenn sie fertig sind, das Nöthige darüber hinzufügen.

31.

Es sind für den Saturn im Allgemeinen nur sehr wenige Verbindungen, die zu einem Argumente irgend eines der Producte concurriren; hiervon machen jedoch eine Ausnahme die Verbinduugen der rein periodischen Glieder der Factoren, wodurch im Integral die mit der Zeit multiplicirten Glieder entstehen, so wie diejenigen, welche bei der Integration den groſsen Factor $\frac{n}{5n' - 2n}$ bekommen, weil in diesen beiden Fällen mehrere Decimalen angesetzt werden müssen.

Da die Königl. Akademie in ihrer Preisfrage genaue Auskunft über den Coëfficienten des Argumentes $5g' - 2g$ verlangt, so will ich die Resultate, welche jede einzelne Verbindung gegeben hat, hier anführen, sowohl die, welche das Quadrat dieses Factors bekommen, als

(*) Aber auch noch aus einer andern Ursache, die jeder wird finden können, ist die Berechnung dieses Products kürzer, wie die Berechnung jenes.

die, welche ihn nur in der ersten Potenz erhalten, denn es ist klar, daſs man, um den genauen Werth des Coëfficienten zu geben, sowohl diese wie jene berücksichtigen muſs. Hiebei habe ich mich, wie aus der ganzen Darlegung der Methode hervorgeht, nicht bloſs auf die Glieder dritter Ordnung in Beziehung auf die Excentricitäten und Neigung beschränkt, sondern, wie überall, ohne Rücksicht auf diese Art von Ordnungen alle Glieder berücksichtigt, welche die festgesetzte numerische Grenze übersteigen. Die Überschriften in den hier folgenden Tafeln sind nach der Anleitung des Artikel 24. zu verstehen, wobei ich nur zu bemerken habe, daſs die Reihenfolge der die Indices multiplicirenden Gröſsen diese Γ, γ, g', g ist. Die erste Columne jeder Tafel giebt die Argumente der darüber geschriebenen Factoren, durch deren Verbindung die in den zwei sich anschlieſsenden Zeilen befindlichen Zahlen erhalten sind. Hier habe ich, um Raum zu gewinnen, eine Abkürzung gemacht, die leicht zu vervollständigen ist; ich habe nemlich die Indices von γ zu denen von g' addirt. Also z. B. die Zahlen der beiden Zeilen des Arguments $1, -1, +5, -2$, welche mit $1, +3, -1, 1, -1$ in der ersten Columne correspondiren, sind aus den Argumenten $\Gamma + 3g' - g$ und $-\gamma + 2g' - g$ entstanden; die Zahlen derselben Zeilen, welche dem Argumente $1, 0, +4, -2$ zukommen, sind aus $\Gamma + 3g' - g$ und ....$0\gamma + g' - g$ entstanden; die Zahlen derselben Zeilen, welche dem Argumente $1, 0, +4, -2\ (\gamma)$ zugehören, sind aus $\Gamma + 3g' - g$ und dem mit γ multiplicirten Gliede $0\gamma + g' - g$ entstanden; die Zahlen des Arguments $1, +1, +3, -2$, welche mit $1, +5, -3, 1, -1$ correspondiren, sind aus $\Gamma + 5g' - 3g$ und $-\gamma + 2g' - g$ entstanden, und so ist es überall. Glieder, wie z. B. diese, welche aus $2, -1$ und $3, -1$; $1, -1$ und $6, -3$; $2, -2$ und $7, -4$; etc. entstanden sind, sind von der dritten Ordnung in Beziehung auf die Neigung und Excentricitäten, aber nach dieser Methode enthalten sie zugleich die Glieder fünfter, siebenter etc. Ordnung, in so fern diese die festgesetzte numerische Gröſse übersteigen. Die Glieder, welche aus Verbindungen, wie $2, -1$, $7, -3$; etc. entstanden sind, sind von der fünften Ordnung, aber sie enthalten zugleich die Glieder von der siebenten etc. Ordnung, wenn diese die festgesetzte numerische Gröſse übersteigen.

Digitized by Google

Der Factor $\frac{n}{5n' - 2n}$ ist für den Saturn nahe = 30, also correspondiren 0″,04 im Integral mit 0″,00133 in den Gröſsen der folgenden Tafeln für die Glieder, welche nach der Integration diesen Factor in der ersten Potenz haben, und mit 0″,00004 für die Glieder, die das Quadrat dieses Factors haben werden. Man wird finden, daſs ich von den Gliedern der ersten Gattung manche angesetzt habe, die kleiner als diese Grenzen sind; von den Gliedern der zweiten Gattung fehlt keines, das eine Einheit in der vierten Decimale überstiege; ich bin der Meinung, daſs dieses hinlänglich genau ist.

$$nZ \times \int Td\tau$$

nZ, $\int Td\tau$	0, 0, + 5, − 2		0, − 1, + 6, − 2		0, 1, + 4, − 2	
	sin	cos	sin	cos	sin	cos
0, + 1, 0, 4, − 2	− 0″,00028	+ 0″,00016	+ 0″,00021	− 0″,00011	+ 0″,00008	− 0″,00005
	+ 87	+ 160	− 96	− 176	+ 8	+ 15
0, + 2, 0, 3, − 2	− 22	+ 43	+ 23	− 45	− 1	+ 1
	+ 53	+ 27	− 59	− 30	+ 7	+ 3
0, 0, − 1, 5, − 3	+ 14	+ 68	− 15	− 78	+ 1	+ 8
	+ 1	....	− 5	+ 1	+ 5	− 1
0, 1, − 1, 4, − 1	− 52	− 257	+ 52	+ 253	....	+ 3
	− 78	+ 16	+ 111	− 23	− 25	+ 5
0, 1, − 1, 6, − 3	− 73	+ 353	+ 80	− 385	− 7	+ 32
	+ 207	+ 43	− 261	− 54	+ 53	+ 10
0, 2, − 1, 3, − 1	− 1075	+ 47	+ 1076	− 47	− 16	....
	− 11	− 243	+ 2	+ 39	+ 6	+ 126
0, 3, − 1, 2, − 1	− 287	+ 266	+ 258	− 250	+ 3	− 3
	− 296	− 319	+ 105	+ 113	+ 26	+ 93
0, 4, − 1, 1, − 1	+ 53	....	+ 4	....	− 56	....
	− 2	+ 251	....	+ 18	+ 2	− 269
0, 1, − 2, 6, − 4	− 5	+ 16	+ 7	− 23	− 2	+ 70
	− 71	− 21	+ 84	+ 24	− 12	− 3
0, + 2, − 2, 7, − 4	+ 68	+ 29	− 85	− 36	+ 17	+ 7
	− 33	+ 77	+ 37	− 86	− 3	+ 8
0, + 3, − 2, 2, 0	+ 45	− 56	− 33	+ 41	− 9	+ 11
	− 125	− 101	+ 114	+ 91	+ 10	+ 8
0, + 4, − 2, 1, 0	+ 108	− 680	− 83	+ 535	− 12	+ 79
	− 444	− 69	+ 394	+ 62	+ 49	+ 8
0, + 5, − 2, 0, 0	− 2,49582	− 5,81013	+ 1,24589	+ 2,90040	+ 1,24589	+ 2,90040
	....	....	....	....	....	....
0, + 5, − 3, 0, − 1	− 20	....	+ 25	....	− 6	....
	− 3	− 98	....	− 21	+ 3	+ 124

Digitized by Google

$$nZ \times \int Td\tau$$

nZ, $\int Td\tau$	0, 0, +5, −2		0, −1, +6, −2		0, +1, +4, −2	
	sin	cos	sin	cos	sin	cos
0, +6, −3, 1, −1	+0,″00309	−0,″00190	−0,″00333	+0,″00205	+0,″00024	−0,″00015
	− 902	− 1467	+ 964	+ 1569	− 63	− 102
0, +6, −4, 1, −2	+ 9	+ 37	− 11	− 43	....	....
	+ 144	− 36	− 211	+ 52	+ 70	− 22
0, +7, −4, 2, −2	− 74	− 82	− 7	− 8	+ 82	+ 90
	+ 36	− 32	+ 3	− 3	− 38	+ 34
Summe	−2,52049	−5,83215	+1,26750	+2,91824	+1,24773	+2,90355

$$nZ \times \int Td\tau$$

nZ, $\int Td\tau$	0, 0, +5, −2(Γ)		0, −1, +6, −2(Γ)		0, +1, +4, −2(Γ)		0, 0, 5, −2 (γΓ)	
	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos
(Γ)0, 0, 0, 5, −2	......	−0,″00245	......	+0,″00319	......	−0,″00071	......	−0,″00668
	+0,″00673	......	−0,″00706	......	+0,″00030	......	−0,″00256	......
(Γ)0, +1, 0, 4, −2	+ 22	+ 29	− 16	− 21	− 6	− 8	− 124	− 163
	+ 162	− 134	− 178	+ 136	+ 13	− 11	+ 22	− 16
(Γ)0, +2, 0, 3, −2	+ 48	+ 16	− 49	− 17	+ 2	+ 1	− 57	− 20
	+ 20	− 56	− 23	+ 63	+ 2	− 7	+ 15	− 44
(Γ)0, +1, −1, 4, −1	+ 327	− 111	− 307	+ 109	− 7	+ 1	− 240	+ 81
	− 33	− 157	+ 48	+ 223	− 11	− 51	− 96	− 432
(Γ)0, +1, −1, 6, −3	+ 718	+ 151	− 773	− 163	+ 55	+ 12	− 486	− 104
	+ 89	− 416	− 112	+ 323	+ 23	− 106	+ 139	− 748
(Γ)0, +2, −1, 3, −1	+ 297	+ 273	− 297	− 273	+ 4	+ 4	− 51	− 47
	− 82	+ 67	+ 10	− 11	+ 32	− 35	+ 226	− 245
(Γ)0, +2, −1, 7, −3	+ 5	− 5	− 5	+ 5	......	......	− 10	+ 10
	− 9	− 9	+ 10	+ 11	− 1	− 2	− 5	− 5
(Γ)0, +3, −1, 2, −1	− 92	− 395	+ 74	+ 353	+ 1	+ 5	+ 48	+ 230
	+ 440	− 91	− 155	+ 32	− 128	+ 27	− 211	+ 44
(Γ)0, +4, −1, 1, −1	− 56	− 109	− 5	− 9	+ 62	+ 118	+ 234	+ 443
	+ 519	− 274	+ 36	− 19	− 553	+ 294	+ 94	− 50
(Γ)0, +1, −2, 6, −4	+ 33	+ 7	− 50	− 10	+ 16	+ 3	+ 175	+ 35
	− 31	+ 158	+ 37	− 186	− 5	+ 27	+ 9	− 46
(Γ)0, +2, −2, 7, −4	− 19	+ 47	+ 24	− 50	− 3	+ 12	− 23	+ 88
	− 54	− 22	+ 60	+ 24	− 5	− 2	+ 56	+ 23
(Γ)0, +3, −2, 2, 0	− 37	− 29	+ 27	+ 21	+ 7	+ 6	+ 58	+ 45
	− 63	+ 82	+ 59	− 76	+ 5	− 7	+ 16	+ 20
(Γ)0, +4, −2, 1, 0	− 334	− 45	+ 261	+ 33	+ 39	+ 5	+ 128	+ 17
	− 29	+ 206	+ 26	− 194	+ 3	− 25	− 23	+ 168

$nZ \times \int T d\tau$

nZ, $\int T d\tau$	0, 0, +5, −2 (Γ) sin	cos	0, −1, +6, −2 (Γ) sin	cos	0, +1, +4, −2 (Γ) sin	cos	0, 0, +5, −2 (γΓ) sin	cos
(Γ)0, +4, −2, 0, 0	+0,20035	−0,08570	−0,10000	+0,04277	−0,10000	+0,04277	0,00000	0,00000
	......	......	......	......	......	......	0	0
(Γ)0, +5, −3, 0, −1	+ 1	+ 15	− 1	− 19	......	+ 4	0	0
	− 74	+ 4	− 15	+ 1	+ 93	− 5	0	0
(Γ)0, +6, −3, 1, −1	− 124	− 180	+ 133	+ 203	− 10	− 12	+ 499	+ 764
	− 896	+ 585	+ 958	− 625	− 62	+ 41	− 163	+ 107
(Γ)0, +7, −3, 2, −1	− 19	− 10	......	......	+ 17	+ 9	+ 11	+ 6
	− 10	+ 21	+ 3	− 6	+ 4	− 7	+ 5	− 10
(Γ)0, +6, −4, 1, −2	+ 33	− 8	− 37	+ 10	......	......	− 180	+ 46
	− 32	− 126	+ 48	+ 185	− 16	− 60	− 9	− 36
(Γ)0, +7, −4, 2, −2	− 65	+ 63	− 6	+ 6	+ 72	− 69	+ 21	− 23
	− 27	− 28	− 2	− 2	+ 29	+ 30	− 57	− 59
Summe	+0,21565	−0,09385	−0,11135	+0,04648	−0,10309	+0,04398	−0,00276	−0,00667

$nZ \times \int T d\tau$

nZ, $\int T d\tau$	1, 0, +4, −2 sin	cos	1, −1, +5, −2 sin	cos	1, +1, +3, −2 sin	cos	1, 0, +4, −2, (γ) sin	cos
1, −1, 0, 5, −2	+0,00123	......	−0,00160	......	+0,00035	......	−0,00334	......
	......	+0,00337	......	−0,00354	......	+0,00015	......	−0,00143
1, +1, 0, 3, −2	+ 12	− 11	− 12	+ 11	......	......	− 14	+ 13
	− 13	− 14	+ 15	+ 16	− 2	− 2	− 10	− 11
−1, +1, −1, 5, −3	+ 7	− 142	− 8	+ 164	+ 1	− 21	......	+ 8
	− 2	......	+ 11	+ 1	− 9	......	− 153	− 7
1, 0, −1, 4, −1	+ 82	+ 388	− 81	− 380	− 1	− 5	− 38	− 180
	+ 117	− 25	− 167	+ 35	+ 38	− 5	+ 330	− 72
−1, +2, −1, 6, −3	− 43	+ 178	+ 46	− 194	− 3	+ 16	+ 23	− 122
	+ 103	+ 25	− 130	− 32	+ 27	+ 7	+ 188	+ 45
1, +1, −1, 3, −1	+ 2	+ 54	− 2	− 54	......	......	......	− 9
	− 12	......	+ 2	......	......	......	+ 45	− 2
1, +2, −1, 2, −1	− 8	+ 60	+ 7	− 54	......	......	......	− 5
	− 67	− 9	+ 24	+ 3	+ 19	+ 2	+ 24	+ 3
1, +2, −1, 1, −1	− 5	− 37	......	− 3	+ 5	+ 39	+ 19	+ 148
	+ 173	− 22	+ 12	− 2	− 185	+ 24	+ 32	− 4
−1, +2, −2, 6, −4	......	+ 16	......	− 23	......	+ 7	......	+ 100
	− 72	......	+ 85	......	− 12	......	+ 21	......
−1, +3, −2, 7, −1	− 87	− 36	+ 108	+ 45	− 21	− 9	− 107	− 45
	+ 43	− 100	− 47	+ 109	+ 4	− 10	− 43	+ 103

$$nZ \times \int T d\tau$$

nZ,	$\int T d\tau$	1, 0, +4, −2 sin	cos	1, −1, +5, −2 sin	cos	1, +1, +3, −2 sin	cos	1, 0, +4, −2 (γ) sin	cos
1, +2, −2,	2, 0	......	......	......	+ 2	......	......	......	......
		......	......	+ 6	+ 1	......	......	......	......
1, +3, −2,	1, 0	......	......	+ 7	+ 12	......	......	......	......
		......	......	+ 9	− 6	......	......	......	......
−1, +5, −2,	9, −2	......	......	− 2	− 15	......	......	......	......
		......	......	− 4	......	......	......	......	......
1, +4, −2,	0, 0	− 73	− 31	+ 37	+ 16	+ 37	+ 16	0	0
		......	......	......	......	......	......	0	0
1, +5, −3,	1, −1	+ 9	− 17	− 9	+ 17	......	......	− 34	+ 63
		− 73	− 40	+ 80	+ 43	......	......	− 13	− 7
	Summe	+0″,00218	+0″,00574	−0″,00173	−0″,00541	−0″,00067	+0″,00074	+0″,00613	−0″,0012[illegible]

$$nZ \times \int T d\tau$$

nZ,	$\int T d\tau$	−1, 0, +6, −2 sin	cos	−1, −1, +7, −2 sin	cos	−1, +1, +5, −2 sin	cos	−1, 0, +6, −2(γ) sin	cos
−1, +1, 0,	5, −2	−0″,00123	......	+0″,00100	......	−0″,00035	......	−0″,00334	......
		......	−0″,00337	......	+0″,00354	......	−0″,00015	......	+0″,00143
−1, +2, 0,	4, −2	+ 23	− 17	− 16	+ 12	− 7	+ 5	− 127	+ 94
		− 93	− 126	+ 103	+ 139	− 9	− 11	− 13	− 17
−1, +3, 0,	3, −2	+ 15	− 41	− 15	+ 42	......	− 1	− 18	+ 49
		− 50	− 18	+ 56	+ 20	− 6	− 2	− 38	− 14
−1, +2, −1,	4, −1	− 31	− 130	+ 30	+ 127	......	+ 2	+ 14	+ 60
		− 40	+ 9	+ 56	− 13	− 13	+ 3	− 114	+ 27
1, 0, −1,	6, −3	+ 113	− 531	− 123	+ 360	+ 9	− 41	− 78	+ 363
		− 312	− 66	+ 393	+ 63	− 79	− 17	− 860	− 119
−1, +3, −1,	3, −1	− 430	− 186	+ 430	+ 198	− 7	− 3	+ 73	+ 32
		+ 42	− 97	− 7	+ 16	− 22	+ 50	− 155	+ 333
−1, +4, −1,	2, −1	− 163	− 6	+ 147	+ 5	+ 2	......	+ 95	+ 3
		+ 7	− 191	− 2	+ 64	− 2	+ 53	− 3	+ 87
−1, +5, −1,	1, −1	− 74	+ 32	− 6	+ 3	+ 80	− 35	+ 297	− 131
		− 133	− 331	− 11	− 24	+ 163	+ 375	− 28	− 64
−1, +4, −2,	2, 0	− 65	+ 86	+ 49	− 63	+ 13	− 17	+ 103	− 136
		+ 190	+ 143	− 173	− 132	− 15	− 12	+ 47	+ 35
−1, +5, −2,	1, 0	+ 1246	− 10627	− 960	+ 8372	− 145	+ 1232	− 477	+ 4060
		− 6027	− 813	+ 6145	+ 721	+ 762	+ 69	− 5343	− 627
−1, +6, −2,	0, 0	− 309	− 685	+ 134	+ 342	+ 154	+ 342	0	0
		......	......	......	......	......	......	0	0

Digitized by Google

$$nZ \times \int T d\tau$$

nZ,	$\int T d\tau$	−1, 0, +6, −2 sin	−1, 0, +6, −2 cos	−1, −1, +7, −2 sin	−1, −1, +7, −2 cos	−1, +1, +5, −2 sin	−1, +1, +5, −2 cos	−1, 0, +6, −2(γ) sin	−1, 0, +6, −2(γ) cos
−1, +6, −3,	0, −1	+0,″00027	−0,″00002	−0,″00033	+0,″00002	+0,″00008	. . . . . .	0	0
		+ 9	+ 133	+ 2	+ 28	− 11	−0,″00167	0	0
−1, +7, −3,	1, −1	− 631	+ 427	+ 679	− 460	− 50	+ 34	+0,″02550	−0,″01731
		+ 2030	+ 2093	− 2160	− 3300	+ 143	+ 209	+ 369	+ 545
−1, +7, −4,	1, −2	− 13	− 63	+ 14	+ 52	. . . . . .	. . . . . .	+ 68	+ 253
		− 177	+ 47	+ 260	− 70	− 83	+ 23	− 50	+ 14
−1, +8, −4,	2, −2	+ 100	+ 100	+ 10	+ 10	− 111	− 111	− 37	− 37
		− 41	+ 41	− 4	+ 4	+ 47	− 47	− 91	+ 91
	Summe	−0,05833	−0,10231	+0,03148	+0,07202	+0,00786	+0,01938	−0,03850	+0,03336

Da hier nur Ein störender Planet vorhanden ist, so können nirgends Argumente vorkommen, welche drei verschiedene mittlere Anomalien enthalten, und das ganze Product gehört zu den Störungen, die mit dem Quadrate der Jupitermasse multiplicirt sind.

Die Tafeln XXVII. und XXVIII. enthalten das übrige dieses Theils der Saturnstörungen, wie ihre Überschriften ausweisen. Die Glieder, welche den früher genannten Factor im Quadrat nach der Integration enthalten werden, sind natürlich diejenigen, welche das Argument $0\gamma + 5g' - 2g$ haben; die folgenden zwei Argumente bekommen ihn im Allgemeinen nur in der ersten Potenz. Ich lasse jetzt die einzelnen Glieder des Arguments $5g' - 2g$ folgen.

$$\frac{1}{n'}\left(\frac{dT}{dg'}\right) n'(z')$$

$n'(z')$,	$\frac{1}{n'}\left(\frac{dT}{dg'}\right)$	0, +5, −2 sin	0, +5, −2 cos	−1, +6, −2 sin	−1, +6, −2 cos	+1, +4, −2 sin	+1, +4, −2 cos
1, 0,	4, −2	−0,″00035	−0,″00003	+0,″00042	+0,″00004	−0,″00010	−0,″00001
		− 26	+ 261	+ 36	− 357	+ 2	− 18
2, 0,	3, −2	+ 4	− 23	− 6	+ 35	. . . .	. . . .
		− 30	− 5	+ 46	+ 6	. . . .	. . . .
3, 0,	2, −2	+ 1	− 4	− 2	+ 7	. . . .	. . . .
		− 2	− 1	+ 3	+ 1	. . . .	. . . .
0, −1,	5, −3	+ 23	− 263	− 30	+ 336	− 1	+ 13
		− 14	− 1	+ 23	+ 2	+ 12	+ 1

Digitized by Google

$$\frac{1}{n'}\left(\frac{dT}{dg'}\right) n'(z')$$

$n'(z')$	$\frac{1}{n'}\left(\frac{dT}{dg'}\right)$	0, + 5, − 2		− 1, + 6, − 2		− 1, + 4, − 2	
		sin	cos	sin	cos	sin	cos
1, − 1,	4, − 1	−0,″00011	....	+0,″00015	....	....	....
		....	+0,″00006	....	−0,″00007	....	....
1, − 1,	6, − 3	− 27	....	+ 32	....	+0,″00002	....
		....	+ 18	....	− 22	....	−0,″00003
2, − 1,	3, − 1	− 3706	− 117	+ 5985	+ 189	+ 45	+ 1
		− 24	+ 768	− 7	+ 219	+ 11	− 352
2, − 1,	7, − 3	− 180	+ 6	+ 202	− 6	− 6	....
		+ 11	+ 360	− 14	− 434	− 1	− 44
3, − 1,	2, − 1	− 489	+ 352	+ 1231	− 888	− 6	+ 4
		+ 383	+ 531	+ 387	+ 537	− 107	− 148
4, − 1,	1, − 1	+ 23	− 2	− 4	....	0	0
		+ 9	+ 106	− 2	− 17	0	0
0, − 2,	5, − 4	....	+ 4	....	− 5	....	....
		+ 14	+ 1	− 18	− 2	− 2	....
1, − 2,	6, − 4	− 8	+ 15	+ 11	− 20	+ 2	− 4
		− 59	− 32	+ 72	+ 39	+ 7	+ 4
2, − 2,	7, − 4	− 126	− 54	+ 153	+ 65	+ 22	+ 9
		+ 55	− 128	− 64	+ 150	− 4	+ 10
2, − 2,	3, 0	− 4	+ 2	− 6	+ 3	− 1	+ 3
		− 7	− 17	− 1	− 28	+ 1	+ 1
3, − 2,	8, − 4	− 22	− 23	+ 26	+ 26	+ 3	+ 3
		+ 7	− 7	− 7	+ 7	+ 1	− 1
3, − 2,	2, 0	− 20	+ 20	+ 39	− 39	− 3	+ 3
		+ 57	+ 57	− 109	− 109	+ 3	+ 3
4, − 2,	9, − 4	+ 17	+ 145	− 19	− 163	− 2	− 15
		+ 38	− 4	− 45	+ 6	− 15	+ 2
4, − 2,	1, 0	+ 675	− 5691	− 2112	+ 17790	0	0
		− 4324	− 513	+ 13092	+ 1554	0	0
5, − 2,	10, − 4	− 28	+ 66	+ 30	− 71	+ 1	− 2
		+ 67	+ 29	− 75	− 32	− 12	− 5
5, − 2,	0, 0	0	0	+1,24779	+2,90393	+1,24779	+2,90393
		0	0	....	....	....	....
5, − 3,	0, − 1	0	0	− 7	....	+ 2	....
		0	0	....	+ 4	− 5	− 35
6, − 3,	1, − 1	+ 271	− 191	0	0	− 50	+ 351
		− 898	− 1268	0	0	+ 147	+ 207
7, − 3,	2, − 1	+ 41	− 82	− 102	+ 206	....	− 1
		+ 89	+ 44	+ 90	+ 44	− 25	− 12
6, − 4,	1, − 2	+ 1	+ 5	0	0	....	− 1
		+ 25	− 6	0	0	− 17	+ 4

Digitized by Google

$$\frac{1}{n'}\left(\frac{dT}{dg'}\right) n'(z')$$

$n'(z')$,	$\frac{1}{n'}\left(\frac{dT}{dg'}\right)$	0, 5, − 2 sin	0, 5, − 2 cos	− 1, + 6, − 2 sin	− 1, + 6, − 2 cos	− 1, + 4, −2 sin	− 1, + 4, −2 cos
7, − 4,	2, − 2	+0,00030	+0,00026	−0,00002	−0,00001	−0,00054	−0,00047
		− 11	+ 12	+ 1	− 1	+ 20	− 23
8, − 4,	3, − 2	+ 8	+ 2	....	....	+ 12	− 4
		− 3	+ 10	....	....	− 5	− 16
9, − 4,	4, − 2	− 4	+ 1	....	....	+ 6	− 1
		− 9	− 32	....	....	+ 12	+ 44
10, − 4,	5, − 2	+ 3	− 3	....	....	− 5	+ 5
		− 8	− 8	....	....	+ 11	+ 10
	Summe	−0,08223	−0,05631	+1,43663	+3,09421	+1,24769	+2,90338

$$\frac{1}{n'}\left(V - T + U - \frac{dS}{dt}\right) l(r')$$

$l(r')$,	$\frac{1}{n'}$ (Factor)	0, 5, − 2 sin	0, 5, − 2 cos	− 1, + 6, − 2 sin	− 1, + 6, − 2 cos	1, + 4, − 2 sin	1, + 4, − 2 cos
0, 0,	5, − 2	−0,00350	0,00000	+0,00437	0,00000	+0,00050	0,00000
		0	− 463	0	+ 548	0	− 16
1, 0,	4, − 2	+ 3	+ 6	− 7	− 13	− 6	− 12
		− 154	+ 79	+ 193	− 99	+ 4	− 2
2, 0,	3, − 2	− 3	− 39	+ 4	+ 50	....	− 3
		− 61	+ 5	+ 82	− 7	+ 3	....
3, 0,	2, − 2	+ 1	− 12	− 1	+ 19	....	....
		− 6	....	+ 8	+ 1	....	....
0, − 1,	5, − 3	− 24	− 76	+ 29	+ 90	+ 2	+ 6
		− 20	+ 7	+ 20	− 7	+ 6	− 2
1, − 1,	6, − 3	+ 109	− 584	− 125	+ 660	− 1	+ 4
		− 591	− 110	+ 703	+ 131	+ 58	+ 17
1, − 1,	4, − 1	− 55	− 30	+ 68	+ 367	− 7	− 37
		− 15	+ 27	+ 202	− 40	+ 27	− 5
2, − 1,	7, − 3	− 18	− 1	+ 16	+ 1	− 7	....
		− 6	+ 94	+ 6	− 107	+ 1	− 9
2, − 1,	3, − 1	+ 1433	− 86	− 1909	+ 115	+ 107	− 6
		+ 20	+ 331	− 14	− 240	+ 7	+ 115
3, − 1,	2, − 1	− 497	+ 353	+ 715	− 506	− 31	+ 22
		− 463	− 655	+ 506	+ 505	− 36	− 50
4, − 1,	1, − 1	− 39	+ 17	+ 32	− 14	+ 4	− 2
		− 80	− 183	+ 67	+ 154	+ 9	+ 20
0, − 2,	5, − 4	+ 1	....	− 2	....	....	....
		− 1	− 7	+ 1	+ 9	....	....

Digitized by Google

$$\frac{1}{n'}\left(V - T + U' - \frac{dS}{dt}\right) l(r')$$

$l(r')$,	$\frac{1}{n'}$ (Factor)	0, 5, — 2 sin	0, 5, — 2 cos	— 1, + 6, — 2 sin	— 1, + 6, — 2 cos	1, + 4, — 2 sin	1, + 4, — 2 cos
		"	"	"	"	"	"
1, — 2,	6, — 4	— 0,00003	— 0,00024	+ 0,00003	+ 0,00029	+ 0,00001	+ 0,00007
		+ 60	— 7	— 69	+ 8	— 7	+ 1
2, — 2,	7, — 4	— 128	— 56	+ 149	+ 65	+ 21	+ 9
		+ 39	— 91	— 43	+ 98	— 1	+ 2
2, — 2,	3, 0	— 10	+ 4	+ 14	— 6	....	....
		— 9	— 20	+ 12	+ 29	....	....
3, — 2,	8, — 4	— 22	— 18	+ 24	+ 20	+ 3	+ 2
		+ 1	— 1	....	....	....	....
3, — 2,	2, 0	+ 19	— 16	— 23	+ 19	+ 11	— 9
		— 65	— 79	+ 103	+ 125	— 21	— 25
4, — 2,	9, — 4	+ 7	+ 64	— 8	— 64	— 1	— 7
		+ 39	— 5	— 38	+ 4	— 17	+ 2
4, — 2,	1, 0	— 876	+ 7438	+ 1530	— 12989	— 398	+ 3369
		+ 5354	+ 631	— 11788	— 1388	+ 3286	+ 386
5, — 2,	0, 0	....	....	+ 7802	+ 14663	— 7802	— 14663
		+ 26	— 14	— 49	+ 26	— 49	+ 26
5, — 3,	0, — 1	+ 17	— 1	+ 20	— 1	— 37	+ 3
		— 6	— 79	+ 4	+ 51	+ 2	+ 31
6, — 3,	1, — 1	— 316	+ 210	+ 30	— 20	+ 260	— 174
		+ 1000	+ 1502	— 108	— 163	— 842	— 1264
7, — 3,	2, — 1	+ 27	— 61	+ 2	— 4	— 39	+ 88
		— 81	— 36	— 6	— 3	+ 88	+ 39
5, — 4,	0, — 2	....	+ 1	....	....	....	— 1
		+ 4	+ 1	....	....	— 2	— 1
6, — 4,	1, — 2	+ 2	— 7	+ 1	+ 5	+ 2	+ 8
		— 28	+ 8	+ 12	....	+ 15	— 4
7, — 4,	2, — 2	+ 45	+ 46	....	....	— 69	— 71
		— 21	+ 20	....	....	+ 31	— 30
8, — 4,	3, — 2	+ 8	— 2	....	....	— 10	+ 4
		+ 4	+ 12	....	....	— 6	— 17
9, — 4,	4, — 2	+ 1	....	....	....	— 1	....
		— 5	— 16	....	....	+ 6	+ 21
	Summe	+ 0,04267	+ 0,08177	— 0,01395	+ 0,02121	— 0,05386	— 0,12226

$$\frac{1}{n'}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{dS}{dt}\right)-\frac{1}{2}T-2U\right)S'$$

S′,	$\frac{1}{n'}$ (Factor)	0, 5, — 2 sin	0, 5, — 2 cos	— 1, + 6, — 2 sin	— 1, + 6, — 2 cos	1, + 4, — 2 sin	1, + 4, — 2 cos
0, 0,	5, — 2	— 0″,00219	0″,00000	+ 0″,00132	0″,00000	+ 0″,00086	0″,00000
		0	— 305	0	+ 220	0	+ 61
1, 0,	4, — 2	....	+ 2	....	+ 2	— 1	— 6
		— 67	+ 14	+ 45	— 10	+ 19	— 4
2, 0,	3, — 2	— 9	— 10	+ 7	+ 7	+ 9	+ 10
		— 16	+ 14	+ 10	— 9	+ 2	— 2
3, 0,	2, — 2	— 8	— 3	+ 5	+ 2	+ 3	+ 1
		— 1	+ 3	+ 1	— 2	....	— 1
0, — 1,	5, — 3	— 36	+ 167	+ 24	— 110	+ 11	— 50
		+ 28	+ 6	— 12	— 3	— 18	— 4
1, — 1,	6, — 3	+ 76	— 356	— 54	+ 251	— 17	+ 80
		— 326	— 69	+ 199	+ 42	+ 119	+ 25
1, — 1,	4, — 1	— 39	— 182	+ 30	+ 141	+ 6	+ 28
		— 224	+ 48	+ 133	— 28	+ 73	— 16
2, — 1,	7, — 3	— 1	— 1	+ 1	+ 1	....	....
		— 4	+ 6	+ 3	— 4	+ 1	— 2
2, — 1,	3, — 1	+ 118	— 87	— 84	+ 62	— 32	+ 24
		— 73	— 98	+ 37	+ 50	+ 20	+ 27
3, — 1,	2, — 1	— 65	+ 44	+ 50	— 34	+ 29	— 19
		+ 113	+ 166	— 47	— 70	— 23	— 34
4, — 1,	1, — 1	+ 19	— 35	— 7	+ 12	— 12	+ 22
		+ 163	+ 89	— 57	— 31	— 106	— 58
0, — 2,	5, — 4	+ 1	— 6	— 1	+ 4	....	+ 1
		— 27	— 6	+ 17	+ 4	+ 10	+ 2
1, — 2,	6, — 4	+ 7	— 37	— 4	+ 21	— 3	+ 16
		+ 101	+ 18	— 65	— 12	— 32	— 6
2, — 2,	7, — 4	+ 35	+ 15	— 22	— 9	— 12	— 5
		— 12	+ 28	+ 8	— 20	+ 3	— 7
2, — 2,	3, 0	+ 2	— 1	— 1	....	....	....
		+ 1	+ 3	— 2	— 4	....	....
3, — 2,	2, 0	+ 4	— 8	— 1	+ 1	— 2	+ 6
		+ 23	+ 11	— 18	— 9	— 4	— 2
4, — 2,	1, 0	+ 2	+ 9	— 6	— 23	+ 2	+ 8
		+ 53	— 14	— 37	+ 10	— 15	+ 4
5, — 2,	0, 0	....	....	+ 834	+ 634	— 834	— 634
		— 11	+ 15	+ 3	— 4	+ 3	— 4
5, — 3,	0, — 1	+ 14	— 5	— 6	+ 2	— 10	+ 3
		— 22	— 64	+ 8	+ 22	+ 18	+ 54
6, — 3,	1, — 1	— 46	+ 66	+ 30	— 43	+ 16	— 24
		+ 312	+ 218	— 201	— 141	— 109	— 77

Digitized by Google

$$\frac{1}{n'}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{dS}{dt}\right)-\frac{1}{2}T-2U\right)S'$$

S',	$\frac{1}{n'}$ (Factor)	0, 5, — 2 sin	0, 5, — 2 cos	— 1, + 6, — 2 sin	— 1, + 6, — 2 cos	1, + 4, — 2 sin	1, + 4, — 2 cos
7, — 3,	2, — 1	....	— 0,00004	....	+ 0,00002	....	+ 0,00003
		+ 0,00009	....	— 0,00002	....	— 0,00004	....
5, — 4,	0, — 2	....	+ 2	....	....	....	— 2
		+ 11	+ 2	— 4	....	— 10	— 1
6, — 4,	1, — 2	— 9	— 19	+ 6	+ 12	+ 2	+ 5
		— 80	+ 40	+ 47	— 23	+ 34	— 17
7, — 4,	2, — 2	— 32	— 18	+ 12	+ 6	+ 20	+ 11
		+ 7	— 13	— 3	+ 5	— 4	+ 8
	Summe	— 0,00228	— 0,00355	+ 0,01008	+ 0,00924	— 0,00762	— 0,00576

Die Tafeln XXIX. und XXX. geben den Theil der Störungen des Saturns, welcher von dem Zuwachs herrührt, den die rein elliptischen Coordinaten des Jupiters in der ersten Approximation erhalten haben. Diese Störungen sind also mit dem Producte der Saturn- und Jupitermasse multiplicirt. Die hier folgenden beiden Tafeln geben die hierher gehörigen Theile des Arguments $5g' - 2g$.

$$\frac{1}{n'}\left(\frac{dT}{dg}\right)n(z)$$

$n(z)$,	$\frac{1}{n'}\left(\frac{dT}{dg}\right)$	0, + 5, — 2 sin	0, + 5, — 2 cos	— 1, — 6, — 2 sin	— 1, — 6, — 2 cos	1, + 4, — 2 sin	1, + 4, — 2 cos
1, 0,	4, — 2	— 0,00010	+ 0,00005	+ 0,00010	— 0,00005	— 0,00004	+ 0,00002
		+ 38	+ 75	— 42	— 82	— 3	— 7
2, 0,	3, — 2	— 35	+ 35	+ 39	— 39	— 1	+ 1
		+ 45	+ 45	— 52	— 52	— 6	— 6
3, 0,	2, — 2	+ 10	— 15	— 12	+ 19	— 1	+ 2
		— 6	— 4	+ 8	+ 5	+ 1	....
0, — 1,	5, — 3	+ 23	+ 23	— 24	— 25	— 3	— 3
		+ 1	— 1	— 2	+ 2	— 1	+ 1
1, — 1,	6, — 3	— 34	+ 170	+ 35	— 176	+ 2	— 13
		+ 111	+ 22	— 120	— 24	— 24	— 5
1, — 1,	4, — 1	— 7	— 34	+ 8	+ 38	....	— 1
		— 18	+ 4	+ 17	— 3	— 4	— 1
2, — 1,	7, — 3	— 23	+ 1	+ 22	— 1	— 1	....
		+ 1	+ 46	— 2	— 48	....	— 7

Digitized by Google

$$\frac{1}{n'}\left(\frac{dT}{dg}\right) n(z)$$

n(z),	$\frac{1}{n'}\left(\frac{dT}{dg}\right)$	0, 5, − 2 sin	0, 5, − 2 cos	− 1, + 6, − 2 sin	− 1, + 6, − 2 cos	1, + 4, − 2 sin	1, + 4, − 2 cos
2, − 1,	3, − 1	−0″,00367	−0″,00012	+0″,00444	+0″,00014	+0″,00007	....
		− 2	+ 76	....	+ 16	+ 2	−0″,00052
3, − 1,	2, − 1	− 110	+ 71	+ 185	− 120	− 2	+ 2
		+ 78	+ 120	+ 52	+ 81	− 43	− 67
4, − 1,	1, − 1	+ 6	− 17	− 1	+ 2	− 7	+ 21
		+ 78	+ 28	− 6	− 2	− 97	− 37
0, − 2,	5, − 4	+ 18	− 18	− 19	+ 19	− 1	+ 1
		− 73	− 72	+ 78	+ 77	+ 14	+ 14
1, − 2,	6, − 4	+ 1	+ 6	− 1	− 6	....	− 2
		− 22	+ 4	+ 23	− 4	+ 3	− 1
2, − 2,	7, − 4	− 436	− 190	+ 458	+ 200	+ 90	+ 39
		+ 197	− 453	− 202	+ 463	− 18	+ 41
3, − 2,	8, − 4	+ 30	+ 41	− 32	− 42	− 5	− 6
		− 10	+ 9	+ 11	− 9	− 1	+ 1
5, − 3,	0, − 1	0	0	− 372	+ 30	− 89	+ 7
		0	0	+ 25	+ 313	+ 151	+ 1855
6, − 3,	1, − 1	− 139	+ 92	+ 173	− 115	+ 13	− 8
		+ 432	+ 650	− 541	− 815	− 35	− 53
7, − 3,	2, − 1	+ 6	− 12	....	....	− 10	+ 20
		+ 13	+ 7	− 7	− 4	+ 9	+ 4
6, − 4,	1, − 2	+ 7	+ 25	− 9	− 29	− 1	− 3
		+ 127	− 38	− 130	+ 39	− 43	+ 13
7, − 4,	2, − 2	+ 145	+ 138	− 16	− 15	− 176	− 168
		− 56	+ 58	+ 6	− 6	+ 71	− 74
8, − 4,	3, − 2	− 11	− 3	....	....	+ 12	+ 3
		+ 4	− 14	− 1	+ 2	− 4	+ 16
	Summe	+0,00012	+0,00868	+0,00003	−0,00502	−0,00205	+0,01529

$$\frac{1}{n'}\,\mathrm{V},\ l(r)$$

l(r),	$\frac{1}{n'}$ V,	0, 5, − 2 sin	0, 5, − 2 cos	− 1, + 6, − 2 sin	− 1, + 6, − 2 cos	1, + 4, − 2 sin	1, + 4, − 2 cos
0, 0,	5, − 2	−0″,00009	0″,00000	+0″,00013	0″,00000	+0″,00001	0″,00000
		0	− 9	0	+ 10	0	....
1, 0,	4, − 2	+ 4	− 1	− 4	+ 1	− 2	+ 1
		+ 7	+ 22	− 7	− 25	....	− 1

Digitized by Google

$\frac{1}{n'}$ V, $l(r)$

$l(r)$,	$\frac{1}{n'}$ V,	0, 5, − 2 sin	0, 5, − 2 cos	− 1, + 6, − 2 sin	− 1, + 6, − 2 cos	1, + 4, − 2 sin	1, + 4, − 2 cos
2, 0,	3, − 2	− 0″,00016	+ 0″,00014	+ 0″,00019	− 0″,00017	....	....
		+ 30	+ 31	− 32	− 37	− 0″,00002	− 0″,00002
3, 0,	2, − 2	+ 6	− 10	− 7	+ 13	....	....
		− 5	− 2	+ 6	+ 3	....	....
0, − 1,	5, − 3	+ 4	+ 7	− 5	− 8	....	....
		+ 3	− 2	− 2	+ 1	....	....
1, − 1,	6, − 3	− 12	+ 60	+ 12	− 64	....	....
		+ 75	+ 15	− 82	− 16	− 12	− 2
1, − 1,	4, − 1	+ 5	+ 26	− 6	− 31	....	+ 4
		+ 17	− 4	− 25	+ 5	− 2	....
2, − 1,	7, − 3	− 1	....	....	....	− 1	....
		− 1	+ 12	+ 1	− 13	....	− 1
2, − 1,	3, − 1	+ 154	− 9	− 186	+ 11	+ 9	− 52
		+ 2	+ 40	− 1	− 16	+ 1	+ 10
3, − 1,	2, − 1	− 93	+ 68	+ 105	− 77	....	....
		− 114	− 158	+ 86	+ 118	+ 5	+ 7
4, − 1,	1, − 1	− 10	+ 34	+ 5	− 16	+ 9	− 31
		− 160	− 47	+ 76	+ 23	+ 137	+ 41
1, − 2,	6, − 4	+ 1	+ 9	− 1	− 10	....	− 2
		− 19	+ 2	+ 21	− 2	+ 2	....
2, − 2,	7, − 4	− 409	− 174	+ 445	+ 188	+ 72	+ 30
		+ 105	− 247	− 106	+ 250	− 3	+ 7
2, − 2,	3, 0	− 34	+ 14	+ 42	− 18	....	....
		− 16	− 38	+ 24	+ 58	− 7	− 16
3, − 2,	8, − 4	+ 19	+ 26	− 20	− 27	− 2	− 3
		+ 1	− 1	− 2	+ 2	− 2	+ 2
3, − 2,	2, 0	+ 11	− 14	− 4	+ 6	− 11	+ 15
		+ 81	+ 59	− 126	− 192	+ 24	+ 22
4, − 2,	1, 0	− 1	+ 19	+ 3	− 54	− 2	+ 29
		+ 42	+ 2	− 79	− 5	+ 23	+ 1
5, − 2,	0, 0	0	0	+ 469	+ 728	− 469	− 728
		0	0	− 3	+ 2	− 3	+ 2
5, − 3,	0, − 1	0	0	− 283	+ 23	+ 912	− 75
		0	0	− 105	− 1261	− 140	− 1700
6, − 3,	1, − 1	+ 125	− 91	− 107	+ 78	− 58	+ 425
		− 430	− 585	+ 368	+ 501	+ 204	+ 275
7, − 3,	2, − 1	+ 2	− 7	....	....	− 3	+ 8
		− 13	− 4	....	....	+ 9	+ 3
6, − 4,	1, − 2	− 5	− 19	+ 6	+ 22	+ 3	+ 10
		− 86	+ 23	+ 74	− 20	+ 38	− 10

Digitized by Google

$\frac{1}{n'}$ V, $l(r)$

$l(r)$,	$\frac{1}{n'}$ V,	0, 5, — 2 sin	0, 5, — 2 cos	— 1, + 6, — 2 sin	— 1, + 6, — 2 cos	1, + 4, — 2 sin	1, + 4, — 2 cos
7, — 4,	2, — 2	+0,″00092	+0,″00091	—0,″00003	—0,″00003	—0,″00119	—0,″00117
		— 43	+ 43	+ 2	— 2	+ 50	— 55
8, — 4,	3, — 2	— 5	— 1	....	....	+ 6	+ 1
		+ 2	— 9	....	....	— 2	+ 11
	Summe	—0,00694	—0,00815	+0,00581	+0,00229	+0,00781	—0,01891

Die Summen in den vorstehenden Tafeln sind die Zahlen, welche man in den hinten angehängten Tafeln bei den resp. Argumenten findet. Die mit nt multiplicirten Glieder fügen bei der Integration dem Coëfficienten von $5g' - 2g$ Bedeutendes hinzu, allein da die Berechnung dieser Glieder, wie in dem Vorhergehenden gezeigt ist, sehr einfach bewerkstelligt wird, weil in jedem Producte höchstens zwei Verbindungen direct berechnet zu werden brauchen, so halte ich es für unnöthig, die einzelnen Zahlenwerthe dafür anzugeben.

Die Tafel XXXI. enthält das Wenige, was die Störungen der Gröſsen p, p', q und q' dem Vorhergehenden hinzufügen. Es ist leicht, sich durch die Vergleichung der Zahlen der Tafeln XXIII. und XXIV. mit den Werthen von p, p', q und q', die in der ersten Approximation gefunden sind, zu überzeugen, daſs die rein periodischen Störungen unmerklich sind. Die aus der Tafel XXXI. sich ergebenden Störungen sind sehr nahe, wie bekannt ist, mit dem Factor $m\left(m + \frac{an}{a'n'}m'\right)$ multiplicirt; man muſs also den verbesserten Werth dieses Factors anwenden, um sie in der Folge, wenn die angewendeten Massen einer Verbesserung bedürfen, zu berichtigen. Man könnte leicht den Theil, welcher mit m^2 multiplicirt ist, von dem, welcher den Factor $m'm$ hat, trennen, allein dies ist unnöthig, und darum habe ich es uuterlassen.

32.

Bevor ich weiter gehe, will ich noch einen Umstand berühren. Es ist bekannt, daſs in der analytischen Entwickelung von Ω der Coëf-

Digitized by Google

$\frac{1}{n'}$ V, $l(r)$

$l(r)$,	$\frac{1}{n'}$ V,	0, 5, — 2 sin	0, 5, — 2 cos	— 1, + 6, — 2 sin	— 1, + 6, — 2 cos	1, + 4, — 2 sin	1, + 4, — 2 cos
2, 0,	3, — 2	— 0,″00016	+ 0,″00014	+ 0,″00019	— 0,″00017	....	....
		+ 30	+ 31	— 32	— 37	— 0,″00002	— 0,″00002
3, 0,	2, — 2	+ 6	— 10	— 7	+ 13	....	....
		— 5	— 2	+ 6	+ 3	....	....
0, — 1,	5, — 3	+ 4	+ 7	— 5	— 8	....	....
		+ 3	— 2	— 2	+ 1	....	....
1, — 1,	6, — 3	— 12	+ 60	+ 12	— 64	....	....
		+ 75	+ 15	— 82	— 16	— 12	— 2
1, — 1,	4, — 1	+ 5	+ 26	— 6	— 31	....	+ 4
		+ 17	— 4	— 25	+ 5	— 2	....
2, — 1,	7, — 3	— 1	....	....	....	— 1	....
		— 1	+ 12	+ 1	— 13	....	— 1
2, — 1,	3, — 1	+ 154	— 9	— 186	+ 11	+ 9	— 52
		+ 2	+ 40	— 1	— 16	+ 1	+ 10
3, — 1,	2, — 1	— 93	+ 68	+ 105	— 77	....	....
		— 114	— 158	+ 86	+ 118	+ 5	+ 7
4, — 1,	1, — 1	— 10	+ 34	+ 5	— 16	+ 9	— 31
		— 160	— 47	+ 76	+ 23	+ 137	+ 41
1, — 2,	6, — 4	+ 1	+ 9	— 1	— 10	....	— 2
		— 19	+ 2	+ 21	— 2	+ 2	....
2, — 2,	7, — 4	— 409	— 174	+ 445	+ 188	+ 72	+ 30
		+ 105	— 247	— 106	+ 250	— 3	+ 7
2, — 2,	3, 0	— 34	+ 14	+ 42	— 18	....	....
		— 16	— 38	+ 24	+ 58	— 7	— 16
3, — 2,	8, — 4	+ 19	+ 26	— 20	— 27	— 2	— 3
		+ 1	— 1	— 2	+ 2	— 2	+ 2
3, — 2,	2, 0	+ 11	— 14	— 4	+ 6	— 11	+ 15
		+ 81	+ 59	— 126	— 192	+ 24	+ 22
4, — 2,	1, 0	— 1	+ 19	+ 3	— 54	— 2	+ 29
		+ 42	+ 2	— 79	— 5	+ 23	+ 1
5, — 2,	0, 0	0	0	+ 469	+ 728	— 469	— 728
		0	0	— 3	+ 2	— 3	+ 2
5, — 3,	0, — 1	0	0	— 283	+ 23	+ 912	— 75
		0	0	— 105	— 1261	— 140	— 1700
6, — 3,	1, — 1	+ 125	— 91	— 107	+ 78	— 58	+ 425
		— 430	— 585	+ 368	+ 501	+ 204	+ 275
7, — 3,	2, — 1	+ 2	— 7	....	....	— 3	+ [illegible]
		— 13	— 4	....	....	+ 9	+ [illegible]
6, — 4,	1, — 2	— 5	— 19	+ 6	+ 22	+ 3	+ [illegible]
		— 86	+ 23	+ 74	— 20	+ 38	— [illegible]

Digitized by Google

$\frac{2}{\pi}$ V [illegible]

$l(r)$,	$\frac{1}{n'}$ V.	0, 5, −2		−1, −6, −2		[illegible]	
		sin	cos	sin	cos	sin	cos
7, −4,	2, −2	+0,0009[illegible]	+0,000[illegible]	−0,000[illegible]	−0,000[illegible]	[illegible]	[illegible]
		− 43	+ 4[illegible]	− [illegible]	− [illegible]	− [illegible]	[illegible]
8, −4,	3, −2	− 5	− [illegible]	....	....	− [illegible]	[illegible]
		+ [illegible]	− [illegible]	....	....	− [illegible]	[illegible]
	Summe	−0,00634	−[illegible]	+[illegible]	−[illegible]	−[illegible]	−[illegible]

(74)

[illegible] ur

Die Summen in den vorstehenden [illegible] .in-
man in den hinten angehängten Tafeln [illegible]
Die mit nt multiplicirten Glieder [illegible] $- ig)$
cienten von $5g' - 2g$ Bedeutendes [illegible] $+ ig)$
ser Glieder, wie in dem Vorhergehenden [illegible]
werkstelligt wird, weil in jedem [illegible] des nicht
direct berechnet zu werden brauchen [illegible] ke ergiebt
einzelnen Zahlenwerthe dafür [illegible] in k' und k

Die Tafel XXXI. enthält die [illegible] inden, und
Gröſsen p, p', q und q' dem [illegible] entstehen,
sich durch die Vergleichung der [illegible] man das eine
mit den Werthen von p, [illegible] in Beziehung
gefunden sind, zu überzeugen [illegible] gehören:
unmerklich sind. Die aus der Tafel [illegible]
sind sehr nahe, wie bekannt [illegible]
tiplicirt; man muſs also [illegible]
den, um sie in der Folge [illegible] $+ (k + i) g\}$
besserung bedürfen, zu [illegible]
welcher mit m^2 multiplicirt [illegible] $+ (k + i) g\}$....(75)
trennen, allein dies [illegible]

[illegible] icht auf die
[illegible] der Gestalt

Bevor [illegible]
Es ist bekannt [illegible] $g) + W)$

Digitized by Google

ficient irgend eines Gliedes, dessen Argument $i'g' + ig$ ist, aus einer unendlichen Reihe besteht, deren Form diese

$$(E)^{(i'+i)} . A + (E)^{(i'+i+2)} . B + (E)^{(i'+i+4)} . C + \text{etc.}$$

ist, wo (E) mit dem Index $i' + i + \alpha$ eine Function der Excentricitäten und der gegenseitigen Neigung von der Ordnung $i' + i + \alpha$ ist, wobei zu bemerken, daſs man die Summe $(i' + i)$ immer positiv nehmen muſs; A, B, C, etc. sind Functionen der groſsen Achsen. Es kann sich ereignen, daſs Einer oder mehrere der Gröſsen A, B, C, etc. Null sind, aber nirgends kommt ein Glied vor, wo α negativ wäre, mit andern Worten, der Coëfficient des Arguments $i'g' + ig$ ist im Allgemeinen von der Ordnung $(i' + i)$, wenn man diese Summen positiv nimmt; es kommen Glieder vor, die um 2, 4, 6, etc. Ordnungen kleiner sind, aber keine, welche von einer niedrigeren Ordnung wären. Dies vorausgesetzt, ist leicht einzusehen, daſs in den Differentialquotienten $\left(\frac{d\Omega}{dP}\right)$ und $\left(\frac{d\Omega}{dQ}\right)$ der Coëfficient des Arguments $i'g' + ig$ im Allgemeinen von der Ordnung $(i' + i) - 1$ ist, wenn man negative Werthe dieser Gröſse ausschlieſst. Es findet daher sowohl in den Störungen von P und Q, das ist in den Gröſsen $-(p' + p)$ und $-(q' + q)$ das nemliche statt, als auch in den Gröſsen $\left(\frac{dT}{dP}\right)$ und $\left(\frac{dT}{dQ}\right)$, weil die Factoren, womit $\left(\frac{d\Omega}{dP}\right)$ und $\left(\frac{d\Omega}{dQ}\right)$ multiplicirt werden, um jene hervorzubringen, derselben Regel folgen wie Ω, welches aus den Ausdrücken (14) hervorgeht. Da nun in den vier Gröſsen $\left(\frac{dT}{dP}\right)$, $\left(\frac{dT}{dQ}\right)$, $-(p' + p)$, $-(q' + q)$ der Coëfficient von $i'g' + ig$ im Allgemeinen von der Ordnung $(i' + i) - 1$ ist, so scheint, daſs in den hieraus entstehenden Störungen der Länge der Coëfficient dieses Arguments von der Ordnung $(i' + i) - 2$ wäre, während die übrigen Störungen derselben Regel wie Ω folgen; daſs das aber nicht der Fall ist, sondern daſs dieser Coëfficient, so wie die anderweitig erzeugten, von der Ordnung $(i' + i)$ ist, oder wenigstens nicht von einer niedrigeren Ordnung, läſst sich auf folgende Art beweisen.

Wir können setzen:

$$\left(\frac{dT}{dP}\right) = f(\gamma, g)\left(\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon\, dP}\right) + \varphi(\gamma, g)\left(\frac{d^2\Omega}{dr\, dP}\right);$$

$$\left(\frac{dT}{dQ}\right) = f(\gamma, g)\left(\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon\, dQ}\right) + \varphi(\gamma, g)\left(\frac{d^2\Omega}{dr\, dQ}\right)$$

Digitized by Google

wo $f(\gamma, g)$ und $\phi(\gamma, g)$ Functionen von γ und g sind, deren Coëfficienten derselben Regel folgen wie die von Ω. Sei nun

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{d\Omega}{dP}\right) &= (i', i, c) \cos(i'g' + ig) + (i', i, s) \sin(i'g' + ig)\\ \left(\frac{d\Omega}{dQ}\right) &= [i', i, c] \cos(i'g' + ig) + [i', i, s] \sin(i'g' + ig)\end{aligned}\right\} \quad \ldots(74)$$

wo nach dem Obigen die Coëfficienten von der Ordnung $\ldots(i' + i) - 1$, oder wenigstens von keiner niedrigeren Ordnung sind. Wir haben hieraus nach Art. 10., wenn wir die übrigen Glieder, weil sie immer zur Ordnung $i + i' + 1$ gehören und daher auf unsern Beweis keinen Einfluſs haben, weglassen:

$$\begin{aligned}(p' + p) &= -h\,[i', i, c] \sin(i'g' + ig) + h\,[i', i, s] \cos(i'g' + ig)\\ (q' + q) &= \quad h\,(i', i, c) \sin(i'g' + ig) - h\,(i', i, s) \cos(i'g' + ig)\end{aligned}$$

wo h ein Coëfficient ist, der die analytische Ordnung des Gliedes nicht ändert. Durch die Multiplication der vorstehenden Ausdrücke ergiebt sich, wenn man in $\left(\frac{d\Omega}{dP}\right)$ und $\left(\frac{d\Omega}{dQ}\right)$ die Indices i' und i resp. in k' und k verwandelt, um verschiedene Glieder mit einander zu verbinden, und bloſs die Glieder, welche durch Addition der Argumente entstehen, aufnimmt, weil die andern aus diesen sich ergeben, wenn man das eine Paar der Indices negativ macht, und auch schon meistens in Beziehung auf das Argument ohne Weiteres zu einer höheren Ordnung gehören:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d\Omega}{dP}\right)(p' + p) + \left(\frac{d\Omega}{dQ}\right)(q' + q) =\\ &\frac{h}{2}\ \{(k', k, s)\,[i', i, s] - (k', k, c)\,[i', i, c]\\ &\quad + [k', k, c]\,(i', i, c) - [k', k, s]\,(i', i, s)\} \sin\{(k' + i')\,g + (k + i)\,g\}\\ &+ \frac{h}{2}\ \{(k', k, s)\,[i', i, c] + (k', k, c)\,[i', i, s]\\ &\quad - [k', k, s]\,(i', i, c) - [k', k, c]\,(i', i, s)\} \cos\{(k' + i')\,g + (k + i)\,g\} \ldots(75)\end{aligned}$$

Aber es ist bekannt, daſs man mit alleiniger Rücksicht auf die Glieder, welche mit der Neigung multiplicirt sind, Ω folgender Gestalt ausdrücken kann:

$$\Omega = \text{I}''H \cos(i'g' + ig + \chi - 2l\Theta) + K \cos(i'g' + ig) + \text{W})$$

Digitized by Google

wo H bloſs Function von den Excentricitäten, und immer von der Ordnung $(i'+i)-2l$; X bloſs Function von den Perihelien, K Function von den Excentricitäten und der Neigung, aber von keiner niedrigeren Ordnung als der $((i'+i)+2)^{\text{te}}$, und W Function von den Perihelien und der Knotenlänge ist. Hieraus bekommen wir:

$$\left(\frac{d\Omega}{d\mathrm{I}}\right) = 2l\mathrm{I}^{2l-1}H\cos(i'g'+ig+\mathrm{X}-2l\Theta) - \frac{dK}{d\mathrm{I}}\cos(i'g'+ig+\mathrm{W})$$

$$\left(\frac{d\Omega}{d\Theta}\right) = 2l\mathrm{I}^{2l}\ H\sin(i'g'+ig+\mathrm{X}-2l\Theta) - \left(\frac{d\mathrm{W}}{d\Theta}\right)K\sin(i'g'+ig+\mathrm{W})$$

und somit durch die mehrmals angeführten vollständigen Ausdrücke:

$$\left(\frac{d\Omega}{dP}\right) = 2l\mathrm{I}^{2l-1}H\sin(i'g'+ig+\mathrm{X}-(2l-1)\Theta)$$
$$+\alpha\cos(i'g'+ig+\mathrm{W})+\beta\sin(i'g'+ig+\mathrm{W})$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dQ}\right) = 2l\mathrm{I}^{2l-1}H\cos(i'g'+ig+\mathrm{X}-(2l-1)\Theta)$$
$$+\eta\cos(i'g'+ig+\mathrm{W})+\vartheta\sin(i'g'+ig+\mathrm{W})$$

wo α, β, η, und ϑ Functionen der Excentricitäten und der Neigung sind, die aber nothwendig von keiner niedrigeren Ordnung als der $((i'+i)+1)^{\text{te}}$ sind. Diese Form läſst sich leicht in folgende umwandeln:

$$(76)\ldots\quad \begin{cases} \left(\frac{d\Omega}{dP}\right) = \{2l\mathrm{I}^{2l-1}H\sin[\mathrm{X}-(2l-1)\Theta]+\alpha'\}\cos(i'g'+ig) \\ \qquad\quad +\{2l\mathrm{I}^{2l-1}H\cos[\mathrm{X}-(2l-1)\Theta]+\beta'\}\sin(i'g'+ig) \\ \left(\frac{d\Omega}{dQ}\right) = \{2l\mathrm{I}^{2l-1}H\cos[\mathrm{X}-(2l-1)\Theta]+\eta'\}\cos(i'g'+ig) \\ \qquad\quad -\{2l\mathrm{I}^{2l-1}H\sin[\mathrm{X}-(2l-1)\Theta]-\vartheta'\}\sin(i'g'+ig) \end{cases}$$

wo α', β', η', ϑ' Functionen von derselben Ordnung wie α, β, η, ϑ sind. Wenn man diese Ausdrücke für $\left(\frac{d\Omega}{dP}\right)$ und $\left(\frac{d\Omega}{dQ}\right)$ mit denen, welche unter (74) für dieselben Gröſsen angenommen sind, vergleicht, so ergiebt sich:

$$(i', i, c) + [i', i, s] = \alpha' + \vartheta' = \alpha''$$
$$(i', i, s) - [i', i, c] = \beta' - \eta' = \beta$$

das heiſst, die Verbindungen der Entwickelungscoëfficienten, welche durch die linke Seite dieser Gleichungen angezeigt sind, sind Gröſsen von der Ordnung $(i'+i)+1$, oder wenigstens von keiner niedrigeren

Digitized by Google

Ordnung. Da dies für alle Werthe von i' und i statt findet, so wird es auch noch der Fall sein, wenn wir für diese Indices k' und k substituiren; wir haben also auch:

$$(k', k, c) + [k', k, s] = \delta''$$
$$(k', k, s) - [k', k, c] = \varepsilon''$$

wo δ'' und ε'' Functionen bezeichnen, die von der Ordnung $(k'+k)+1$, oder wenigstens von keiner niedrigeren Ordnung sind. Wenn man nun durch Hülfe der vier letzten Gleichungen die in (75) mit runden Häkchen bezeichneten Entwickelungscoëfficienten eliminirt, so ergiebt sich:

$$\left(\frac{d\Omega}{dP}\right)(p'+p) + \left(\frac{d\Omega}{dQ}\right)(q'+q)$$
$$\frac{h}{2}\{\varepsilon''[i', i, s] - \delta''[i', i, c] + \alpha''[k', k, c] - \beta''[k', k, s]\} \sin\{(k'+i')g' + (k+i)g\}$$
$$+ \frac{h}{2}\{\delta''[i', i, s] + \varepsilon''[i', i, c] - \beta''[k', k, c] - \alpha''[k', k, s]\} \cos\{(k'+i')g' + (k+i)g\}$$

Hieraus sehen wir, daſs in der Summe der Producte, die durch die linke Seite dieser Gleichnng angezeigt ist, der Coëfficient des Arguments $(k'+i')g + (k+i)g$, der allgemeinen Regel folgend, von der Ordnung $((k'+i') + (k+i))$, oder wenigstens von keiner niedrigeren Ordnung ist. Um hieraus $\left(\frac{dT}{dP}\right)(p'-p) + \left(\frac{dT}{dQ}\right)(q'-q)$ zu bekommen, müssen wir erstlich den vorstehenden Ausdruck in Beziehung auf die mittlere Länge der Epoche, in so fern diese Gröſse in den Differentialquotienten von Ω enthalten ist, differentiiren, das ist, wir müssen ihn nach g, in so weit g mit dem Index k behaftet ist, differentiiren, aber hierdurch ändert man die analytische Ordnung des Coëfficienten keinesweges. Wir müssen denselben Ausdruck ferner nach r differentiiren, in so weit diese Gröſse in $\left(\frac{d\Omega}{dP}\right)$ und $\left(\frac{d\Omega}{dQ}\right)$ enthalten ist, und nach der Differentiation mit r multipliciren. Aber wenn wir das in g enthaltene n constant setzen, so ist, wie bekannt, $a\left(\frac{d\Omega}{da}\right) = r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$, und also auch $a\left(\frac{d^2\Omega}{da\,dP}\right) = r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,dP}\right)$ und $a\left(\frac{d^2\Omega}{da\,dQ}\right) = r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,dQ}\right)$; diese Differentiation verändert also nur die zu Anfange dieses Artikels A, B, C etc. genannten Gröſsen, oder welches einerlei ist, sie verändert nur H und K, in so weit diese Gröſsen Functionen von a sind, sie läſst also auch die Ordnung in Beziehung auf die Excentricitäten und die Neigung unangetastet.

Digitized by Google

Die genannten Differentialquotienten müſsen nun resp. mit $f(\gamma, g)$ und $\phi(\gamma, g)$ multiplicirt werden; da aber in diesen der Coëfficient des Arguments $\varkappa\gamma + kg$ von der Ordnung $(\varkappa + k)$, oder wenigstens von keiner niedrigeren Ordnung ist, so wird die eben bewiesene Eigenschaft hiedurch eben so wenig aufgehoben. Die Gröſse $\left(\frac{dT}{dP}\right)(p'-p) + \left(\frac{dT}{dQ}\right)(q'-q)$ folgt also der allgemeinen Regel für die Coëfficienten von Ω, und mithin die Störungen der Länge und des Logarithmus des Radius Vectors auch (*).

Die Auseinandersetzung dieses Punktes gehört eigentlich nicht zur Sache, hier, wo die Störungen alle unabhängig von ihrer Ordnung rücksichtlich der Excentricitäten und Neigung berechnet worden sind. Aber es ist kürzlich etwas durch den Druck bekannt gemacht worden, welches einer falschen Ansicht von der Sache Raum geben könnte, und lediglich deshalb habe ich diesen Artikel hier eingeschaltet.

33.

In den jetzt folgenden vier Tafeln, nemlich in XXXII. bis XXXV., sind die Glieder gegeben, die mit den vorhergehenden den vollen Inhalt von (44) ausmachen. Sie sind aus dem Producte $\ldots nZ \times \int T d\tau$ nach den Ausdrücken (52) und (53) berechnet. Man muſs aber, um sie vollständig zu bekommen, vor den Differentiationen die Glieder, in welchen die Coëfficienten von Γ und γ gröſser sind als ± 1, vermittelst der Relationen (23) hinzufügen oder wenigstens vor den Verwandelungen diese Glieder berechnen; sie sind bereits in den Tafeln enthalten.

Die Tafeln XXXVI. bis XL. geben die Störungen zweiter Ordnung des Saturns, welche mit m^2 multiplicirt sind, und einige der Zwischenrechnungen, die durch die Überschriften hinlänglich erklärt sind. Die Einrichtung dieser Tafeln ist eben so wie bei denen für die erste Approximation, und bedarf also weiter keiner Erläuterung. Da sie, wie gesagt, die mit m^2 multiplicirten Störungen enthalten, so sind sie

---

(*) Es ist leicht einzusehen, daſs wir das nemliche Resultat erhalten hätten, wenn wir für $\left(\frac{dz}{dP}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dQ}\right)$ die abgekürzten Ausdrücke angewendet hätten.

Digitized by Google

die Integrale der Summe des Inhalts der Tafeln XXVII., XXVIII., XXXII., XXXIII., XXXIV. und XXXV., wie die Gleichung (44) zeigt. Die Integrationen sind nach den Ausdrücken (55), (56), (57), (58), (68) und (69) ausgeführt. Der Tafel XXXIX. ist die Function, welche nach dem Artikel 27. wie eine Constante dem in ihr enthaltenen Integral zugefügt wird, nicht einverleibt; die Berechnung dieser Gröſse will ich hier zeigen. Wenn man in dem Werthe von $\left(\overline{\frac{d(\zeta)}{d\tau}}\right)$, welchen die Tafel XII. giebt, alle Glieder addirt, in welchen g' mit einer und derselben Zahl multiplicirt ist, so bekommt man die Gröſse, die im Artikel 27. mit $\phi(g)$ bezeichnet wurde und die ich hier $\phi(g')$ nennen will, weil sie sich auf den Saturn bezieht. Es ergiebt sich auf diese Weise:

$$\phi(g) = -2'',68 + 19'',17 \cos g' - 17'',36 \sin g' + 286'',78 \cos 2g' + 30'',57 \sin 2g' + 41'',57 \cos 3g' + 2'',04 \sin 3g' - 82'',09 \cos 4g' - 632'',44 \sin 4g' - 32'',57 \cos 5g' + 75'',85 \sin 5g' + 4'',40 \cos 6g' + 3'',63 \sin 6g'$$

Die Tafel XXXIX. giebt auf die nemliche Art, wenn wir bei $3g'$ stehen bleiben, welches hinreichend ist:

$$\psi(g') = -3'',115 - 0'',097 \cos g' - 0'',061 \sin g' - 0'',054 \cos 2g' - 0'',383 \sin 2g' + 0'',036 \cos 3g' + 0'',067 \sin 3g'$$

Aus den vorhergehenden Werthen bekommt man, wenn man ihn nach den Vorschriften des Artikel 24. ins Quadrat erhebt:

$$(\phi(g'))^2 = +1'',205 - 0'',158 \cos g' - 0'',236 \sin g' - 0'',232 \cos 2g' - 0'',847 \sin 2g' + 0'',040 \cos 3g' + 0'',023 \sin 3g' + \text{etc.}$$

und hiemit nach (66):

$$\overline{\text{Const.}} = +3'',718 + 0'',018 \cos g' - 0'',057 \sin g' - 0'',062 \cos 2g' - 0'',041 \sin 2g' - 0,016 \cos 3g' - 0'',055 \sin 3g'$$

Da diese Coëfficienten so klein sind, so habe ich sie, mit Ausnahme des constanten Gliedes, bei den Störungen des Logarithmus des Radius Vectors weiter nicht berücksichtigt.

In den Tafeln XLI. bis XLIV. sind die Störungen zweiter Ordnung des Saturns enthalten, welche mit $m'm$ multiplicirt sind, das ist,

Digitized by Google

die Integrale der Summe des Inhalts der Tafeln XXIX. und XXX. Sie sind nach denselben Formeln wie die früheren berechnet, welche sich aber für diesen Theil der Störungen beträchtlich abkürzen. Die Tafeln XLV. und XLVI. geben die Störungen, welche aus dem Zuwachs der Gröſsen P und Q erzeugt, und also mit $m\left(m+\frac{an}{a'n'}m'\right)$ multiplicirt sind; sie sind also die Integrale des Inhalts der Tafel XXXI.

In diesen Tafeln sind alle Störungen der genannten Gattungen aufgenommen, namentlich also auch in dem rein periodischen Theile des Coëfficienten des Arguments $5g'-2g$, so wie in den übrigen, wo es merklich war, das Glied, welches aus dem im Differential mit nt multiplicirten Gliede entsteht (zufolge (57)). La Place hat dieses Glied besonders berücksichtigt und Herr Plana hat sich gar nicht damit beschäftigt; wir müssen also, um unser Resultat mit dem dieser Geometer vergleichen zu können, dieses Glied absondern. Man kann sich durch die Berechnung aus den hier gegebenen Zahlenwerthen leicht überzeugen, daſs es für die mit m^2 multiplicirten Störungen

$$=-84{,}''513 \sin(0\gamma+5g'-2g)-178{,}''411 \cos(0\gamma+5g'-2g)$$

und für die mit $m'm$ multiplicirten Störungen

$$=-36{,}''822 \sin(0\gamma+5g'-2g)-25{,}''906 \cos(0\gamma+5g'-2g)$$

ist. Wenn man diese von den resp. Coëfficienten der Tafeln XXXVI. und XLI. abzieht, so ergeben sich die Theile, welche uns zur Vergleichung dienen müssen. Nemlich der mit m^2 multiplicirte Theil:

$$=+42{,}''757 \sin(0\gamma+5g'-2g)-7{,}''005 \cos(0\gamma+5g'-2g)$$

und der mit $m'm$ multiplicirte:

$$=+6{,}''099 \sin(0\gamma+5g'-2g)-0{,}''378 \cos(0\gamma+5g'-2g)$$

Da $g'=n't+\varepsilon'-\pi'$ und $g=nt+\varepsilon-\pi$ ist, so haben wir für die vorstehenden Glieder resp.:

$$+\left(42{,}''757 \cos(5\pi'-2\pi)-7{,}''005 \sin(5\pi'-2\pi)\right)\sin Y$$
$$-\left(42{,}''758 \sin(5\pi'-2\pi)+7{,}''005 \cos(5\pi'-2\pi)\right)\cos Y$$

und

Digitized by Google

$$+ \, (6'',099 \cos(5\pi'-2\pi) - 0'',378 \sin(5\pi'-2\pi)) \sin Y$$
$$- \, (6'',099 \sin(5\pi'-2\pi) + 0'',378 \cos(5\pi'-2\pi)) \cos Y$$

wo ich zur Abkürzung Y für $5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon$ geschrieben habe. Da nun aus den im Art. 14. gegebenen Werthen der angewandten Elemente $5\pi' - 2\pi = 63^\circ\,24'\,24''$ folgt, so sind die vorstehenden Glieder resp. =

$$+ \, 12'',876 \sin Y - 41'',370 \cos Y$$

und

$$+ \, 2'',392 \sin Y - 5'',623 \cos Y$$

und hievon ist die Summe =

$$+ \, 15'',268 \sin Y - 46'',993 \cos Y$$

Da Herr Plana dieselben Massen gebraucht hat, welche hier angewendet worden sind, so ist hinsichtlich dieser nichts zu verändern, aber seine Resultate gelten für das Jahr 1750, weil er die übrigen Data aus der *Méc. cél.* genommen hat, während das meinige für 1800 gilt. Nimmt man daher die Veränderung dieser Coëfficienten, welche im 3ten Theile der *Méc. cél.* pag. 140. gegeben sind, mit umgekehrtem Zeichen, so muſs man zu Plana's Resultat, um es auf das Jahr 1800 zu reduciren, in Sexagesimalsecunden

$$- \, 0'',545 \sin Y - 0'',176 \cos Y$$

addiren, wobei ich aber die Unterschiede der angewendeten Massen nicht habe berücksichtigen können, weil in der *Méc. cél.* die hiezu nöthigen Data fehlen. Dasjenige Resultat von Plana, welches ich für das letzte halte, findet sich in einer Abhandlung: „*Sur le calcul de la partie du coëfficient de la grande inégalité de Jupiter et Saturne, qui depend du carré de la force perturbatrice.* (*lue le* 12. *Avril* 1829)" betitelt, pag. 72., mit Weglassung der vierten Decimalstelle folgendermaaſsen:

$$- \, 1'',262 \sin Y - 39'',599 \cos Y$$

es ist dieses also für 1800 =

$$- \, 1'',807 \sin Y - 39'',775 \cos Y$$

X

Digitized by Google

oder = meinem Resultat +

$$-17{,}''075 \sin Y + 7{,}''218 \cos Y$$

La Place's Resultat ist (*Méc. cél.* pag. 140.), wenn man es auf 1800 reducirt und in Sexagesimalsecunden verwandelt =

$$-4{,}''362 \sin Y + 43{,}''096 \cos Y$$

aber es setzt die Saturnmasse $= \frac{1}{3359{,}40}$ und die Jupitermasse $= \frac{1}{1067{,}09}$ voraus. Wenn man daher die mit m^2 multiplicirten Glieder meines Resultats mit $\left(\frac{1070{,}5}{1067{,}09}\right)^2$, und die mit $m'm$ multiplicirten mit $\frac{1070{,}5 \times 3512}{1067{,}09 \times 3359{,}40}$ multiplicirt, so ergiebt sich nach der Addition:

$$+15{,}''476 \sin Y - 47{,}''531 \cos Y$$

La Place's Resultat, mit entgegengesetzten Zeichen genommen, ist also = meinem Resultat +

$$-11{,}''105 \sin Y + 4{,}''435 \cos Y.$$

34.

In der Tafel XLVII. findet man denjenigen Theil der Gleichungen (73), welcher merklich wird; es sind, wie man sieht, nur die Argumente 0, 0, $5g'-2g$ und $10g'-4g$, und diese bestehen nur aus einer sehr kleinen Anzahl von Verbindungen, unter welchen die Argumente $4g'-2g$, $5g'-2g$, $5g'-3g$, $2g'-2g$, $g'-g$ und $2g'-g$ die einzigen merklichen sind. Die Hülfsgröſsen sind bis auf die zweiten Differentiale nach P und Q in dem Vorigen schon enthalten. Bei diesen wollen wir ein wenig stehen bleiben, um zu zeigen, daſs dasjenige, was ich aus meinen älteren Rechnungen genommen habe (*), hinreichend genau ist. Wenn man $\frac{a'}{\Delta'}$ nach der La Place'schen Methode entwickelt, so findet man bis auf Gröſsen der vierten Ordnung incl. das constante Glied =

$$A_0^{(\frac{1}{2})} + \frac{e^2+e'^2}{4}\left\{\alpha^2 \frac{d^2A_0^{(\frac{1}{2})}}{d\alpha^2} + 2\alpha \frac{dA_0^{(\frac{1}{2})}}{d\alpha}\right\} - \sin^2 \tfrac{1}{2} I \,\alpha A_1^{(\frac{3}{2})}$$
$$+ \tfrac{3}{4} \sin^4 \tfrac{1}{2} I \left\{\alpha^2 A_2^{(\frac{5}{2})} + 2\alpha^2 A_0^{(\frac{5}{2})}\right\}$$

(*) Siehe Artikel 28.

Digitized by Google

$$+\frac{e^4}{64}\left\{\alpha^4\frac{d^4A_0^{(\frac{1}{2})}}{d\alpha^4}+4\alpha^3\frac{d^3A_0^{(\frac{1}{2})}}{d\alpha^3}\right\}$$

$$+\frac{e^2e'^2}{16}\left\{\alpha^4\frac{d^4A_0^{(\frac{1}{2})}}{d\alpha^4}+8\alpha^3\frac{d^3A_0^{(\frac{1}{2})}}{d\alpha^3}+14\alpha^2\frac{d^2A_0^{(\frac{1}{2})}}{d\alpha^2}+4\alpha\frac{dA_0^{(\frac{1}{2})}}{d\alpha}\right\}$$

$$+\frac{e'^4}{64}\left\{\alpha^4\frac{d^4A_0^{(\frac{1}{2})}}{d\alpha^4}+12\alpha^3\frac{d^3A_0^{(\frac{1}{2})}}{d\alpha^3}+36\alpha^2\frac{d^2A_0^{(\frac{1}{2})}}{d\alpha^2}+24\alpha\frac{dA_0^{(\frac{1}{2})}}{d\alpha}\right\}$$

$$-\sin^2\tfrac{1}{2}\,\mathrm{I}\;\frac{e^2+e'^2}{4}\left\{\alpha^3\frac{d^2A_1^{(\frac{3}{2})}}{d\alpha^2}+4\alpha^2\frac{dA_1^{(\frac{3}{2})}}{d\alpha}+2\alpha A_1^{(\frac{3}{2})}\right\}$$

$$-\left[\begin{array}{l}\frac{ee'}{8}\left\{\alpha^2\frac{d^2A_1^{(\frac{1}{2})}}{d\alpha^2}+2\alpha\frac{dA_1^{(\frac{1}{2})}}{d\alpha}-2A_1^{(\frac{1}{2})}\right\}\\ \qquad+\frac{e^3e'}{16}\left\{\alpha^4\frac{d^4A_1^{(\frac{1}{2})}}{d\alpha^4}+6\alpha^3\frac{d^3A_1^{(\frac{1}{2})}}{d\alpha^3}+4\alpha^2\frac{d^2A_1^{(\frac{1}{2})}}{d\alpha^2}\right\}\\ +\frac{ee'^3}{16}\left\{\alpha^4\frac{d^4A_1^{(\frac{1}{2})}}{d\alpha^4}+10\alpha^3\frac{d^3A_1^{(\frac{1}{2})}}{d\alpha^3}+22\alpha^2\frac{d^2A_1^{(\frac{1}{2})}}{d\alpha^2}+4\alpha\frac{dA_1^{(\frac{1}{2})}}{d\alpha}-4A_1^{(\frac{1}{2})}\right\}\\ -\frac{ee'\sin^2\frac{1}{2}\mathrm{I}}{4}\left\{\left[\alpha^3\frac{d^2A_2^{(\frac{3}{2})}}{d\alpha^2}+\alpha^3\frac{d^2A_0^{(\frac{3}{2})}}{d\alpha^2}\right]+4\left[\alpha^2\frac{dA_2^{(\frac{3}{2})}}{d\alpha}+\alpha^2\frac{dA_0^{(\frac{3}{2})}}{d\alpha}\right]\right\}\end{array}\right]\cos(\pi'-\pi)$$

$$+\frac{e^2e'^2}{32}\left\{\alpha^4\frac{d^4A_2^{(\frac{1}{2})}}{d\alpha^4}+8\alpha^3\frac{d^3A_2^{(\frac{1}{2})}}{d\alpha^3}+6\alpha^2\frac{d^2A_2^{(\frac{1}{2})}}{d\alpha^2}-12\alpha\frac{dA_2^{(\frac{1}{2})}}{d\alpha}+12A_2^{(\frac{1}{2})}\right\}\cos(2\pi'-2\pi)$$

$$+\frac{e^2\sin^2\frac{1}{2}\mathrm{I}}{8}\left\{\alpha^3\frac{d^2A_1^{(\frac{3}{2})}}{d\alpha^2}+8\alpha^2\frac{dA_1^{(\frac{3}{2})}}{d\alpha}+12\alpha A_1^{(\frac{3}{2})}\right\}\cos(2\pi-2\Theta)$$

$$-\frac{ee'\sin^2\frac{1}{2}\mathrm{I}}{4}\left\{\alpha^3\frac{d^2A_0^{(\frac{3}{2})}}{d\alpha^2}+4\alpha^2\frac{dA_0^{(\frac{3}{2})}}{d\alpha}\right\}\cos(\pi'+\pi-2\Theta)$$

$$+\frac{e'^2\sin^2\frac{1}{2}\mathrm{I}}{8}\left\{\alpha^3\frac{d^2A_1^{(\frac{3}{2})}}{d\alpha^2}-2\alpha A_1^{(\frac{3}{2})}\right\}\cos(2\pi'-2\Theta)$$

Hier ist $\alpha=\frac{a}{a'}$, und $A_l^{(\frac{k}{2})}$ bedeutet den Coëfficienten von $\cos l\chi$, in der Entwickelung von $(1+\alpha^2-2\alpha\cos\chi)^{-\frac{k}{2}}$, so genommen, daſs l negative sowohl als positive Werthe annimmt. Da das constante Glied von $\Omega_{,,}$ Null ist, so giebt der obige Ausdruck das constante Glied in Ω, wenn man ihn mit $\frac{m'}{\mu}$ multiplicirt. Die numerischen Werthe der einzelnen Glieder für den Jupiter und Saturn sind:

	+ 1,0901643
e^2	+ 0,000504044
e'^2	+ 0,000685118
$\sin^2\frac{1}{2}$ I	− 0,000104002
$\sin^4\frac{1}{2}$ I	+ 0,000000060

Digitized by Google

e^4	$+ 0{,}000000641$		
$e^2 e'^2$	$+ 0{,}000008427$		
e'^4	$+ 0{,}000005621$		
$e^2 \sin^2 \frac{1}{2} I$	$- 0{,}000001283$		
$e'^2 \sin^2 \frac{1}{2} I$	$- 0{,}000001744$		
ee'	$- 0{,}000768347$	$\times \cos(\pi' - \pi)$	$(\pi' - \pi = 78^\circ\, 0'\, 18'')$
$e^3 e'$	$- 0{,}000004513$	$\times \cos(\pi' - \pi)$	
ee'^3	$- 0{,}000012208$	$\times \cos(\pi' - \pi)$	
$ee' \sin^2 \frac{1}{2} I$	$+ 0{,}000002600$	$\times \cos(\pi' - \pi)$	
$e^2 e'^2$	$+ 0{,}000003034$	$\times \cos(2\pi' - 2\pi)$	
$e^2 \sin^2 \frac{1}{2} I$	$+ 0{,}000001258$	$\times \cos(2\pi - 2\Theta)$	$(2\pi - 2\Theta = 130^\circ\, 2'\, 48'')$
$ee' \sin^2 \frac{1}{2} I$	$- 0{,}000001346$	$\times \cos(\pi' + \pi - 2\Theta)$	
$e'^2 \sin^2 \frac{1}{2} I$	$+ 0{,}000000300$	$\times \cos(2\pi' - 2\Theta)$	$(2\pi' - 2\Theta = 286^\circ\, 3'\, 24'')$

Wenn wir nun das constante Glied in Ω mit . . . $\frac{m'}{\mu}(0, 0, c)$, wie früher bezeichnen, so ergiebt sich aus den vorstehenden Zahlenwerthen, da $a' = 1$ ist,

$$(0, 0, c) = 1{,}0910962$$

Die strenge Rechnung hat in der Tafel II. gegeben:

$$(0, 0, c) = 1{,}091097$$

Wenn man den obigen Ausdruck nach a differentiirt und die numerischen Werthe der vorkommenden Gröſsen substituirt, so findet man:

$+ 0{,}2206562$	
$+ 0{,}0018195$	
$+ 0{,}0024731$	
$- 0{,}0003754$	
$+ 0{,}0000004$	
$+ 0{,}0000050$	
$+ 0{,}0000522$	
$+ 0{,}0000302$	
$- 0{,}0000080$	
$- 0{,}0000108$	
$- 0{,}0034688$	$\times \cos(\pi' - \pi)$
$- 0{,}0000319$	$\times \cos(\pi' - \pi)$
$- 0{,}0000761$	$\times \cos(\pi' - \pi)$
$+ 0{,}0000173$	$\times \cos(\pi' - \pi)$
$+ 0{,}0000220$	$\times \cos(2\pi' - 2\pi)$
$+ 0{,}0000068$	$\times \cos(2\pi - 2\Theta)$
$- 0{,}0000089$	$\times \cos(\pi' + \pi - 2\Theta)$
$+ 0{,}0000025$	$\times \cos(2\pi' - 2\Theta)$

Digitized by Google

und hieraus den mit r multiplicirten Differentialquotienten nach r, oder nach der Bezeichnung des Artikel 9. u. f.

$$[0, 0, c] = 0,2238867$$

Der strenge berechnete Werth ist aus der Tafel II.:

$$[0, 0, c] = 0,2238874$$

Die Werthe der mit $A_i^{(\frac{k}{2})}$ bezeichneten Gröſsen lasse ich, um nicht weitläuftig zu werden, weg, aber man wird, wenn man nachrechnen will und dazu diese Gröſsen aus der *Méc. cél.* nimmt, ein nur sehr wenig von diesem verschiedenes Resultat finden. Durch die eben gegebenen Zahlenwerthe kann man auch leicht die in nz und $l(r)$ in der ersten Approximation mit nt multiplicirten Glieder berechnen und sich überzeugen, wie nahe richtig man sie dadurch finden kann.

Da wir nun die betreffenden Gröſsen nicht einmal bis auf fünf Decimalen brauchen, so ist durch das Obige zur Genüge gezeigt, daſs die aus den genannten Rechnungen entlehnten Gröſsen bis auf die letzte merkliche Stelle genau sind. Das was ich hier von dem constanten Gliede gesagt habe, findet ebenfalls in Beziehung auf die folgenden, zum Argumente $5g' - 2g$ gehörigen Coëfficienten statt, die ich aus denselben Rechnungen entnommen habe. Man kann diese, wenn man es nöthig erachtet, auch durch die in der *Méc. cél.* befindlichen Angaben einer hinreichenden Prüfung unterwerfen. Ich bemerke für diesen Zweck, daſs die Gröſse, welche La Place R genannt hat, $-\Omega$ gleich kommt, und daſs, wie auſserdem bekannt, die in der *Méc. cél.* gegebenen Glieder fünfter Ordnung des genannten Arguments das falsche Zeichen haben. Wir haben nun aus dem Angeführten:

$$\frac{d^2\,(0,0,c)}{d\mathrm{l}^2} = -\,0,43383\,;\quad \frac{d^2\,(0,0,c)}{\sin \mathrm{l}\,d\mathrm{l}\,d\Theta} = -\,0,01092\,;\quad \frac{d^2\,(0,0,c)}{\sin^2 \mathrm{l}\,d\Theta^2} = -\,0,00385\,;$$

$$\frac{d^2\,(5,-2,c)}{d\mathrm{l}^2} = +\,0,03430\,;\quad \frac{d^2\,(5,-2,c)}{\sin \mathrm{l}\,d\mathrm{l}\,d\Theta} = +\,0,12144\,;\quad \frac{d^2\,(5,-2,c)}{\sin^2 \mathrm{l}\,d\Theta^2} = -\,0,07580\,;$$

$$\frac{d^2\,(5,-2,s)}{d\mathrm{l}^2} = -\,0,05658\,;\quad \frac{d^2\,(5,-2,s)}{\sin \mathrm{l}\,d\mathrm{l}\,d\Theta} = +\,0,07568\,;\quad \frac{d^2\,(5,-2,s)}{\sin^2 \mathrm{l}\,d\Theta^2} = +\,0,12159\,;$$

und aus dem anderweitig in dieser Abhandlung Enthaltenen bekommen wir:

Digitized by Google

$$\frac{d\,(0,0,c)}{\sin 1\,d\,I} = -\,0{,}44263\,; \quad \frac{d\,(0,0,c)}{\sin^2 1\,d\Theta} = +\,0{,}00531\,;$$

$$\frac{d\,(5,-2,c)}{\sin 1\,d\,I} = +\,0{,}03438\,; \quad \frac{d\,(5,-2,c)}{\sin^2 1\,d\Theta} = +\,0{,}06083\,;$$

$$\frac{d\,(5,-2,s)}{\sin 1\,d\,I} = -\,0{,}05673\,; \quad \frac{d\,(5,-2,s)}{\sin^2 1\,d\Theta} = +\,0{,}03783\,;$$

Hieraus ergiebt sich nach den Formeln (72):

$$\frac{1}{n'}A = +\;3{,}''20 - 11{,}''70\cos(5g'-2g) - 7{,}''30\sin(5g'-2g)$$

$$\frac{1}{n'}B = +\;83{,}''72 - 6{,}''62\cos(5g'-2g) + 10{,}''92\sin(5g'-2g)$$

$$\frac{1}{n'}C = -\;86{,}''16 - 7{,}''99\cos(5g'-2g) + 12{,}''52\sin(5g'-2g)$$

$$\frac{1}{n'}D = -\;3{,}''06 + 11{,}''47\cos(5g'-2g) + 7{,}''13\sin(5g'-2g)\,.$$

und somit leicht die in der Tafel XLVII. zuletzt angesetzten Producte.

35.

Ich will jetzt der bequemeren Übersicht wegen die Störungen zweiter Ordnung des Saturns zusammenstellen.

Mit dem Quadrate der Jupitermasse sind multiplicirt und müssen dem gemäſs verbessert werden, wenn in der Folge die Beobachtungen eine Abänderung dieser anzeigen, folgende:

$$\begin{aligned}
n'z' = &\quad -\,0{,}''0000239\; n'^2t^2 \\
&+ \{\;\;1{,}''957 - 0{,}98518\; n't - 0{,}''0017667\; n'^2t^2\}\sin g' \\
&+ \{-1{,}303 - 1{,}10350\; n't + 0{,}0011018\; n'^2t^2\}\cos g' \\
&+ \{-0{,}714 - 0{,}01312\; n't - 0{,}0000918\; n'^2t^2\}\sin 2g' \\
&+ \{\;\;1{,}204 - 0{,}01311\; n't + 0{,}0001498\; n'^2t^2\}\cos 2g' \\
&+ \{\;\;0{,}005 - 0{,}00033\; n't - 0{,}0000037\; n'^2t^2\}\sin 3g' \\
&+ \{\;\;0{,}341 - 0{,}00029\; n't + 0{,}0000062\; n'^2t^2\}\cos 3g'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+0{,}''018\sin 4g' && +0{,}''006\cos 4g' \\
&-0{,}128\sin\,(-2g'-g) && +0{,}027\cos\,(-2g'-g) \\
&+\{-0{,}184 - 0{,}00057\; n't\}\sin(-g'-g) && +\{\;\;0{,}162 - 0{,}''00027\; n't\}\cos(-g'-g) \\
&+\{-0{,}241 - 0{,}00466\; n't\}\sin(-g) && +\{\;\;0{,}248 - 0{,}00181\; n't\}\cos(-g) \\
&+\{-0{,}615 + 0{,}00571\; n't\}\sin(g'-g) && +\{-1{,}023 - 0{,}01015\; n't\}\cos(g'-g) \\
&+\{\;\;2{,}187 - 0{,}05984\; n't\}\sin(2g'-g) && +\{\;\;3{,}473 + 0{,}05704\; n't\}\cos(2g'-g) \\
&+\{\;\;6{,}553 + 0{,}01575\; n't\}\sin(3g'-g) && +\{\;\;5{,}741 + 0{,}02050\; n't\}\cos(3g'-g) \\
&+\{\;\;0{,}221 + 0{,}00073\; n't\}\sin(4g'-g) && +\{\;\;0{,}070 + 0{,}00086\; n't\}\cos(4g'-g)
\end{aligned}$$

Digitized by Google

$-0''{,}023 \sin(-g'-2g)$
$+\{-0{,}058-0''{,}00004\,n't\}\sin(-2g)$
$+\{-0{,}043+0{,}00017\,n't\}\sin(\ g'-2g)$
$+\{\ \ 0{,}127+0{,}00040\,n't\}\sin(2g'-2g)$
$+\{\ \ 0{,}196+0{,}02176\,n't\}\sin(3g'-2g)$
$+\{\ \ 7{,}754-0{,}47475\,n't\}\sin(4g'-2g)$
$+\{-40{,}566-2{,}92928\,n't\}\sin(5g'-2g)$
$+\{\ \ 0{,}670-0{,}03636\,n't\}\sin(6g'-2g)$
$+\{\ \ 0{,}012+0{,}00012\,n't\}\sin(2g'-3g)$
$+\{\ \ 0{,}043+0{,}00007\,n't\}\sin(3g'-3g)$
$+\{\ \ 0{,}022-0{,}00081\,n't\}\sin(4g'-3g)$
$+\{-0{,}332+0{,}00040\,n't\}\sin(5g'-3g)$
$+\{\ \ 0{,}295+0{,}00315\,n't\}\sin(6g'-3g)$
$+\{\ \ 2{,}148-0{,}00749\,n't\}\sin(7g'-3g)$
$+\{\ \ 0{,}487-0{,}00026\,n't\}\sin(8g'-3g)$
$+\{-0{,}012-0{,}00058\,n't\}\sin(5g'-4g)$
$+\{-0{,}011-0{,}00048\,n't\}\sin(6g'-4g)$
$+\{\ \ 0{,}351-0{,}00022\,n't\}\sin(7g'-4g)$
$+\{\ \ 1{,}282-0{,}00007\,n't\}\sin(8g'-4g)$
$+\{-6{,}824-0{,}00122\,n't\}\sin(9g'-4g)$
$+\{-13{,}478-0{,}00638\,n't\}\sin(10g'-4g)$

$-0''{,}040 \cos(-g'-2g)$
$+\{-0{,}040+0''{,}00002\,n't\}\cos(-2g)$
$+\{-0{,}043-0{,}00080\,n't\}\cos(\ g'-2g)$
$+\{-0{,}024-0{,}00001\,n't\}\cos(2g'-2g)$
$+\{-0{,}241+0{,}02025\,n't\}\cos(3g'-2g)$
$+\{-\ 19{,}379-0{,}03930\,n't\}\cos(4g'-2g)$
$+\{-182{,}169+1{,}39044\,n't\}\cos(5g'-2g)$
$+\{-0{,}068+0{,}04960\,n't\}\cos(6g'-2g)$
$+\{-0{,}006+0{,}00001\,n't\}\cos(2g'-3g)$
$+\{\ \ 0{,}047-0{,}00002\,n't\}\cos(3g'-3g)$
$+\{\ \ 0{,}013+0{,}00187\,n't\}\cos(4g'-3g)$
$+\{-0{,}007+0{,}00250\,n't\}\cos(5g'-3g)$
$+\{-1{,}005+0{,}00400\,n't\}\cos(6g'-3g)$
$+\{\ \ 5{,}732-0{,}00279\,n't\}\cos(7g'-3g)$
$+\{\ \ 0{,}309+0{,}00006\,n't\}\cos(8g'-3g)$
$+\{\ \ 0{,}022-0{,}00011\,n't\}\cos(5g'-4g)$
$+\{-0{,}032+0{,}00019\,n't\}\cos(6g'-4g)$
$+\{\ \ 0{,}264+0{,}00025\,n't\}\cos(7g'-4g)$
$+\{\ \ 0{,}300+0{,}00034\,n't\}\cos(8g'-4g)$
$+\{\ \ 2{,}018-0{,}00362\,n't\}\cos(9g'-4g)$
$+\{\ \ 14{,}385-0{,}00557\,n't\}\cos(10g'-4g)$

$l(r') = +1''{,}622 + 0''{,}01486\,n't + 0''{,}0000554\,n'^2t^2$
$+\{-0{,}510 + 0{,}49132\,n't + 0{,}0008867\,n'^2t^2\}\cos g'$
$+\{-0{,}051 - 0{,}55002\,n't + 0{,}0005509\,n'^2t^2\}\sin g'$
$+\{\ \ 0{,}535 + 0{,}01285\,n't + 0{,}0000650\,n'^2t^2\}\cos 2g'$
$+\{\ \ 0{,}973 - 0{,}01304\,n't + 0{,}0000961\,n'^2t^2\}\sin 2g'$
$+\{\ \ 0{,}003 + 0{,}00050\,n't + 0{,}0000041\,n'^2t^2\}\cos 3g'$
$+\{\ \ 0{,}328 - 0{,}00047\,n't + 0{,}0000063\,n'^2t^2\}\sin 3g'$

$+\{-0''{,}186-0''{,}00048\,n't\}\cos(-g'-g)$
$+\{-0{,}236-0{,}00131\,n't\}\cos(\ \ -g)$
$+\{-0{,}436+0{,}00328\,n't\}\cos(g'-g)$
$+\{+0{,}534-0{,}01338\,n't\}\cos(2g'-g)$
$+\{-1{,}568-0{,}00575\,n't\}\cos(3g'-g)$
$+\{\ \ 0{,}904-0{,}00043\,n't\}\cos(4g'-g)$
$+\{-0{,}048+0{,}00011\,n't\}\cos(\ g'-2g)$
$+\{+0{,}133+0{,}00050\,n't\}\cos(2g'-2g)$
$+\{\ \ 0{,}119+0{,}01265\,n't\}\cos(3g'-2g)$
$+\{\ \ 3{,}767-0{,}23051\,n't\}\cos(4g'-2g)$
$+\{\ \ 0{,}080+0{,}06180\,n't\}\cos(5g'-2g)$
$+\{-0{,}363+0{,}01838\,n't\}\cos(6g'-2g)$
$+\{\ \ 0{,}045+0{,}00003\,n't\}\cos(3g'-3g)$
$+\{\ \ 0{,}013-0{,}00073\,n't\}\cos(4g'-3g)$
$+\{-0{,}069+0{,}00029\,n't\}\cos(5g'-3g)$
$+\{\ \ 1{,}094+0{,}00203\,n't\}\cos(6g'-3g)$
$+\{\ \ 0{,}648-0{,}00179\,n't\}\cos(7g'-3g)$
$+\{+0{,}015-0{,}00052\,n't\}\cos(6g'-4g)$

$+\{-0''{,}165+0''{,}00025\,n't\}\sin(-g'-g)$
$+\{-0{,}245+0{,}00056\,n't\}\sin(-g)$
$+\{+0{,}768+0{,}00526\,n't\}\sin(g'-g)$
$+\{-1{,}054-0{,}01237\,n't\}\sin(2g'-g)$
$+\{\ \ 1{,}606+0{,}00848\,n't\}\sin(3g'-g)$
$+\{\ \ 0{,}232+0{,}00058\,n't\}\sin(4g'-g)$
$+\{\ \ 0{,}080+0{,}00068\,n't\}\sin(\ g'-2g)$
$+\{\ \ 0{,}020-0{,}00012\,n't\}\sin(2g'-2g)$
$+\{\ \ 0{,}395-0{,}01336\,n't\}\sin(3g'-2g)$
$+\{\ \ 9{,}565+0{,}01881\,n't\}\sin(4g'-2g)$
$+\{-1{,}791+0{,}03349\,n't\}\sin(5g'-2g)$
$+\{-0{,}043+0{,}02491\,n't\}\sin(6g'-2g)$
$+\{-0{,}036-0{,}00005\,n'i\}\sin(3g'-3g)$
$+\{-0{,}006-0{,}00182\,n't\}\sin(4g'-3g)$
$+\{\ \ 0{,}020-0{,}00221\,n't\}\sin(5g'-3g)$
$+\{\ \ 1{,}204-0{,}00271\,n't\}\sin(6g'-3g)$
$+\{-1\ 403+0{,}00069\,n't\}\sin(7g'-3g)$
$+\{+0{,}030-0{,}00018\,n't\}\sin(6g'-4g)$

Digitized by Google

$$\begin{array}{llll}
+\left\{0\overset{\prime\prime}{,}314-0\overset{\prime\prime}{,}00023\;n't\right\}\cos(7g'-4g) & & +\left\{-0\overset{\prime\prime}{,}265-0\overset{\prime\prime}{,}00027\;n't\right\}\sin(7g'-4g) \\
+\left\{0{,}904-0{,}00009\;n't\right\}\cos(8g'-4g) & & +\left\{-0{,}232-0{,}00026\;n't\right\}\sin(8g'-4g) \\
+\left\{-3{,}158-0{,}00058\;n't\right\}\cos(9g'-4g) & & +\left\{-0{,}953+0{,}00172\;n't\right\}\sin(9g'-4g) \\
+\left\{0{,}478+0{,}00028\;n't\right\}\cos(10g'-4g) & & +\left\{0{,}614-0{,}00035\;n't\right\}\sin(10g'-4g)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rll}
p' = & -\;0\overset{\prime\prime}{,}02718\;n't & +\;0\overset{\prime\prime}{,}0000053\;n'^2t^2 \\
& -\;0{,}076\;\sin(10g'-4g) & +\;0{,}107\;\cos(10g'-4g)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rll}
q' = & -\;0\overset{\prime\prime}{,}00211\;n't & +\;0\overset{\prime\prime}{,}0000053\;n'^2t^2 \\
& +\;0{,}00021\;n't\;\sin(5g'-2g) & +\;0{,}00027\;n't\;\cos(5g'-2g) \\
& -\;0{,}116\quad\sin(10g'-4g) & -\;0{,}081\quad\cos(10g'-4g)
\end{array}$$

Mit dem Producte der Jupiter- und der Saturnmasse sind multiplicirt, und müssen also dem gemäſs verbessert werden, wenn in der Folge die Beobachtungen eine Änderung dieser Massen anzeigen, folgende:

$$\begin{array}{rl}
n'z' = & -0\overset{\prime\prime}{,}0000289\;n'^2t^2 \\
& +\left\{0{,}796-0\overset{\prime\prime}{,}28656\;n't-0\overset{\prime\prime}{,}0002759\;n'^2t^2\right\}\sin g' \\
& +\left\{-0{,}471-0{,}40833\;n't+0{,}0004662\;n'^2t^2\right\}\cos g' \\
& +\left\{-0{,}146-0{,}00390\;n't-0{,}0000039\;n'^2t^2\right\}\sin 2g' \\
& +\left\{0{,}251-0{,}00565\;n't+0{,}0000065\;n'^2t^2\right\}\cos 2g' \\
& +\left\{-0{,}004-0{,}00011\;n't-0{,}0000001\;n'^2t^2\right\}\sin 3g' \\
& +\left\{0{,}163-0{,}00016\;n't+0{,}0000002\;n'^2t^2\right\}\cos 3g'
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
-0\overset{\prime\prime}{,}047\;\sin(-2g'-g) & +0\overset{\prime\prime}{,}010\;\cos(-2g'-g) \\
+\left\{-0{,}038+0{,}00002\;n't\right\}\sin(-g'-g) & +\left\{0{,}031-0{,}00001\;n't\right\}\cos(-g'-g) \\
+\left\{-0{,}078-0{,}00017\;n't\right\}\sin(\;\;-g) & +\left\{0{,}071-0{,}00018\;n't\right\}\cos(\;\;-g) \\
+\left\{-0{,}101-0{,}00057\;n't\right\}\sin(g'-g) & +\left\{-0{,}181+0{,}00044\;n't\right\}\cos(g'-g) \\
+\left\{1{,}101-0{,}02499\;n't\right\}\sin(2g'-g) & +\left\{1{,}055+0{,}07444\;n't\right\}\cos(2g'-g) \\
+\left\{3{,}426+0{,}00244\;n't\right\}\sin(3g'-g) & +\left\{1{,}918+0{,}00682\;n't\right\}\cos(3g'-g) \\
+\left\{0{,}065+0{,}00002\;n't\right\}\sin(4g'-g) & +\left\{0{,}013+0{,}00009\;n't\right\}\cos(4g'-g) \\
+\left\{-0{,}014+0{,}00030\;n't\right\}\sin(g'-2g) & +\left\{-0{,}009-0{,}00046\;n't\right\}\cos(g'-2g) \\
+\left\{0{,}007+0{,}00004\;n't\right\}\sin(2g'-2g) & +\left\{-0{,}007-0{,}00006\;n't\right\}\cos(2g'-2g) \\
+\left\{0{,}022+0{,}00154\;n't\right\}\sin(3g'-2g) & +\left\{-0{,}118+0{,}00102\;n't\right\}\cos(3g'-2g) \\
+\left\{-0{,}512-0{,}11226\;n't\right\}\sin(4g'-2g) & +\left\{-4{,}090+0{,}04871\;n't\right\}\cos(4g'-2g) \\
+\left\{-30{,}749-0{,}42489\;n't\right\}\sin(5g'-2g) & +\left\{-26{,}449+0{,}60550\;n't\right\}\cos(5g'-2g) \\
+\left\{0{,}025-0{,}00028\;n't\right\}\sin(6g'-2g) & +\left\{-0{,}003-0{,}00055\;n't\right\}\cos(6g'-2g) \\
+\left\{+0{,}012\quad 0{,}00000\;n't\right\}\sin(3g'-3g) & +\left\{0{,}017-0{,}00002\;n't\right\}\cos(3g'-3g) \\
+\left\{-0{,}002+0{,}00003\;n't\right\}\sin(4g'-3g) & +\left\{-0{,}009+0{,}00050\;n't\right\}\cos(4g'-3g) \\
+\left\{0{,}019+0{,}00029\;n't\right\}\sin(5g'-3g) & +\left\{-0{,}025+0{,}00042\;n't\right\}\cos(5g'-3g) \\
+\left\{0{,}036+0{,}00110\;n't\right\}\sin(6g'-3g) & +\left\{-0{,}036+0{,}00044\;n't\right\}\cos(6g'-3g) \\
+\left\{0{,}471-0{,}00194\;n't\right\}\sin(7g'-3g) & +\left\{1{,}018+0{,}00036\;n't\right\}\cos(7g'-3g) \\
+\left\{0{,}002-0{,}00011\;n't\right\}\sin(5g'-4g) & +\left\{0{,}011+0{,}00004\;n't\right\}\cos(5g'-4g) \\
+\left\{-0{,}011-0{,}00008\;n't\right\}\sin(6g'-4g) & +\left\{-0{,}013+0{,}00009\;n't\right\}\cos(6g'-4g) \\
+\left\{0{,}121-0{,}00002\;n't\right\}\sin(7g'-4g) & +\left\{0{,}111+0{,}00007\;n't\right\}\cos(7g'-4g) \\
+\left\{0{,}145+0{,}00001\;n't\right\}\sin(8g'-4g) & +\left\{0{,}042+0{,}00006\;n't\right\}\cos(8g'-4g) \\
+\left\{-1{,}737-0{,}00085\;n't\right\}\sin(9g'-4g) & +\left\{0{,}512-0{,}00055\;n't\right\}\cos(9g'-4g) \\
+\left\{-2{,}229-0{,}00191\;n't\right\}\sin(10g'-4g) & +\left\{2{,}364-0{,}00051\;n't\right\}\cos(10g'-4g)
\end{array}$$

Digitized by Google

$-0{,}025'' \sin(8g'-5g)$	$+0{,}042'' \cos(8g'-5g)$
$-0{,}001 \sin(9g'-5g)$	$+0{,}036 \cos(9g'-5g)$
$+0{,}012 \sin(10g'-5g)$	$+0{,}021 \cos(10g'-5g)$

$$
\begin{aligned}
l(r') = \; & -0{,}057'' + 0{,}00337''\, n't + 0{,}0000036''\, n'^2t^2 \\
& + \{-0{,}229 + 0{,}14206\, n't + 0{,}0001380\, n'^2t^2\} \cos g' \\
& + \{-0{,}038 - 0{,}20346\, n't + 0{,}0002331\, n'^2t^2\} \sin g' \\
& + \{\;0{,}115 + 0{,}00383\, n't + 0{,}0000039\, n'^2t^2\} \cos 2g' \\
& + \{\;0{,}212 - 0{,}00570\, n't + 0{,}0000065\, n'^2t^2\} \sin 2g' \\
& + \{\;0{,}003 + 0{,}00016\, n't + 0{,}0000002\, n'^2t^2\} \cos 3g' \\
& + \{\;0{,}157 - 0{,}00025\, n't + 0{,}0000003\, n'^2t^2\} \sin 3g'
\end{aligned}
$$

$+\{-0{,}042''+0{,}00001''\, n't\} \cos(-g'-g)$	$+\{-0{,}037''+0{,}00003''\, n't\} \sin(-g'-g)$
$+\{-0{,}058-0{,}00020\, n't\} \cos(-g)$	$+\{-0{,}046+0{,}00023\, n't\} \sin(-g)$
$+\{-0{,}073-0{,}00057\, n't\} \cos(g'-g)$	$+\{\;0{,}147-0{,}00030\, n't\} \sin(g'-g)$
$+\{\;0{,}309-0{,}00698\, n't\} \cos(2g'-g)$	$+\{-0{,}307-0{,}02073\, n't\} \sin(2g'-g)$
$+\{-0{,}999-0{,}00097\, n't\} \cos(3g'-g)$	$+\{\;0{,}580+0{,}00222\, n't\} \sin(3g'-g)$
$+\{\;0{,}405-0{,}00005\, n't\} \cos(4g'-g)$	$+\{\;0{,}096+0{,}00007\, n't\} \sin(4g'-g)$
$+\{-0{,}011-0{,}00027\, n't\} \cos(g'-2g)$	$+\{\;0{,}008-0{,}00035\, n't\} \sin(g'-2g)$
$+\{\;0{,}034+0{,}00007\, n't\} \cos(2g'-2g)$	$+\{\;0{,}020+0{,}00002\, n't\} \sin(2g'-2g)$
$+\{\;0{,}005+0{,}00093\, n't\} \cos(3g'-2g)$	$+\{\;0{,}134-0{,}00093\, n't\} \sin(3g'-2g)$
$+\{-0{,}281-0{,}05463\, n't\} \cos(4g'-2g)$	$+\{\;2{,}005-0{,}02370\, n't\} \sin(4g'-2g)$
$+\{\;0{,}257+0{,}00839\, n't\} \cos(5g'-2g)$	$+\{-0{,}248+0{,}01248\, n't\} \sin(5g'-2g)$
$+\{-0{,}012+0{,}00014\, n't\} \cos(6g'-2g)$	$+\{-0{,}002-0{,}00027\, n't\} \sin(6g'-2g)$
$+\{-0{,}012+0{,}00001\, n't\} \cos(3g'-3g)$	$+\{\;0{,}021+0{,}00002\, n't\} \sin(3g'-3g)$
$+\{\;0{,}028+0{,}00004\, n't\} \cos(4g'-3g)$	$+\{-0{,}004-0{,}00045\, n't\} \sin(4g'-3g)$
$+\{\;0{,}005+0{,}00030\, n't\} \cos(5g'-3g)$	$+\{\;0{,}011-0{,}00041\, n't\} \sin(5g'-3g)$
$+\{\;0{,}405+0{,}00073\, n't\} \cos(6g'-3g)$	$+\{+0{,}286-0{,}00031\, n't\} \sin(6g'-3g)$
$+\{\;0{,}144-0{,}00048\, n't\} \cos(7g'-3g)$	$+\{-0{,}264-0{,}00008\, n't\} \sin(7g'-3g)$
$+\{\;0{,}023-0{,}00009\, n't\} \cos(6g'-4g)$	$+\{-0{,}011-0{,}00009\, n't\} \sin(6g'-4g)$
$+\{\;0{,}118-0{,}00002\, n't\} \cos(7g'-4g)$	$+\{-0{,}106-0{,}00008\, n't\} \sin(7g'-4g)$
$+\{\;0{,}123+0{,}00002\, n't\} \cos(8g'-4g)$	$+\{-0{,}046-0{,}00006\, n't\} \sin(8g'-4g)$
$+\{-0{,}815-0{,}00040\, n't\} \cos(9g'-4g)$	$+\{-0{,}240+0{,}00026\, n't\} \sin(9g'-4g)$
$+\{\;0{,}078+0{,}00008\, n't\} \cos(10g'-4g)$	$+\{\;0{,}101-0{,}00001\, n't\} \sin(10g'-4g)$

$$
\begin{aligned}
p' = \; & -0{,}00614''\, n't + 0{,}0000030''\, n'^2t^2 \\
& -0{,}012 \sin(10g'-4g) + 0{,}018 \cos(10g'-4g)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q' = \; & -0{,}00036''\, n't + 0{,}0000026''\, n'^2t^2 \\
& + 0{,}00005\, n't \sin(5g'-2g) + 0{,}00003\, n't \cos(5g'-2g) \\
& - 0{,}019 \sin(10g'-4g) - 0{,}014 \cos(10g'-4g)
\end{aligned}
$$

Mit der Gröſse $m\left(m + \frac{an}{a'n'}m'\right)$ sind multiplicirt, und müssen also dem gemäſs verbessert werden, folgende:

$$
\begin{aligned}
n'z' = \; & -0{,}0000004''\, n'^2t^2 \\
& + 0{,}0000114\, n'^2t^2 \sin g' - 0{,}0000005''\, n'^2t^2 \cos g' \\
& + 0{,}0000002\, n'^2t^2 \sin 2g' \quad 0{,}0000000\, n'^2t^2 \cos 2g'
\end{aligned}
$$

Digitized by Google

$$
\begin{array}{ll}
\quad +0{,}^{\prime\prime}00012\ n't \sin(2g'-g) & \quad +0{,}^{\prime\prime}00008\ n't \cos(2g'-g) \\
\quad +0{,}00004\ n't \sin(3g'-g) & \quad -0{,}00032\ n't \cos(3g'-g) \\
+\{\ 0{,}009+0{,}^{\prime\prime}00429\ n't\} \sin(4g'-2g) & +\{\ 0{,}121-0{,}^{\prime\prime}00031\ n't\} \cos(4g'-2g) \\
+\{\ 1{,}589+0{,}04314\ n't\} \sin(5g'-2g) & +\{\ 2{,}632-0{,}02607\ n't\} \cos(5g'-2g)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
l(r') = & -0{,}^{\prime\prime}0000057\ n'^2t^2 \cos g' & -0{,}^{\prime\prime}0000003\ n'^2t^2 \sin g' \\
& -0{,}0000002\ n'^2t^2 \cos 2g' & \quad 0{,}0000000\ n'^2t^2 \sin 2g' \\
& +\{\ 0{,}005+0{,}^{\prime\prime}00209\ n't\} \cos(4g'-2g) & +\{-0{,}060+0{,}^{\prime\prime}00015\ n't\} \sin(4g'-2g) \\
& +\{-0{,}018-0{,}00090\ n't\} \cos(5g'-2g) & +\{\ 0{,}027-0{,}00058\ n't\} \sin(5g'-2g)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
p' = -\ 0{,}^{\prime\prime}0000267\ n'^2t^2 & +\{\ 0{,}^{\prime\prime}083+0{,}^{\prime\prime}00462\ n't\} \sin(5g'-2g) \\
& +\{\ 0{,}139-0{,}00275\ n't\} \cos(5g'-2g)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
q' = -\ 0{,}^{\prime\prime}0005513\ n'^2t^2 & +\{-0{,}^{\prime\prime}145+0{,}^{\prime\prime}00301\ n't\} \sin(5g'-2g) \\
& +\{\ 0{,}090+0{,}00484\ n't\} \cos(5g'-2g)
\end{array}
$$

Es ist ein Leichtes, sich durch die in dieser Abhandlung befindlichen Hülfsgröſsen zu überzeugen, daſs die in den Störungen der Länge und der Radien befindlichen Glieder den eben berechneten nur höchst Unmerkliches hinzufügen können.

36.

Wir wollen jetzt untersuchen, wie aus den Störungen von p und q die Störungen der Breite über der beweglichen Ebene der Ecliptik abgeleitet werden müssen. Es ist (H. 21.), wenn wir die vier Gröſsen p, p', q und q' auf eine und dieselbe, übrigens beliebige Ebene beziehen:

$$(p^2+q^2)\,P = \ q\,(p'q-q'p) + p\,(p'p+q'q)\sqrt{1-p^2-q^2} - p\,(p^2+q^2)\sqrt{1-p'^2-q'^2}$$

$$(p^2+q^2)\,Q = -p\,(p'q-q'p) + q\,(p'p+q'q)\sqrt{1-p^2-q^2} - q\,(p^2+q^2)\sqrt{1-p'^2-q'^2}$$

Aber wenn man $\alpha^{(0)} = \frac{1}{2}$, und alsdann für alle positiven ganzen Werthe von h

$$\alpha^{(h)} = \frac{2h-1}{2h-2}\,\alpha^{(h-1)}$$

macht, so ist:

$$\sqrt{1-p^2-q^2} = 1 - \alpha^{(h)}\,(p^2+q^2)^{h+1}$$

$$\sqrt{1-p'^2-q'^2} = 1 - \alpha^{(h)}\,(p'^2+q'^2)^{h+1}$$

substituirt man diese Werthe in die vorstehende Gleichung, so ergiebt sich:

$$P = p' - p + p\,a^{(h)}\,\{(p'^2 + q'^2)^{h+1} - (p'p + q'q)\,(p^2 + q^2)^h\}$$
$$Q = q' - q + q\,a^{(h)}\,\{(p'^2 + q'^2)^{h+1} - (p'p + q'q)\,(p^2 + q^2)^h\}$$

wo h von 0 bis $+\infty$ durch alle ganzen Zahlen ausgedehnt werden muſs. Bis auf Gröſsen dritter Ordnung incl. erhalten wir hieraus:

$$\left.\begin{array}{l} P = p' - p + \tfrac{1}{2}\,p\,\{p'(p'-p) + q'(q'-q)\} \\ Q = q' - q + \tfrac{1}{2}\,q\,\{p'(p'-p) + q'(q'-q)\} \end{array}\right\} \quad \ldots.(77)$$

Diese beiden Gleichungen sind, wie die numerischen Rechnungen zu erkennen geben werden, für den Saturn und Jupiter mehr als hinreichend.

Nennen wir nun $[p]$ und $[q]$ die dem Planeten m für die Zeit t zukommenden, jenen analogen Gröſsen, welche sich aber auf d i e feste Ebene der Ecliptik, die zur gewählten Zeitepoche statt fand, beziehen, und (p) und (q) diejenigen Gröſsen, welche in jener Zeitepoche wirklich statt fanden und sich auf dieselbe Ecliptik beziehen, so ist nach (H. Art. 21.):

$$\left.\begin{array}{l} [p] = p + (p) - \tfrac{1}{2}(p)\,\{p\,(p + (p)) + q\,(q + (q))\} \\ [q] = q + (q) - \tfrac{1}{2}(q)\,\{p\,(p + (p)) + q\,(q + (q))\} \end{array}\right\} \quad \ldots.(78)$$

wo p und q für die Zeit t gelten und sich auf die Ebene der Planetenbahn, welche zur Zeitepoche statt fand, beziehen, also dieselben Gröſsen sind, welche früher so benannt und hier berechnet worden sind. Nennen wir ferner die gleichartigen Gröſsen des Planeten, welche sich aber auf die bewegliche Ebene der Ecliptik beziehen, $\bar{p}$ und $\bar{q}$, und die gleichartigen Gröſsen der Erde, die sich auf die zur Zeitepoche statt findende Ecliptik beziehen, p_0 und q_0, dann ist (H. Art. 21.):

$$\left.\begin{array}{l} \bar{p} = [p] - p_0 + \tfrac{1}{2}\,p_0\,\{[p]\,([p]-p_0) + [q]\,([q]-q_0)\} \\ \bar{q} = [q] - q_0 + \tfrac{1}{2}\,q_0\,\{[p]\,([p]-p_0) + [q]\,([q]-q_0)\} \end{array}\right\} \quad \ldots.(79)$$

Da man die periodischen Störungen der Erde an die Bewegung dieses Planeten anbringt, und nur die mit der Zeit multiplicirten auf die Örter der Fixsterne überträgt, so darf man nur die letztgenannten in den vorstehenden Gleichungen für p_0 und q_0 annehmen. Man könnte

Digitized by Google

durch die Gleichungen (78) $[p]$ und $[q]$ in (79) eliminiren, allein es scheint mir vortheilhafter, sie stehen zu lassen.

Es sind in der Bewegung des Jupiters und Saturns nur die mit der Zeit multiplicirten Glieder, welche durch die vorstehenden Formeln etwas Weniges geben können; ich will die Entwickelungen daher auf diese beschränken. Sei

$$p = ant + bn^2t^2$$
$$q = cnt + dn^2t^2$$

so ergiebt sich durch die Gleichungen (78):

$$(80)\ldots\left\{\begin{aligned}[p] &= (p) + \{a - \tfrac{1}{2}[(p)^2 a + (p)(q)c]\}\, nt \\ &\quad + \{b - \tfrac{1}{2}[(p)a^2 + (p)c^2 + (p)^2 b + (p)(q)d]\}\, n^2t^2 \\ [q] &= (q) + \{c - \tfrac{1}{2}[(q)^2 c + (p)(q)a]\}\, nt \\ &\quad + \{d - \tfrac{1}{2}[(q)a^2 + (q)c^2 + (q)^2 d + (p)(q)b]\}\, n^2t^2\end{aligned}\right.$$

wo die mit t^3 multiplicirten Glieder übergangen sind. Die sich hieraus ergebenden numerischen Werthe von $[p]$ und $[q]$ bezeichne ich mit

$$[p] = (p) + \alpha nt + \beta n^2t^2$$
$$[q] = (q) + \gamma nt + \varepsilon n^2t^2$$

und setze ferner:

$$p_0 = \alpha_0 nt + \beta_0 n^2t^2$$
$$q_0 = \gamma_0 nt + \varepsilon_0 n^2t^2$$

Durch die Substitution dieser Ausdrücke in (79) findet man, wenn man hier ebenfalls die mit t^3 und t^4 multiplicirten Glieder wegläſst:

$$(81)\ldots\left\{\begin{aligned}\bar{p} &= (p) + \{(\alpha-\alpha_0) + \tfrac{1}{2}\alpha_0((p)^2+(q)^2)\}\, nt \\ &\quad + \{(\beta-\beta_0) + \tfrac{1}{2}[(p)\alpha_0(2\alpha-\alpha_0) + (q)\alpha_0(2\gamma-\gamma_0) + \beta_0((p)^2+(q)^2)]\}\, n^2t^2 \\ q &= (q) + \{(\gamma-\gamma_0) + \tfrac{1}{2}\gamma_0((p)^2+(q)^2)\}\, nt \\ &\quad + \{(\varepsilon-\varepsilon_0) + \tfrac{1}{2}[(q)\gamma_0(2\gamma-\gamma_0) + (p)\gamma_0(2\alpha-\alpha_0) + \varepsilon_0((p)^2+(q)^2)]\}\, n^2t^2\end{aligned}\right.$$

und wir haben für die periodischen Störungen:

$$\bar{p} = p \quad \text{und} \quad \bar{q} = q$$

Setzen wir nun $\bar{p} - (p) = \delta\bar{p}$ und $\bar{q} - (q) = \delta\bar{q}$, wo unter $\bar{p}$ und $\bar{q}$ die vollständigen Werthe dieser Gröſsen verstanden werden müssen, so ist (H. Art. 22.):

Digitized by Google

$$\delta \bar{s} = \delta \bar{q} \sin v - \delta \bar{p} \cos v$$

aber zufolge des im Art. 10. Vorgetragenen müſsen wir hier ebenfalls den Bogen Θ von den Längen abziehen; wir haben also:

$$\delta \bar{s} = \delta \bar{q} \sin (v - \Theta) - \delta \bar{p} \cos (v - \Theta) \qquad ....(82)$$

und der vollständige Werth des Sinus der Breite des Planeten über der beweglichen Ebene der Ecliptik ist $(s) + \delta \bar{s}$, wenn (s) aus folgender Gleichung berechnet wird:

$$(s) = \sin (i) \sin (v - (\theta)) \qquad ...(82^*)$$

wo, wie früher, (i) und (θ) die Neigung und die Länge des aufsteigenden Knotens der Planetenbahn auf der Ebene der Ecliptik bedeuten, welche in der Zeitepoche statt finden.

In den drei letzten Gleichungen ist v die wahre Länge in der Bahn, mit Inbegriff der Störungen derselben; nehmen wir indeſs in (82) einen Augenblick die rein elliptische Länge dafür an, so haben wir:

$$\sin (v - \Theta) = \sin (v - \pi) \cos (\pi - \Theta) + \cos (v - \pi) \sin (\pi - \Theta)$$
$$\cos (v - \Theta) = \cos (v - \pi) \cos (\pi - \Theta) - \sin (v - \pi) \sin (\pi - \Theta)$$

aber aus den Gleichungen des Art. 22. folgt, daſs

$$\cos (v - \pi) = - \frac{1 - e^2}{2} k^2 \frac{R^k}{e} \cos kg - e$$

$$\sin (v - \pi) = - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{2} k \left(\frac{dR^k}{de}\right) \sin kg$$

wo der Index k von $-\infty$ bis $+\infty$ durch alle ganze Zahlen ausgedehnt werden muſs. Wir haben hieraus:

$$\sin (v - \Theta) = - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{2} k \left(\frac{dR^k}{de}\right) \sin kg \cos \omega - \frac{1 - e^2}{2} k^2 \frac{R^k}{e} \cos kg \sin \omega - e \sin \omega$$

$$\cos (v - \Theta) = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{2} k \left(\frac{dR^k}{de}\right) \sin kg \sin \omega - \frac{1 - e^2}{2} k^2 \frac{R^k}{e} \cos kg \cos \omega - e \cos \omega$$

wo, wie in den folgenden Formeln,

$$\omega = \pi - \Theta \text{ gemacht ist.}$$

Setzen wir nun:

Digitized by Google

$$\delta\bar{p} = (i, i')_s \sin (ig + i'g') + (i, i')_c \cos (ig + i'g')$$
$$\delta\bar{q} = [i, i']_s \sin (ig + i'g') + [i, i']_c \cos (ig + i'g')$$

so ergiebt sich, wenn wir die vorstehenden Werthe in (82) substituiren, den daraus erfolgenden Werth der linken Seite $(\delta\bar{z})$ nennen und

$$G^k = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{2}\, k \left(\frac{dR^k}{de}\right)$$
$$H^k = -\frac{1-e^2}{2}\, k^2 \frac{R^k}{e}$$

ausgenommen

$$H^{(0)} = -e$$

setzen:

$$\begin{aligned}(\delta\bar{z}) = & \{G^k (i, i')_c + H^k [i, i']_s\} \sin \omega \sin [(k+i)g + i'g'] \\ & - \{G^k (i, i')_s - H^k [i, i']_c\} \sin \omega \cos [(k+i)g + i'g'] \\ & + \{G^k (i, i')_c - H^k [i, i']_s\} \cos \omega \sin [(k+i)g + i'g'] \\ & - \{G^k (i, i')_s + H^k [i, i']_c\} \cos \omega \cos [(k+i)g + i'g']\end{aligned}$$

Wir können diesem Ausdruck eine für die Rechnung bequemere Form geben, nemlich die folgende, die dadurch entsteht, daſs man in dem vorhergehenden Ausdrucke die Producte der Sinusse und Cosinusse in linearische Sinusse und Cosinusse verwandelt und für G und H deren Summe und Differenz einführt.

(83)....
$$\begin{aligned}(\delta\bar{z}) = & M^k \{(i, i')_s - [i, i']_c\} \sin [(k+i)g + i'g' + \omega] \\ & + M^k \{(i, i')_c + [i, i']_s\} \cos [(k+i)g + i'g' + \omega] \\ & + N^k \{(i, i')_s + [i, i']_c\} \sin [(k+i)g + i'g' - \omega] \\ & + N^k \{(i, i')_c - [i, i']_s\} \sin [(k+i)g + i'g' - \omega]\end{aligned}$$

wo

(84)....
$$M^k = \frac{k^2}{4}\left\{(1-e^2)\frac{R^k}{e} + \sqrt{1-e^2}\left(\frac{dR^k}{k\,de}\right)\right\}$$
$$N^k = \frac{k^2}{4}\left\{(1-e^2)\frac{R^k}{e} - \sqrt{1-e^2}\left(\frac{dR^k}{k\,de}\right)\right\}$$

ausgenommen:

$$M^{(0)} = N^{(0)} = \tfrac{1}{2} e$$

Diese Formel hat besonders deshalb vor jener den Vorzug, weil meistens zwei der Glieder, vermöge der im Artikel 32. auseinandergesetzten Relation, sehr klein werden.

Digitized by Google

Um den vollständigen Werth von $\delta\bar{z}$ zu bekommen, müssen wir noch die Störungen, welche in $\sin(v-\Theta)$ und $\cos(v-\Theta)$ enthalten sind, berücksichtigen. Hiebei müssen wir bemerken, daſs Θ, welches die Länge des aufſteigenden Knotens der Planetenbahn m' auf der Bahn m bedeutet, welche zur angenommenen Zeitepoche statt findet, eine Constante im eigentlichen Sinne ist, und daher unverändert bleibt. Es müssen also $\sin(v-\Theta)$ und $\cos(v-\Theta)$ als bloſse Functionen von v angesehen werden. Wir bekommen aber den vollständigen Werth irgend einer Function von v, welche die Elemente der Bahn auſserdem nicht enthält, wenn wir in dem rein elliptischen Werthe dieser Function nz für nt schreiben, das ist, wenn wir g um $n(z)$ vermehren. Wir haben also nach dem Taylorschen Theorem:

$$\delta\bar{z} = (\delta\bar{z}) + k\left(\frac{d.(\delta\bar{z})}{d.kg}\right) n(z) \qquad \text{....(85)}$$

wo der Differentialquotient so zu verstehen ist, daſs nur in Beziehung auf g differentiirt werde, in so fern diese Gröſse mit dem Index k behaftet ist. Wir bekommen also diesen Differentialquotienten, wenn wir die Gleichung (83) auf die angezeigte Art differentiiren, nemlich:

$$\begin{aligned} k\left(\frac{d.(\delta\bar{z})}{d.kg}\right) = \; & kM^{(k)} \{(i, i')_c - [i, i']_s\} \cos[(k+i)g + i'g' + \omega] \\ - \; & kM^{(k)} \{(i, i')_c + [i, i']_s\} \sin[(k+i)g + i'g' + \omega] \\ + \; & kN^{(k)} \{(i, i')_c + [i, i']_s\} \cos[(k+i)g + i'g' - \omega] \\ - \; & kN^{(k)} \{(i, i')_c - [i, i']_s\} \sin[(k+i)g + i'g' - \omega] \end{aligned} \qquad \text{....(86)}$$

Diese Formel ist leicht zu berechnen, weil man aus der Berechnung von (83) die einzelnen Glieder schon hat, und diese also nur mit k oder $-k$ zu multipliciren, und die Sinusse in Cosinusse und umgekehrt zu verwandeln nöthig hat.

Man braucht die Formeln (83) bis (86) nur für die periodischen Störungen anzuwenden, denn die der Zeit proportionalen Störungen kann man, weil sie g und g' nicht enthalten, ohne Weiteres in (82) substituiren und somit von der wahren gestörten Länge in der Bahn abhängig machen. Dieses verursacht in der nachherigen Anwendung der Störungen, nemlich um den Ort des Planeten zu berechnen, nicht

Digitized by Google

die mindeste Unbequemlichkeit, weil man, wenn man zur Berechnung der Breite übergeht, schon die Länge hat, und auch selbst für die Berechnung von (s) schon ohnehin haben muſs.

Da bei dem Jupiter und Saturn manche Glieder vorkommen, für welche nur das Hauptglied in (83) merklich wird, so will ich dieses als Näherungsformel hinsetzen. Wir haben aus dem Artikel 11., wenn wir nur auf die von der Excentricität abhängigen Glieder Rücksicht nehmen:

$$\frac{R^{(1)}}{e} = -1 \quad \text{und} \quad \left(\frac{dR^{(1)}}{de}\right) = -1$$

und daher unter denselben Vernachlässigungen durch die Gleichungen (84):

$$M^{(1)} = -\tfrac{1}{2} \quad ; \quad N^{(-1)} = -\tfrac{1}{2}$$

und die übrigen dieser Gröſsen sind alle Null. Hiemit giebt (83):

$$(87)\ldots\quad \begin{aligned} (\delta\bar{s}) = &-\tfrac{1}{2}\{(i,i')_s - [i,i']_c\} \sin\,[(i+1)g + i'g' + \omega] \\ &-\tfrac{1}{2}\{(i,i')_c + [i,i']_s\} \cos\,[(i+1)g + i'g' + \omega] \\ &-\tfrac{1}{2}\{(i,i')_s + [i,i']_c\} \sin\,[(i-1)g + i'g' - \omega] \\ &-\tfrac{1}{2}\{(i,i')_c - [i,i']_s\} \cos\,[(i-1)g + i'g' - \omega] \end{aligned}$$

37.

Die vollständige Reduction der Länge auf die bewegliche Ecliptik ist durch die Gleichung (H. 31.) gegeben, wenn wir in Folge des mehrmals Erwähnten auch hier Θ von den Längen abziehen. Setzen wir aber wie (H. 32.):

$$(88)\ldots\quad \sin\,((v)-v) = -\sin\,((v)+v-2(\theta))\,\mathrm{tg}^2\,\tfrac{1}{2}\,(i)$$

und vernachlässigen wir in der Differenz $\bar{v}-(v)$ die Gröſsen zweiter Ordnung nach $\bar{p}$ und $\bar{q}$, so wie nach (p) und (q), so bekommen wir leicht:

$$\begin{aligned} \sin\,(\bar{v}-v) - \sin\,((v)-v) = &-\tfrac{1}{4}\,(\bar{q}^2-(q)^2-\bar{p}^2+(p)^2)\sin 2(v-\Theta) \\ &+\tfrac{1}{2}\,(\bar{p}\bar{q}-(p)(q))\cos 2(v-\Theta) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \delta\,(\bar{v}-v) = &\ \tfrac{1}{2}\,[(p)\,\delta\bar{p}-(q)\,\delta\bar{q}]\,\sin\,2\,(v-\Theta) \\ &+\tfrac{1}{2}\,[(p)\,\delta\bar{q}+(q)\,\delta\bar{p}]\,\cos\,2\,(v-\Theta) \end{aligned}$$

Digitized by Google

wenn wir

$$((v)-v)+\delta(\bar{v}-v)=\bar{v}-v$$

machen. Nehmen wir nun an, daſs

$$\delta\bar{p}=hnt \quad ; \quad \delta\bar{q}=lnt$$

sei, so giebt die vorstehende Gleichung für $\delta(\bar{v}-v)$:

$$\begin{aligned}\delta(\bar{v}-v) &= \tfrac{1}{2}\,[(p)h-(q)l]\,nt\sin 2(v-\Theta)\\ &+\tfrac{1}{2}\,[(p)l+(q)h]\,nt\cos 2(v-\Theta)\end{aligned} \qquad \ldots.(89)$$

man kann diese von der wahren Länge abhängigen Glieder eben so leicht anwenden, als die im vorigen Artikel.

38.

Wenn man die in den Artikeln 14., 16. und 35. gegebenen numerischen Werthe von (p), (q), p und q für den Saturn mit einander und mit den Gliedern dritter Ordnung in (78) und (79) vergleicht, so wird man leicht gewahr, daſs die periodischen Glieder nichts Merkliches geben können; wir brauchen uns also jetzt nur an die der Zeit proportionalen zu halten. Wir haben also, wenn wir die betreffenden Werthe aus den Artikeln 16. und 35. addiren, für den Saturn:

$$\begin{aligned}p' &= +\;1'',83472\;n't\;-\;0'',0000184\;n'^2t^2\\ q' &= +\;0'',02156\;n't\;+\;0'',0005597\;n'^2t^2\end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned}a &= +\;1'',83472 \quad ; \quad b=-\;0'',0000184\\ c &= +\;0'',02156 \quad ; \quad d=+\;0'',0005597\end{aligned}$$

und aus dem Artikel 14. ziehen wir:

$$\begin{aligned}(p') &= +\;0'',010648\\ (q') &= -\;0'',042179\end{aligned}$$

Hiemit giebt die Gleichung (80):

$$\begin{aligned}[p'] &= (p')\;+\;1'',83463\;n't\;-\;0'',0000184\;n'^2t^2\\ [q'] &= (q')\;+\;0'',02196\;n't\;+\;0'',0005595\;n'^2t^2\end{aligned}$$

also:

Digitized by Google

$$\alpha = + 1{,}''83463 \quad ; \quad \beta = - 0{,}''0000184$$
$$\gamma = + 0{,}''02196 \quad ; \quad \varepsilon = + 0{,}''0005595$$

Die Werthe von p_0 und q_0 finden sich in dem dritten Bande der *Méc. cél.* pag. 157., aber sie setzen andere Massen voraus, als die in der jetzigen Zeit für die richtigsten gehaltenen. Die Venusmasse ausgenommen, sind indeſs die dort zum Grunde liegenden Massen so wenig von jenen verschieden, daſs nur Unerhebliches in den genannten Gröſsen geändert werden würde, und darum habe ich die Correction unterlassen. Für die Venusmasse habe ich aber in den mit t multiplicirten Gliedern die Burkhard'sche eingeführt, und zwar durch die a. a. O. pag. 92. gegebenen Correctionscoëfficienten. Die mit t^2 multiplicirten Glieder erleiden natürlich auch dadurch eine Veränderung, welche ich aber nicht berücksichtigen konnte, ohne daſs ich die Gröſsen p_0 und q_0 von Neuem berechnen müſste. Diese Berechnung habe ich unterlassen, weil zu hoffen steht, daſs wir bald verbesserte Sonnentafeln, und also auch genauere Werthe von p_0 und q_0 erhalten werden; alsdann können die hier folgenden Rechnungen, welche sich auf p_0 und q_0 beziehen, leicht umgeändert werden.

Nach der eben genannten Abänderung, und wenn $t + 50$ für t substituirt wird, um das Jahr 1800 zur Zeitepoche zu machen; wenn ferner mit n' und n'^2 dividirt und das Resultat in Sexagesimalsecunden verwandelt wird, ergiebt sich:

$$p_0 = + 0{,}''34292\, n't + 0{,}''0005080\, n'^2 t^2$$
$$q_0 = - 2{,}''27650\, n't + 0{,}''0001565\, n'^2 t^2$$

Diese Gröſsen gehen aber von einem andern Anfangspunkte aus, als die, welche wir hier auſserdem berechnet haben. Es ist nemlich:

$$p_0 = \sin i_0 \sin \theta_0$$
$$q_0 = \sin i_0 \cos \theta_0$$

wenn i_0 und θ_0 die Neigung und die Länge des aufsteigenden Knotens der Erdbahn für eine jede beliebige Zeit t in Beziehung auf die feste, zur angenommenen Zeitepoche statt findende Ecliptik bedeuten. Statt dieser müssen wir hier die folgenden Gröſsen

Digitized by Google

$$\overset{\text{I}}{p}_0 = \sin i_0 \sin (\theta_0 - \Theta)$$
$$\overset{\text{I}}{q}_0 = \sin i_0 \cos (\theta_0 - \Theta)$$

gebrauchen. Lösen wir aber den zusammengesetzten Sinus und Cosinus auf, so erhalten wir:

$$\overset{\text{I}}{p}_0 = \sin i_0 \sin \theta_0 \cos \Theta - \sin i_0 \cos \theta_0 \sin \Theta$$
$$\overset{\text{I}}{q}_0 = \sin i_0 \cos \theta_0 \cos \Theta + \sin i_0 \sin \theta_0 \sin \Theta$$

das ist:

$$\overset{\text{I}}{p}_0 = p_0 \cos \Theta - q_0 \sin \Theta$$
$$\overset{\text{I}}{q}_0 = q_0 \cos \Theta + p_0 \sin \Theta$$

Nach der Substitution der gegebenen numerischen Werthe erhalten wir hieraus:

$$\overset{\text{I}}{p}_0 = -\ 1{,}''63729\ n't + 0{,}''0004257\ n'^2 t^2$$
$$\overset{\text{I}}{q}_0 = -\ 1{,}''61851\ n't - 0{,}''0003183\ n'^2 t^2$$

also:

$$\alpha_0 = -\ 1{,}''63729 \quad ; \quad \beta_0 = +\ 0{,}''0004257$$
$$\gamma_0 = -\ 1{,}''61851 \quad ; \quad \varepsilon_0 = -\ 0{,}''0003183$$

und somit, vermittelst der Gleichungen (81):

$$\bar{p}' = (p') + 3{,}''47037\ n't - 0{,}''0004436\ n'^2 t^2$$
$$\bar{q}' = (q') + 1{,}''63893\ n't + 0{,}''0008776\ n'^2 t^2$$

Um die vollständigen Werthe von $\delta\bar{p}'$ und $\delta\bar{q}'$, so wie wir sie jetzt zur Berechnung von $\delta\bar{s}'$ brauchen müssen, zu erhalten, müssen hierzu die periodischen Störungen von p' und q' addirt werden.

Durch Hülfe der in dem Art. 15. gegebenen numerischen Werthe für den Saturn und durch die Gleichungen (84) hat sich ergeben:

$\log M^{(0)} = 8{,}44832$	$\log N^{(0)} = 8{,}44832$
$\log M^{(1)} = 9{,}69760_n$	$\log N^{(1)} = 6{,}2945$
$\log M^{(2)} = 8{,}44661_n$	$\log N^{(2)} = 4{,}8675$
$\log M^{(3)} = 7{,}2468_n$	
$\log M^{(4)} = 6{,}0696_n$	

und es ist

Digitized by Google

$$M^{(-i)} = N^{(i)} \quad ; \quad N^{(-i)} = M^{(i)}$$

Dieser angeführten numerischen Werthe sind mehr als wir brauchen.

Wir haben nun alles, was zur Berechnung von $(\delta \bar{s}')$ und $k\left(\frac{d(\delta\bar{s}')}{dkg'}\right)$ nöthig ist. Diese Rechnung ist so einfach, daſs ich es für unnöthig halte, Zwischenzahlen anzuführen. Ich bemerke bloſs, daſs die Glieder, in welchen die mittlere Anomalie des Jupiters mit 0, — 1 und — 2 multiplicirt ist, nach der strengen Formel (83), die übrigen aber nach (87) berechnet worden sind. Wir wollen uns zuerst zum zweiten Gliede in (35) wenden. Wir müssen, wie in Art. 36. gezeigt ist, in dem Differentialquotienten nur die periodischen Glieder von $\delta\bar{p}$ und $\delta\bar{q}$ aufnehmen, und wir brauchen für den Saturn nur höchstens das gröſste dieser, das ist das mit dem Argumente $4g' - 2g$ behaftete Glied. Dieses ergab sich durch (86) wie folgt:

$$k\left(\frac{d(\delta\bar{s}')}{dkg'}\right) = -\, 4{,}''40 \cos(4g' - 2g - \omega') + 7{,}''22 \sin(4g' - 2g - \omega')$$

Die mit der Zeit multiplicirten Glieder in dem vollständigen Werthe von $n'(z')$, so wie die gröſsten der periodischen, sind:

$$\begin{aligned} n'(z') = &-\ 6{,}''545\, n't \sin g' - 10{,}''053\, n't \cos g' \\ &-\ 0{,}090\, n't \sin 2g' - 0{,}138\, n't \cos 2g' \\ &-413{,}41 \sin(2g'-g) - 8{,}45 \cos(2g'-g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \{83{,}''96 - 0{,}''583\, n't\} \sin(4g'-2g) + \{-662{,}''01 + 0{,}''010\, n't\} \cos(4g'-2g) \\ &+ \{-1087{,}33 - 3{,}324\, n't\} \sin(5g'-2g) + \{-2574{,}85 + 1{,}975\, n't\} \cos(5g'-2g) \end{aligned}$$

Das Product dieser beiden Gröſsen erhält man auf die nemliche Art, wie die früheren ähnlichen, nemlich durch die im Art. 24. gegebenen Vorschriften. Es findet sich:

$$\begin{aligned} k\left(\frac{d.(\delta\bar{s}'}{d.kg'}\right) n'(z') = &+ \{0{,}''057 + 0{,}''00001\, n't\} \sin(g'+\omega') + \{0{,}''008 - 0{,}''00008\, n't\} \cos(g'+\omega') \\ &- 0{,}00025\, n't \sin(3g'-2g-\omega') - 0{,}00001\, n't \cos(3g'-2g-\omega') \\ &- 0{,}00011\, n't \sin(5g'-2g-\omega') + 0{,}00021\, n't \cos(5g'-2g-\omega') \\ &+ \{-0{,}033 + 0{,}00007\, n't\} \sin(9g'-4g-\omega') + \{0{,}046 + 0{,}00004\, n't\} \cos(9g'-4g-\omega') \end{aligned}$$

Wenn man diese Gröſse zu dem auf die oben beschriebene Art berechneten Werthe von $(\delta\bar{s}')$ addirt, so bekommt man:

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
\delta z' = \{1'',63893\, n't + 0'',0008776\, n'^2t^2\} \sin(\nu'-\Theta') & \\
& + \{-3'',47037\, n't + 0'',0004436\, n'^2t^2\} \cos \nu'-\Theta') \\
-0,117 \sin \omega' & \quad +0'',349 \cos \omega' \\
+\{\ 0,061 + 0,00001\, n't\} \sin(g'+\omega') & \quad +\{\ 0,017 - 0'',00008\, n't\} \cos(g'+\omega') \\
+0,277 \sin(g'-\omega') & \quad -0,886 \cos(g'-\omega') \\
-0,192 \sin(2g'+\omega') & \quad +0,183 \cos(2g'+\omega') \\
-0,023 \sin(2g'-\omega') & \quad -0,098 \cos(2g'-\omega') \\
+0,116 \sin(-g'-g+\omega') & \quad -0,023 \cos(-g'-g+\omega') \\
-0,037 \sin(-g'-g-\omega') & \quad +0,120 \cos(-g'-g-\omega') \\
-1,162 \sin(-g'+\omega') & \quad +0,612 \cos(-g'+\omega') \\
-0,583 \sin(-g'-\omega') & \quad -3,006 \cos(-g'-\omega') \\
+0,042 \sin(g'-g+\omega') & \quad -0,207 \cos(g'-g+\omega') \\
+1,014 \sin(g'-g-\omega') & \quad +0,026 \cos(g'-g-\omega') \\
+0,114 \sin(2g'-g+\omega') & \quad +0,765 \cos(2g'-g+\omega') \\
+2,129 \sin(2g'-g-\omega') & \quad +0,288 \cos(2g'-g-\omega') \\
+0,434 \sin(3g'-g+\omega') & \quad +0,426 \cos(3g'-g+\omega') \\
+0,114 \sin(3g'-g-\omega') & \quad -0,098 \cos(3g'-g-\omega') \\
-0,067 \sin(4g'-g+\omega') & \quad +0,016 \cos(4g'-g+\omega') \\
-0,013 \sin(4g'-g-\omega') & \quad +0,004 \cos(4g'-g-\omega') \\
-0,096 \sin(-2g+\omega') & \quad +0,072 \cos(-2g+\omega') \\
-0,079 \sin(-2g-\omega') & \quad -0,163 \cos(-2g-\omega') \\
+0,244 \sin(g'-2g+\omega') & \quad +0,283 \cos(g'-2g+\omega') \\
-0,570 \sin(g'-2g-\omega') & \quad +0,267 \cos(g'-2g-\omega') \\
+0,100 \sin(2g'-2g+\omega') & \quad -0,016 \cos(2g'-2g-\omega') \\
-0,027 \sin(2g'-2g-\omega') & \quad +0,219 \cos(2g'-2g-\omega') \\
-0,218 \sin(3g'-2g+\omega') & \quad +0,075 \cos(3g'-2g+\omega') \\
+\{\ 0,195 - 0,00052\, n't\} \sin(3g'-2g-\omega') & \quad +\{-0,276 + 0,00016\, n't\} \cos(3g'-2g-\omega') \\
-0,071 \sin(4g'-2g+\omega') & \quad +0,114 \cos(4g'-2g+\omega') \\
+\{\ 4,399 - 0,00487\, n't\} \sin(4g'-2g-\omega') & \quad +\{\ 7,255 + 0,00300\, n't\} \cos(4g'-2g-\omega') \\
+0,007 \sin(5g'-2g+\omega') & \quad +0,068 \cos(5g'-2g-\omega') \\
+\{-0,247 + 0,00016\, n't\} \sin(5g'-2g-\omega') & \quad +\{-0,407 + 0,00004\, n't\} \cos(5g'-2g-\omega') \\
+\{-0,140 + 0,00026\, n't\} \sin(6g'-2g+\omega') & \quad +\{-0,198 - 0,00026\, n't\} \cos(6g'-2g+\omega') \\
-0,113 \sin(2g'-3g+\omega') & \quad +0,150 \cos(2g'-3g+\omega') \\
-0,156 \sin(2g'-3g-\omega') & \quad -0,217 \cos(2g'-3g-\omega') \\
+0,014 \sin(3g'-3g+\omega') & \quad +0,054 \cos(3g'-3g+\omega') \\
-0,120 \sin(3g'-3g-\omega') & \quad -0,030 \cos(3g'-3g-\omega') \\
-0,048 \sin(4g'-3g+\omega') & \quad -0,077 \cos(4g'-3g+\omega') \\
+0,134 \sin(4g'-3g-\omega') & \quad -0,044 \cos(4g'-3g-\omega') \\
-0,045 \sin(5g'-3g+\omega') & \quad -0,020 \cos(5g'-3g+\omega') \\
+0,101 \sin(5g'-3g-\omega') & \quad -0,107 \cos(5g'-3g-\omega') \\
-0,018 \sin(6g'-3g+\omega') & \quad +0,002 \cos(6g'-3g+\omega') \\
+0,045 \sin(6g'-3g-\omega') & \quad -0,127 \cos(6g'-3g-\omega') \\
-0,086 \sin(3g'-4g+\omega') & \quad -0,040 \cos(3g'-4g+\omega') \\
+0,083 \sin(3g'-4g-\omega') & \quad -0,090 \cos(3g'-4g-\omega') \\
-0,035 \sin(4g'-4g+\omega') & \quad +0,009 \cos(4g'-4g+\omega') \\
+0,007 \sin(4g'-4g-\omega') & \quad -0,068 \cos(4g'-4g-\omega') \\
+0,026 \sin(5g'-4g+\omega') & \quad -0,025 \cos(5g'-4g+\omega') \\
+0,023 \sin(5g'-4g-\omega') & \quad +0,038 \cos(5g'-4g-\omega') \\
+\{\ 0,059 + 0,00007\, n't\} \sin(9g'-4g-\omega') & \quad +\{-0,084 + 0,00004\, n't\} \cos(9g'-4g-\omega')
\end{aligned}
$$

Digitized by Google

Ich habe den Werth von $(\delta\bar{z}')$ nicht besonders hingeschrieben, denn wenn man ihn kennen lernen will, so braucht man nur $k\left(\frac{d.(\delta\bar{z}')}{d.kg}\right) n'(z')$ von $\delta\bar{z}'$ abzuziehen.

Der nach der Gleichung (88) zu berechnenden Reduction auf die Ecliptik wird folgende Gröſse hinzugefügt, die nach (89) berechnet ist,

$$\delta(\bar{v}'-v') = +\,0{,}''05305\; n't \sin(2v'-2\Theta') - 0{,}''06447\; n't \cos(2v'-2\Theta')$$

39.

Es können in der Bewegung des Saturns noch einige Störungen dritter Ordnung merklich werden. Um diese vollständig zu berechnen, sind auſser den Störungen des Saturns auch noch die Störungen erster und zweiter Ordnung des Jupiters erforderlich, aber da ich die letzten noch nicht habe, so habe ich die Störungen dritter Ordnung des Saturns bis jetzt nicht vollständig berechnen können. Den Theil dieser Störungen, welcher aus den Störungen niedrigerer Ordnungen des Saturns entsteht, habe ich indeſs berechnet, und da dieser Theil bei Weitem der gröſsere sein muſs, so will ich ihn hier hinzufügen. Die Nähe des von der Königl. Akademie festgesetzten Termins erlaubt mir aber nicht, im Einzelnen die Rechnungen darzulegen; ich will daher von den Grundzügen dieser nur das Allerwesentlichste hersetzen, und dann die Störungen in Summa anführen.

Wir wollen jetzt

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

setzen, und annehmen, daſs die Gröſsen erster und zweiter Ordnung resp. in T_1 und T_2 wie früher enthalten seien, so daſs T_3 nur die Gröſsen dritter Ordnung enthält. Wir haben also:

$$\frac{d.\dfrac{\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)}{\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)}}{d\tau} = T_1 + T_2 + T_3$$

und wenn man nach τ integrirt und mit $\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)$ multiplicirt:

Digitized by Google

$$\frac{d\zeta}{dt} = \left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right) \int T_1 d\tau + \left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right) \int T_2 d\tau + \left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right) \int T_3 d\tau$$

Wir haben schon früher

$$\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right) = 1 + \left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right)$$

gemacht und zur Berechnung der Störungen zweiter Ordnung in $\left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right)$ die Glieder erster Ordnung gebraucht. Jetzt, da wir in dieser Gröſse auch die Störungen zweiter Ordnung haben müssen, können wir

$$\left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right) = \left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right)_1 + \left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right)_2$$

setzen, wo der unten angehängte Index ebenfalls die Ordnung der Gröſse anzeigt. Es ist nach diesem also:

$$\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right) = 1 + \left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right)_1 + \left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right)_2$$

Wenn wir diese Gröſsen in die obige Gleichung für $\frac{d\zeta}{dt}$ substituiren und nur die Glieder dritter Ordnung beibehalten, das ist, diejenigen, in welchen die Summe der Indices drei ist, so ergiebt sich:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right)_1 \int T_2 d\tau + \left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right)_2 \int T_1 d\tau + \int T_3 d\tau$$

Wenn man diese Gleichung nach τ differentiirt, so erhält man:

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau dt} = \left(\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}\right)_1 \int T_2 d\tau + \left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right)_1 T_2 + \left(\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}\right)_2 \int T_1 d\tau + \left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right)_2 T_1 + T_3$$

Um T_3 zu bekommen, müssen wir die beiden ersten Glieder des Taylorschen Theorems auf T_1 anwenden, so wie wir in der zweiten Approximation das erste Glied dieses Theorems benutzten. Wir haben also für den einen Theil des Werthes von T_3 einen Ausdruck, der wie (43) für T_2 beschaffen ist, nur findet der Unterschied statt, daſs unter dem zweiten Factor eines jeden Gliedes nur die darin enthaltenen Glieder zweiter Ordnung verstanden werden müssen. Den übrigen Theil von T_3 bekommt man, wenn man, dem Taylorschen Theorem gemäſs, den ersten Factor eines jeden Gliedes des Ausdrucks

Digitized by Google

(43) ſucceſsive in Beziehung auf jede in T_1 enthaltene veränderliche Gröſse differentiirt, mit den betreffenden Störungen erſter Ordnung multiplicirt und das Reſultat durch zwei dividirt.

Der obige Ausdruck für $\frac{d^2\zeta}{d\tau dt}$ beſteht demnach aus Gliedern zweierlei Gattung. Die eine dieſer Gattungen enthält nur Glieder, welche aus dem Producte eines gewiſſen Differentialquotienten der Gröſse T_1 in die Störungen, welche die zweite Approximation gegeben hat, beſtehen; die andere Gattung enthält nur Glieder, welche aus dem Producte irgend eines Differentialquotienten der Gröſse T_1 in ein Product der Störungen, die die erſte Approximation gegeben hat, zuſammengeſetzt ſind. Zu dieſer letzteren Gattung gehören, wie man leicht erkennt, auch die beiden erſten Glieder in dem vorſtehenden Ausdrucke für $\frac{d^2\zeta}{d\tau dt}$. Die erſt genannte Gattung iſt in der Bewegung des Saturns faſt allein merklich, und dieſe muſs jeden Falls ein gröſseres Reſultat geben, wie die zweite Gattung. Dies läſst ſich folgendermaaſsen erklären. In den Störungen der zweiten Approximation, welche in der erſten Gattung von Gliedern vorkommen, haben die Störungen der erſten Approximation eine Integration mehr erlitten, als in den bloſsen Producten derſelben, die in der zweiten Gattung vorkommen; ſie enthalten alſo die groſsen Factoren, womit einige Glieder bei jeder Integration multiplicirt werden, in einer höheren Potenz, und müſſen folglich gröſsere Glieder enthalten, als die bloſsen Producte der Störungen erſter Ordnung; ſie geben in den Störungen dritter Ordnung alſo nothwendig gröſsere Glieder als dieſe. Bei dem Saturn ſind es namentlich nur die mit den Argumenten $n't \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} g'$ und $n'^2t^2 \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} g'$ behafteten Glieder, ſo wie diejenigen, die den Factor $\frac{n'}{5n'-2n}$ enthalten, welche in der dritten Approximation Erhebliches hervorbringen können; ich habe indeſs in meinen Rechnungen auch die von den Argumenten $n't \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} (2g'-g)$ und $n't \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} (3g'-g)$ abhängigen aufgenommen. Dieſe Glieder geben in nz auch nur in den mit der Zeit multiplicirten Gliedern, und in den rein periodiſchen, die bei der Integration aus jenen entſtehen, ein merkliches Reſultat; ſie durften aber auf keine Weiſe übergangen werden, denn ſie vermehren unter andern die in der zweiten Approximation gefundenen, mit t^2 multiplicirten Glieder um ohngefähr

Digitized by Google

die Hälfte. Da, wie gesagt, die Glieder der zweiten Gattung fast verschwinden, so hat die Rechnung fast ganz nach der Formel (44) geführt werden können, mit dem Vorbehalt, daſs unter dem zweiten Factor jedes Gliedes nur die in demselben enthaltenen Glieder zweiter Ordnung verstanden werden müssen.

Der vollständige Ausdruck für den Logarithmus des Radius Vectors, durch die Länge ausgedrückt, ist bereits im Art. 27. gegeben, und man ersieht daraus, daſs in der dritten Approximation ein Glied hinzukommt; dieses kann aber bei dem Saturn völlig vernachlässigt werden, und diese Störungen können also ebenfalls nach den Formeln für die zweite Approximation berechnet werden.

Wenn nur ein störender Planet vorhanden ist, wie in der uns beschäftigenden Aufgabe, so werden die Störungen dritter Ordnung in drei Theile zerfallen, die resp. mit m'^3, m'^2m und $m'm^2$ multiplicirt sind. Die Störungen zweiter Ordnung des gestörten Planeten geben Störungen, welche mit m'^3 und m'^2m multiplicirt sind, und die Störungen zweiter Ordnung des störenden Planeten geben Störungen, die mit m'^2m und $m'm^2$ multiplicirt sind. Da ich bei den gleich folgenden Störungen dritter Ordnung des Saturns nur die Störungen zweiter Ordnung desselben Planeten habe benutzen können, so enthalten sie den mit dem Cubus der Jupitermasse multiplicirten Theil vollständig, und überdies noch einen Theil der mit dem Producte aus dem Quadrat der Jupitermasse in die Saturnmasse multiplicirten Störungen. Die erstgenannten machen auf jeden Fall den beträchtlichsten Theil der gesammten Störungen dritter Ordnung des Saturns aus, weil die Jupitermasse gröſser ist als die Saturnmasse. Wenn ich die zweite Approximation für den Jupiter fertig haben, und alsdann die Störungen dritter Ordnung vollständig berechnet haben werde, werde ich die Störungen dritter Ordnung nach den Producten der Massen, womit sie multiplicirt sind, abgesondert geben, wie ich es bei den Störungen zweiter Ordnung gethan habe; für jetzt lasse ich das Integral der Summe der berechneten Glieder folgen.

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
n'z' = \; & -0'',0000061\,n'^2t^2 \\
& +\{-0'',03517\,n't - 0,0010127\,n'^2t^2\}\sin g' && +\{-0'',07547\,n't + 0'',0007731\,n'^2t^2\}\cos g' \\
& +\{-0,00040\,n't - 0,0000233\,n'^2t^2\}\sin 2g' && +\{-0,00093\,n't + 0,0000430\,n'^2t^2\}\cos 2g' \\
& \qquad -0,0000004\,n'^2t^2 \;\sin 3g' && \qquad +0,0000012\,n'^2t^2\}\cos 3g' \\
& +0,00106\,n't\sin(g'-g) && -0,00237\,n't\cos(g'-g) \\
& -0,01045\,n't\sin(2g'-g) && +0,01256\,n't\cos(2g'-g) \\
& +0,00377\,n't\sin(3g'-g) && +0,00329\,n't\cos(3g'-g) \\
& +0,00342\,n't\sin(3g'-2g) && -0,00255\,n't\cos(3g'-2g) \\
& +\{-0,386 - 0,09131\,n't\}\sin(4g'-2g) && +\{-2,361 + 0,00908\,n't\}\cos(4g'-2g) \\
& +\{-30,532 - 0,84347\,n't + 0'',0017677\,n'^2t^2\}\sin(5g'-2g) \\
& \qquad +\{-45'',739 + 0'',55583\,n't + 0'',0024722\,n'^2t^2\}\cos(5g'-2g) \\
& +\{-0,729 - 0,00585\,n't\}\sin(6g'-2g) && +\{-0,354 + 0,01116\,n't\}\cos(6g'-2g) \\
& +\{\;0,018 + 0,00011\,n't\}\sin(8g'-4g) && +\{\;0,007 - 0,00039\,n't\}\cos(8g'-4g) \\
& +\{-0,665 + 0,00391\,n't\}\sin(9g'-4g) && +\{\;0,193 + 0,00837\,n't\}\cos(9g'-4g) \\
& +\{-1,853 + 0,02617\,n't\}\sin(10g'-4g) && +\{\;2,084 + 0,01816\,n't\}\cos(10g'-4g)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l(r') = \; & +0'',00050\,n't + 0'',0000180\,n'^2t^2 \\
& +\{+0,01836\,n't + 0,0005064\,n'^2t^2\}\cos g' && +\{-0'',03875\,n't + 0'',0003866\,n'^2t^2\}\sin g' \\
& +\{+0,00045\,n't + 0,0000233\,n'^2t^2\}\cos 2g' && +\{-0,00096\,n't + 0,0000430\,n'^2t^2\}\sin 2g' \\
& \qquad +0,0000006\,n'^2t^2 \;\cos 3g' && + \qquad +0,0000018\,n'^2t^2 \;\sin 3g' \\
& +0,00051\,n't\cos(g'-g) && +0,00112\,n't\sin(g'-g) \\
& +0,00645\,n't\cos(2g'-g) && -0,00251\,n't\sin(2g'-g) \\
& -0,00176\,n't\cos(3g'-g) && +0,00006\,n't\sin(3g'-g) \\
& +0,00237\,n't\cos(3g'-2g) && -0,00290\,n't\sin(3g'-2g) \\
& +\{-0,195 - 0,04723\,n't\}\cos(4g'-2g) && +\{\;1,172 - 0,00470\,n't\}\sin(4g'-2g) \\
& +0,01260\,n't\cos(5g'-2g) && +0,00760\,n't\sin(5g'-2g) \\
& +\{\;0,358 + 0,00283\,n't\}\cos(6g'-2g) && +\{-0,174 + 0,00540\,n't\}\sin(6g'-2g) \\
& +\{-0,352 + 0,00210\,n't\}\cos(9g'-4g) && +\{-0,101 - 0,00448\,n't\}\sin(9g'-4g)
\end{aligned}
$$

40.

Da das Resultat, welches wir jetzt für den Saturn haben, nur wenig verändert werden wird, wenn die Störungen dritter Ordnung vollständig berechnet sein werden, so wollen wir die einzelnen Theile addiren und unter die einfachste Form bringen. Unsere Glieder haben die allgemeine Form:

$$\alpha \sin \chi + \beta \cos \chi$$

wenn wir also

$$\alpha = c \cos C$$
$$\beta = c \sin C$$

setzen, so ist:

$$\alpha \sin \chi + \beta \cos \chi = c \sin(\chi + C)$$

oder wenn wir

$$-\alpha = d \sin D$$
$$\beta = d \cos D$$

machen, so haben wir:

$$\beta \cos \chi + \alpha \sin \chi = d \cos (\chi + D)$$

dieſe beiden Formen können nach Gefallen angewendet werden. Es iſt klar, daſs die Unbeſtimmtheit, welche dieſe Formeln hinſichtlich des Halbkreiſes, worin *C* oder *D* zu nehmen iſt, übrig laſſen, keinen Einfluſs hat, wenn man nur den Coëfficienten *c* oder *d* ſo beſtimmt, daſs den Hülfsgleichungen mit Rückſicht auf die algebraiſchen Zeichen Genüge geleiſtet iſt.

Man hat bisher die mit der Zeit multiplicirten Glieder ſo mit den obigen Ausdrücken vereinigt, daſs ein Theil davon auf den Coëfficienten *c* oder *d*, und ein Theil auf den Bogen *C* oder *D* übergegangen iſt. Zu dem Ende rechnet man nach den obigen Formeln *c* und *C* oder *d* und *D* für zwei oder mehrere Epochen, indem man in den mit der Zeit multiplicirten Gliedern zwei oder mehrere beſtimmte Werthe für *t* annimmt, und aus den ſo erhaltenen, für verſchiedene Zeitmomente geltenden Werthe von *c* und *C*, oder *d* und *D*, ſucht man die ihnen in der Einheit von *t* zukommende Änderung. Dieſe Reductionsart hat die Unbequemlichkeit, daſs die Perioden der Störungen der Länge und des Radius, die ſonſt einander gleich wären, im Allgemeinen verſchieden ausfallen, und alſo in den Planetentafeln eigentlich für die Störungen der Länge und des Radius, die von den nemlichen Argumenten abhängen, verſchiedene Bewegungen der Argumente angegeben werden müſsten. Obgleich bei dem Saturn dieſe Unterſchiede in den Bewegungen der Argumente der Länge und des Radius Vectors vielleicht nur wenig betragen könnten, ſo glaube ich doch beſſer gethan zu haben, dieſe Vernachläſſigung mir nicht zu erlauben. Das Mittel dagegen geben die oben angeführten Reductionsformeln, denn nichts hindert, unter α und β abgeſondert, ſowohl die Coëfficienten zu verſtehen, welche die Zeit nicht enthalten, als auch die, welche damit multiplicirt ſind. Man könnte auch den reſp. Argumenten der Länge und des Radius einen gleichen, der Zeit proportionalen Theil hinzufügen, und dieſen

Digitized by Google

so bestimmen, dafs die übrig bleibende Veränderung der Coëfficienten so klein als möglich würde; da aber dieses bei dem Saturn nur eine unerhebliche Änderung der Form des Resultats erzeugen würde, so habe ich es unterlassen; die Vorschriften dafür kann sich übrigens jeder leicht entwerfen.

Die Form unserer Breitenstörungen erfordert, um sie auf die einfachste zu bringen, noch eine Reduction; für diese zerfällt nemlich jedes Glied der obigen Form in folgende:

$$\alpha' \sin(\chi+\omega) + \beta' \cos(\chi+\omega) + \alpha'' \sin(\chi-\omega) + \beta'' \cos(\chi-\omega)$$

aber wenn wir in den beiden ersten Gliedern 2ω addiren und subtrahiren, so bekommen wir leicht:

$$\begin{aligned}\alpha' \sin(\chi+\omega) + \beta' \cos(\chi+\omega) + \alpha'' \sin(\chi-\omega) + \beta'' \cos(\chi-\omega)\\ = \alpha \sin(\chi-\omega) + \beta \cos(\chi-\omega)\end{aligned}$$

wenn wir

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha'' + \alpha' \cos 2\omega - \beta' \sin 2\omega\\ \beta &= \beta'' + \alpha' \sin 2\omega + \beta' \cos 2\omega\end{aligned}$$

machen, und nach der Einführung von c und C werden wir also

$$\alpha \sin(\chi-\omega) + \beta \cos(\chi-\omega) = c \sin(\chi+C-\omega)$$

haben, wo nur noch der numerische Werth von ω zu substituiren ist.

Wenn wir nun die Störungen der Artt. 16., 35. und 40. addiren und nach den Formeln dieses Artikels reduciren, so bekommen wir das unten stehende Resultat, wobei noch folgendes zu bemerken ist. Die mit $n't$ und n'^2t^2 multiplicirten Glieder habe ich mit den aus dem Art. 14. entnommenen und in Theilen des Radius verwandelten numerischen Werthen von n' und n'^2 multiplicirt; die Einheit der Zeit ist also allenthalben ein Julianisches Jahr. Der in dem Vorigen enthaltene Werth von $l(r')$ ist mit dem Modul der Briggischen Logarithmen multiplicirt, und mit $0\rlap{.}''0206265$ dividirt worden; die Einheit ist also die siebente Decimale des Briggischen Logarithmus. Die Störungen der Breite, welche aus denen des Artikel 38. reducirt worden sind, geben eigentlich, wenn sie zu dem aus (82*) berechneten Werthe von (s')

Digitized by Google

addirt werden, den Sinus der wahren Breite, und man müſste also noch den Unterschied zwischen dem Sinus und dem Bogen berücksichtigen; dieses kann ohne Gefahr, merklich zu fehlen, dadurch geschehen, daſs man in den Planetentafeln arc. (sin$=(s')$) statt (s') selbst angiebt.

Wir haben nun als Endresultat der in dieser Abhandlung berechneten Störungen des Saturns:

$$n'z' = n't - 0{,}00000270\ t^2$$

$+\ 17{,}473 \sin(g'+359^\circ\ 0'\ 46'')$	$+2{,}55900\, t \sin(g'+236^\circ\ 56'\ 24'')$
	$+0{,}00017470\, t^2 \sin(g'+142^\circ\ 26'\ 28'')$
$+\ 2{,}227 \sin(2g'+115^\circ\ 24')$	$+0{,}03533\, t \sin(2g'+236^\circ\ 14')$
	$+0{,}00001056\, t^2 \sin(2g'-120^\circ\ 50')$
$+\ 0{,}533 \sin(3g'+91^\circ\ 0')$	$+0{,}00097\, t \sin(3g'+236^\circ\ 35')$
	$+0{,}00000040\, t^2 \sin(3g'+118^\circ\ 55')$
	$+0{,}00003\, t \sin(4g'+240^\circ)$
$+\ 0{,}184 \sin(-2g'-g+169^\circ{,}6)$	
$+\ 0{,}375 \sin(-g'-g+142^\circ{,}2)$	$+0{,}00013\, t \sin(-g'-g+207^\circ)$
$+\ 11{,}790 \sin(\ -g+86^\circ\ 31'\ 6'')$	$+0{,}00112\, t \sin(\ -g+202^\circ{,}4)$
$+\ 7{,}043 \sin(g'-g+190^\circ\ 30')$	$+0{,}00290\, t \sin(g'-g+297^\circ\ 10')$
$+\ 411{,}742 \sin(2g'-g+181^\circ\ 11'\ 48''{,}5)$	$+0{,}03684\, t \sin(2g'-g+123^\circ\ 29')$
$+\ 32{,}575 \sin(3g'-g+122^\circ\ 29'\ 0'')$	$+0{,}00798\, t \sin(3g'-g+54^\circ\ 1')$
$+\ 0{,}105 \sin(4g'-g+91^\circ)$	$+0{,}00026\, t \sin(4g'-g+52^\circ)$
$+\ 0{,}041 \sin(-g'-2g+237^\circ)$	
$+\ 0{,}164 \sin(\ -2g+103^\circ)$	$+0{,}00002\, t \sin(\ -2g+139^\circ)$
$+\ 2{,}679 \sin(g'-2g+250^\circ\ 30')$	$+0{,}00029\, t \sin(g'-2g+290^\circ)$
$+\ 31{,}343 \sin(2g'-2g+156^\circ\ 27'\ 58'')$	$+0{,}00009\, t \sin(2g'-2g+351^\circ)$
$+\ 25{,}418 \sin(3g'-2g+135^\circ\ 15'\ 20'')$	$+0{,}00696\, t \sin(3g'-2g+35^\circ\ 1')$
$+\ 669{,}550 \sin(4g'-2g+277^\circ\ 10'\ 24''{,}1)$	$+0{,}14382\, t \sin(4g'-2g+178^\circ\ 27'\ 18'')$
$+2845{,}811 \sin(5g'-2g+246^\circ\ 53'\ 38''{,}44)$	$+1{,}03707\, t \sin(5g'-2g+148^\circ\ 42'\ 11''{,}3)$
	$+0{,}00013827\, t^2 \sin(5g'-2g+54^\circ\ 26'\ 3'')$
$+\ 1{,}371 \sin(6g'-2g+322^\circ\ 15')$	$+0{,}01572\, t \sin(6g'-2g+125^\circ\ 13')$
$+\ 0{,}096 \sin(g'-3g+259^\circ)$	
$+\ 0{,}206 \sin(2g'-3g+133^\circ{,}4)$	$+0{,}00002\, t \sin(2g'-3g+352^\circ)$
$+\ 6{,}377 \sin(3g'-3g+233^\circ\ 50')$	$+0{,}00002\, t \sin(3g'-3g+330^\circ)$
$+\ 4{,}521 \sin(4g'-3g+202^\circ\ 43')$	$+0{,}00053\, t \sin(4g'-3g+108^\circ)$
$+\ 3{,}252 \sin(5g'-3g+173^\circ\ 48')$	$+0{,}00064\, t \sin(5g'-3g+77^\circ)$
$+\ 3{,}310 \sin(6g'-3g+156^\circ\ 19')$	$+0{,}00131\, t \sin(6g'-3g+46^\circ{,}3)$
$+\ 5{,}345 \sin(7g'-3g+23^\circ\ 50')$	$+0{,}00208\, t \sin(7g'-3g+194^\circ{,}4)$
$+\ 0{,}456 \sin(8g'-3g+11^\circ{,}8)$	$+0{,}00006\, t \sin(8g'-3g+167^\circ)$
$+\ 0{,}145 \sin(3g'-4g+200^\circ{,}6)$	
$+\ 1{,}873 \sin(4g'-4g+311^\circ\ 22')$	
$+\ 1{,}258 \sin(5g'-4g+280^\circ\ 43')$	$+0{,}00015\, t \sin(5g'-4g+186^\circ)$
$+\ 0{,}670 \sin(6g'-4g+250^\circ\ 2')$	$+0{,}00013\, t \sin(6g'-4g+153^\circ)$
$+\ 0{,}301 \sin(7g'-4g+36^\circ{,}3)$	$+0{,}00009\, t \sin(7g'-4g+127^\circ)$

Digitized by Google

$+\ 1{,}''287 \sin(8g'-4g+13^\circ\,12')$	$+\ 0{,}''00001\ t \sin(8g'-4g+11^\circ)$
$+\ 7{,}747 \sin(9g'-4g+163^\circ\,19')$	$+\ 0{,}00098\ t \sin(9g'-4g+66^\circ{,}3)$
$+\ 22{,}254 \sin(10g'-4g+132^\circ\,47'\,2'')$	$+\ 0{,}00460\ t \sin(10g'-4g+34^\circ\,3')$
$+\ 0{,}075 \sin(4g'-5g+273^\circ)$	
$+\ 0{,}650 \sin(5g'-5g+28^\circ{,}5)$	
$+\ 0{,}478 \sin(6g'-5g+359^\circ{,}3)$	
$+\ 0{,}218 \sin(7g'-5g+329^\circ{,}0)$	
$+\ 0{,}035 \sin(8g'-5g+297^\circ)$	
$+\ 0{,}041 \sin(5g'-6g+350^\circ)$	
$+\ 0{,}246 \sin(6g'-6g+73^\circ{,}7)$	
$+\ 0{,}196 \sin(7g'-6g+77^\circ{,}0)$	
$+\ 0{,}096 \sin(8g'-6g+45^\circ)$	
$+\ 0{,}039 \sin(9g'-6g+17^\circ)$	
$+\ 0{,}021 \sin(6g'-7g+67^\circ)$	
$+\ 0{,}096 \sin(7g'-7g+181^\circ)$	
$+\ 0{,}086 \sin(8g'-7g+154^\circ)$	
$+\ 0{,}043 \sin(9g'-7g+126^\circ)$	
$+\ 0{,}040 \sin(8g'-8g+256^\circ)$	
$+\ 0{,}043 \sin(9g'-8g+232^\circ)$	

$$\text{log. br. } (r') = 1812{,}9 + 0{,}415\ t + 0{,}000074\ t^2$$

$+\ 196{,}0 \cos(g'+238^\circ\,34')$	$+26{,}934\ t \cos(g'+56^\circ\,57'\,5'')$
	$+\ 0{,}001841\ t^2 \cos(g'+322^\circ\,30')$
$+\ 44{,}2 \cos(2g'+286^\circ\,10')$	$+\ 0{,}743\ t \cos(2g'+56^\circ\,48')$
	$+\ 0{,}000165\ t^2 \cos(2g'+302^\circ\,3')$
$+\ 10{,}2 \cos(3g'+270^\circ)$	$+\ 0{,}031\ t \cos(3g'+56^\circ\,48')$
	$+\ 0{,}000009\ t^2 \cos(3g'+300^\circ)$
$+\ 9{,}7 \cos(-g'-g+130^\circ)$	$+\ 0{,}002\ t \cos(-g'-g+211^\circ)$
$+\ 80{,}0 \cos(-g+110^\circ\,38')$	$+\ 0{,}008\ t \cos(-g+208^\circ)$
$+3698{,}8 \cos(g'-g+79^\circ\,32'\,45'')$	$+\ 0{,}031\ t \cos(g'-g+298^\circ)$
$+2383{,}8 \cos(2g'-g+175^\circ\,49'\,48'')$	$+\ 0{,}172\ t \cos(2g'-g+111^\circ{,}3)$
$+\ 235{,}1 \cos(3g'-g+307^\circ\,34')$	$+\ 0{,}061\ t \cos(3g'-g+231^\circ)$
$+\ 34{,}8 \cos(4g'-g+343^\circ\,53')$	$+\ 0{,}004\ t \cos(4g'-g+234^\circ)$
$+\ 53{,}6 \cos(g'-2g+97^\circ\,51')$	$+\ 0{,}002\ t \cos(g'-2g+244^\circ).$
$+\ 631{,}1 \cos(2g'-2g+156^\circ\,2')$	$+\ 0{,}003\ t \cos(2g'-2g+10^\circ)$
$+\ 413{,}2 \cos(3g'-2g+141^\circ\,31')$	$+\ 0{,}105\ t \cos(3g'-2g+47^\circ\,7')$
$+6857{,}8 \cos(4g'-2g+277^\circ\,2'\,3'')$	$+\ 1{,}484\ t \cos(4g'-2g+178^\circ\,21'\,46'')$
$+1105{,}5 \cos(5g'-2g+62^\circ\,42'\,16'')$	$+\ 0{,}438\ t \cos(5g'-2g+327^\circ\,6'{,}8)$
$+\ 14{,}8 \cos(6g'-2g+142^\circ)$	$+\ 0{,}165\ t \cos(6g'-2g+305^\circ\,24')$
$+\ 5{,}2 \cos(2g'-3g+170^\circ)$	
$+\ 144{,}1 \cos(3g'-3g+233^\circ\,26')$	
$+\ 100{,}4 \cos(4g'-3g+205^\circ\,48')$	$+\ 0{,}011\ t \cos(4g'-3g+107^\circ)$
$+\ 59{,}3 \cos(5g'-3g+176^\circ{,}9)$	$+\ 0{,}012\ t \cos(5g'-3g+77^\circ)$
$+\ 16{,}8 \cos(6g'-3g+179^\circ)$	$+\ 0{,}018\ t \cos(6g'-3g+48^\circ)$
$+\ 29{,}3 \cos(7g'-3g+21^\circ{,}5)$	$+\ 0{,}011\ t \cos(7g'-3g+195^\circ)$
$+\ 34{,}7 \cos(4g'-4g+310^\circ{,}6)$	

Digitized by Google

$$\begin{array}{ll}
+\ 30{,}8 \cos(5g'-4g+284^\circ,3) & +\ 0{,}003\ t \cos(5g'-4g+185^\circ) \\
+\ 15{,}0 \cos(6g'-4g+258^\circ,9) & +\ 0{,}003\ t \cos(6g'-4g+156^\circ) \\
+\ \ 5{,}5 \cos(7g'-4g+\ 34^\circ) & +\ 0{,}002\ t \cos(7g'-4g+125^\circ) \\
+\ 19{,}0 \cos(8g'-4g+\ 14^\circ,2) & +\ 0{,}001\ t \cos(8g'-4g+102^\circ) \\
+\ 76{,}2 \cos(9g'-4g+163^\circ,1) & +\ 0{,}012\ t \cos(9g'-4g+\ 66^\circ) \\
+\ 16{,}2 \cos(10g'-4g+128^\circ) & +\ 0{,}002\ t \cos(10g'-4g+\ 45^\circ) \\
+\ 15{,}4 \cos(5g'-5g+\ 28^\circ) & \\
+\ 11{,}9 \cos(6g'-5g+\ \ 2^\circ) & \\
+\ \ 5{,}6 \cos(7g'-5g+334^\circ) & \\
+\ \ 5{,}9 \cos(6g'-6g+107^\circ) & \\
+\ \ 5{,}0 \cos(7g'-6g+\ 79^\circ) &
\end{array}$$

$$\delta \bar{z}' = -\ 0{,}''349 +\ 0{,}''81860\ t \sin(v'+349^\circ\ 10'\ 31'') +\ 0{,}''00004474\ t^2 \sin(v'+80^\circ\ 43')$$

$$\begin{array}{ll}
+\ 0{,}989 \sin(\ g' \qquad +145^\circ,2) & \\
+\ 0{,}170 \sin(2g' \qquad +270^\circ,9) & \\
+\ 0{,}027 \sin(-g'-g+\ 35^\circ) & \\
+\ 1{,}748 \sin(\qquad -\ g+116^\circ\ 30') & \\
+\ 0{,}830 \sin(\ g'-\ g+212^\circ,1) & \\
+\ 2{,}923 \sin(2g'-\ g+224^\circ\ 38') & \\
+\ 0{,}755 \sin(3g'-\ g+185^\circ,3) & \\
+\ 0{,}074 \sin(4g'-\ g+320^\circ) & \\
+\ 0{,}063 \sin(\qquad -2g+\ 91^\circ) & \\
+\ 0{,}254 \sin(\ g'-2g+\ 11^\circ) & \\
+\ 0{,}120 \sin(2g'-2g+314^\circ) & \\
+\ 0{,}212 \sin(3g'-2g+205^\circ) & +\ 0{,}''00012\ t \sin(3g'-2g+20^\circ) \\
+\ 8{,}616 \sin(4g'-2g+275^\circ\ 34') & +\ 0{,}00122\ t \sin(4g'-2g+\ 5^\circ) \\
+\ 0{,}434 \sin(5g'-2g+103^\circ) & \\
+\ 0{,}243 \sin(6g'-2g+\ 18^\circ) & \\
+\ 0{,}078 \sin(2g'-3g+\ 93^\circ) & \\
+\ 0{,}070 \sin(3g'-3g+\ 61^\circ) & \\
+\ 0{,}051 \sin(4g'-3g+195^\circ) & \\
+\ 0{,}099 \sin(5g'-3g+172^\circ) & \\
+\ 0{,}116 \sin(6g'-3g+148^\circ) & \\
+\ 0{,}103 \sin(9g'-4g+162^\circ) &
\end{array}$$

$$\delta(\bar{v}'-v) = +\ 0{,}''01781\ t \sin(2v'+57^\circ\ 15')$$

Da bei der Anwendung dieser Störungen die Elemente constant sind, so kann man die Mittelpunktsgleichung, oder dafür die wahre Länge, so wie den Logarithmus des Radius Vectors von der mittleren Länge, und die Breite, so wie die Reduction der Länge auf die Ecliptik von der wahren Länge abhängig machen; man erspart also die Berechnung der mittleren Anomalie und des Arguments der Breite. Von an-

dern bekannten Vereinfachungen der bis jetzt gebräuchlichen Form der Planetentafeln schweige ich.

Wenn man die sinnreiche Bessel'sche Hypothese über die Nicht-Proportionalität der Massen und der Anziehungen bei dem Jupiter und Saturn in Anwendung bringen will, so kann dieses, wenigstens für die Störungen der ersten Approximation, durch die in dieser Abhandlung angeführten Zwischenzahlen leicht gemacht werden.

Digitized by Google

Mittl. Anom. ° ′	log. r	r^2	u ° ′ ″	log. r'	r'^2	u' ° ′ ″
0 0	9,7153014,0	0,2695273	245 1 24,000	9,9749027,7	0,8908520	323 1 42,000
11 15	9,7157667,2	0,2701055	257 25 2,402	9,9754590,0	0,8931368	335 37 33,567
22 30	9,7171361,9	0,2718144	269 45 31,874	9,9770940,4	0,8998872	348 9 35,835
33 45	9,7193332,7	0,2745785	281 59 56,400	9,9797111,5	0,9107985	0 34 16,484
45 0	9,7222390,1	0,2782774	294 5 44,068	9,9831611,8	0,9253848	12 48 34,585
56 15	9,7257033,9	0,2827527	306 0 55,119	9,9872581,4	0,9430100	24 50 10,550
67 30	9,7295579,7	0,2878166	317 44 6,368	9,9917961,9	0,9629248	36 37 30,876
78 45	9,7336280,6	0,2932622	329 14 32,018	9,9965653,4	0,9843072	48 9 48,134
90 0	9,7377430,7	0,2988726	340 32 1,666	0,0013642,6	1,0063024	59 26 57,272
101 15	9,7417442,2	0,3044307	351 36 56,352	0,0060089,8	1,0280588	70 29 29,780
112 30	9,7454896,5	0,3097271	2 30 3,678	0,0103382,7	1,0487610	81 18 26,964
123 45	9,7488571,3	0,3145678	13 12 32,669	0,0142157,6	1,0676564	91 55 13,326
135 0	9,7517450,7	0,3187793	23 45 48,962	0,0175301,0	1,0840772	102 21 30,643
146 15	9,7540723,7	0,3222142	34 11 30,586	0,0201937,9	1,0974572	112 39 13,056
157 30	9,7557774,7	0,3247543	44 31 24,428	0,0221413,4	1,1073443	122 50 23,147
168 45	9,7568174,0	0,3263133	54 47 23,372	0,0233275,3	1,1134098	132 57 9,009
180 0	9,7571668,5	0,3268389	65 1 24,000	0,0237258,3	1,1154540	143 1 42,000
191 15	9,7568174,0	0,3263133	75 15 24,628	0,0233275,3	1,1134098	153 6 14,991
202 30	9,7557774,7	0,3247543	85 31 23,572	0,0221413,4	1,1073443	163 13 0,853
213 45	9,7540723,7	0,3222142	95 51 17,414	0,0201937,9	1,0974572	173 24 10,944
225 0	9,7517450,7	0,3187793	106 16 59,038	0,0175301,0	1,0840772	183 41 53,357
236 15	9,7488571,3	0,3145678	116 50 15,331	0,0142157,6	1,0676564	194 8 10,674
247 30	9,7454896,5	0,3097271	127 32 44,322	0,0103382,7	1,0487610	204 44 57,036
258 45	9,7417442,2	0,3044307	138 25 51,648	0,0060089,8	1,0280588	215 33 54,220
270 0	9,7377430,7	0,2988726	149 30 46,334	0,0013642,6	1,0063024	226 36 26,728
281 15	9,7336280,6	0,2932622	160 48 15,982	9,9965653,4	0,9843072	237 53 35,866
292 30	9,7295579,7	0,2878166	172 18 41,632	9,9917961,9	0,9629248	249 25 53,124
303 45	9,7257033,9	0,2827527	184 1 52,881	9,9872581,4	0,9430100	261 13 13,450
315 0	9,7222390,1	0,2782774	195 57 3,932	9,9831611,8	0,9253848	273 14 49,415
326 15	9,7193332,7	0,2745785	208 2 51,600	9,9797111,5	0,9107985	285 29 7,516
337 30	9,7171361,9	0,2718144	220 17 16,126	9,9770940,4	0,8998872	297 53 48,165
348 45	9,7157667,2	0,2701055	232 37 45,598	9,9754590,0	0,8931368	310 25 50,433

Digitized by Google

i', i	log. $K_c^{i'i}$	log. $K_s^{i'i}$	$\log . r\left(\frac{dK_c^{i'i}}{dr}\right)$	$\log . r\left(\frac{dK_s^{i'i}}{dr}\right)$	$\lg . r'\left(\frac{dK_c^{i'i}}{dr'}\right)$	$\lg . r'\left(\frac{dK_s^{i'i}}{dr'}\right)$
0, 0	0,0378632	— ∞	9,3500297	— ∞	0,1189205$_n$	— ∞
1, 0	8,8029891	8,6838088	8,5263586	8,8768147	8,9873670$_n$	9,0919766$_n$
2, 0	7,28122	7,74404	7,25628$_n$	8,00686	6,02776$_n$	8,19607$_n$
3, 0	6,02938$_n$	6,67321	6,89332$_n$	6,94802	6,94910	7,13306$_n$
4, 0	5,45879	5,48116	6,09649$_n$	5,62325	6,18648	5,85896$_n$
— 2, — 1	5,99300$_n$	5,29226	6,61047$_n$	6,06221	6,70432	6,13033$_n$
— 1, — 1	7,02424$_n$	6,40278$_n$	7,57919$_n$	6,92054$_n$	7,68593	7,03559
0, — 1	7,9813338$_n$	7,7205622$_n$	8,4318962$_n$	8,3284550$_n$	8,5636284	8,4242054
1, — 1	9,1046721	9,7832941$_n$	9,2172681	9,9006052$_n$	9,4656388$_n$	0,1469285
2, — 1	8,7096397	8,7596080$_n$	9,0506595	8,8507302$_n$	9,2138255$_n$	9,1085846
3, — 1	7,89813	7,38057$_n$	8,26935	7,39780	8,42328$_n$	5,98632$_n$
4, — 1	6,91233	6,33846	7,24368	7,22443	7,40991$_n$	7,27752$_n$
5, — 1	5,76347	5,79071	5,80264	6,46108	6,08454$_n$	6,54517$_n$
— 1, — 2	5,17026$_n$	5,47129	5,55871$_n$	6,24993	5,70672	6,31618$_n$
0, — 2	6,41664$_n$	6,44404	6,99835$_n$	7,13194	7,09947	7,21299$_n$
1, — 2	7,8088589	7,9146223$_n$	7,59600	6,84373	8,01638$_n$	7,87605
2, — 2	9,3683297$_n$	9,0156665$_n$	9,7401197$_n$	9,3803955$_n$	9,8938813	9,5362740
3, — 2	8,5161713$_n$	8,6300573$_n$	8,8212103$_n$	9,1023164$_n$	8,9959695	9,2284759
4, — 2	7,0245596$_n$	7,8985489$_n$	7,63067	8,38279$_n$	7,5070837$_n$	8,5058413
5, — 2	6,6046535	6,9740873$_n$	7,4198667$_n$	7,4015353$_n$	7,4817091$_n$	7,5394353
6, — 2	5,99414	5,85077$_n$	6,69103	5,88750$_n$	6,77058$_n$	6,17059
7, — 2	5,14613	4,13988$_n$	5,76477	5,42878	5,85842$_n$	5,40620$_n$
0, — 3	4,6990	5,0792	5,7738	5,7127	5,8102$_n$	5,8028$_n$
1, — 3	6,60767	6,19645$_n$	6,98381	6,77568	7,13627$_n$	6,64316$_n$
2, — 3	7,78958$_n$	7,92860$_n$	7,89971$_n$	8,28171$_n$	8,14916	8,44097
3, — 3	8,8349278$_n$	8,9680758	9,35603$_n$	9,49870	9,4703724	9,6108665$_n$
4, — 3	8,4901052$_n$	8,1777004	9,07105$_n$	8,60747	9,1722725	8,7447399$_n$
5, — 3	7,8158627$_n$	6,5555708$_n$	8,3963909$_n$	7,8673234$_n$	8,49770	7,88801
6, — 3	6,93166$_n$	6,74586$_n$	7,44298$_n$	7,54302$_n$	7,55953	7,60731
7, — 3	5,79782$_n$	6,10230$_n$	5,67136$_n$	6,83314$_n$	6,04025	6,90715
8, — 3	4,16435	5,25864$_n$	5,68359	5,92345$_n$	5,69653$_n$	6,00856
9, — 3	4,1374	4,2662$_n$	5,0713	4,7754$_n$	5,1192$_n$	4,8924
1, — 4	5,3263	4,9731$_n$	5,7694	4,9445$_n$	5,9031$_n$	5,2625
2, — 4	6,01953$_n$	6,69302$_n$	6,61763	7,10510$_n$	6,49136$_n$	7,24726
3, — 4	7,84991$_n$	7,46030	8,37453$_n$	7,75876	8,48809	7,93541$_n$
4, — 4	8,5501696	8,6121988	9,19902	9,24776	9,28696$_n$	9,33817$_n$
5, — 4	7,70501	8,30890	8,16613	8,98005	8,29517$_n$	9,06399$_n$
6, — 4	7,08962$_n$	7,67628	8,00751$_n$	8,33762	8,05703	8,42329$_n$
7, — 4	6,79505$_n$	6,81198	7,60769$_n$	7,38689	7,66989	7,48936$_n$
8, — 4	6,13811$_n$	5,60032	6,90787$_n$	5,59262$_n$	6,97603	3,857$_n$

Digitized by Google

i', i	$\log.\left(\frac{dK_i^{i'i}}{dI}\right)$	$\log.\left(\frac{dK_i^{i''i}}{dI}\right)$	$\log.\left(\frac{dK_i^{i'i}}{\sin 1 d\Theta}\right)$	$\log.\left(\frac{dK_i^{i''i}}{\sin 1 d\Theta}\right)$	$\Phi_i^{i'i}$	$\Phi_i^{i''i}$
0, 0	7,9859864$_n$	$-\infty$	6,06501	$-\infty$	+ 0,00000508	0,0000000
1, 0	6,6675$_n$	7,4798$_n$	6,7660	7,1473	+ 0,00001277	+ 0,00003071
2, 0	7,4631	7,9396	7,9611$_n$	7,4668	— 0,0002000	+ 0,0000641
3, 0	6,076$_n$	7,352	7,361$_n$	5,919$_n$	+ 0,0000504	+ 0,0000062
4, 0					+ 0,0000072	+ 0,0000047
—2, —1	7,321$_n$	6,393$_n$	6,377$_n$	7,328	+ 0,0000050	— 0,0000467
—1, —1	8,0522$_n$	7,8008$_n$	7,8043$_n$	8,0610	— 0,0001394	+ 0,0002518
0, —1	7,2891	6,5843$_n$	7,2245$_n$	6,7385$_n$	— 0,0000367	— 0,0000120
1, —1	7,5774	8,2794	5,9701$_n$	6,3865$_n$	— 0,0000020	— 0,0000053
2, —1	7,5347$_n$	7,1947	6,9042	6,5426$_n$	+ 0,0000175	— 0,0000076
3, —1	7,7453	6,8418$_n$	6,8424	7,7917	+ 0,0000152	+ 0,0001354
4, —1	7,2625	6,7997	6,8335$_n$	7,2791	— 0,0000149	+ 0,0000416
5, —1					+ 0,0000046	— 0,0000063
—1, —2	6,762$_n$	7,028	7,033	6,762	— 0,0000238	— 0,0000128
0, —2	7,7954	7,8581	7,8637	7,7989	+ 0,0001598	+ 0,0001377
1, —2	7,0922$_n$	6,8854$_n$	6,4931$_n$	7,2511	— 0,0000068	+ 0,0000390
2, —2	8,0874	7,7098	6,3960$_n$	6,1929	— 0,0000054	+ 0,0000034
3, —2	7,1286	7,5588	6,3720$_n$	6,6080$_n$	— 0,0000051	— 0,0000089
4, —2	6,4417	7,4913$_n$	7,5805	6,5380	+ 0,0000833	+ 0,0000076
5, —2	6,87633	7,09381$_n$	7,12409	6,91792	+ 0,00002911	+ 0,00001811
6, —2					— 0,0000044	— 0,0000066
7, —2					0,0000000	— 0,0000017
0, —3	6,507	6,750	6,751	6,513$_n$	— 0,0000124	+ 0,0000072
1, —3	7,5762	7,6964	7,6995	7,5803$_n$	+ 0,0001095	— 0,0000832
2, —3	6,5944$_n$	7,2008	7,2199	6,4382	— 0,0000360	— 0,0000063
3, —3	7,6704	7,8313$_n$	6,2370	6,4025	+ 0,0000038	+ 0,0000055
4, —3	7,4698	6,9395$_n$	6,2942$_n$	6,2760	— 0,0000043	+ 0,0000041
5, —3	7,1670$_n$	6,7301$_n$	6,8217	7,3354$_n$	+ 0,0000145	— 0,0000474
6, —3	6,8605$_n$	6,8386$_n$	6,8949	6,9100$_n$	+ 0,0000172	— 0,0000178
7, —3	6,0140$_n$	6,4614$_n$	6,4923	6,0275$_n$	+ 0,0000068	— 0,0000023
8, —3					— 0,0000016	— 0,0000002
9, —3					— 0,0000002	— 0,0000002
1, —4					— 0,0000014	+ 0,0000084
2, —4	7,5439	7,2082$_n$	7,2133$_n$	7,5465$_n$	— 0,0000357	— 0,0000770
3, —4	7,1608	6,5539	6,2398	7,1118$_n$	— 0,0000080	+ 0,0000280
4, —4	7,5206$_n$	7,5498$_n$	6,3927	6,1716$_n$	+ 0,0000054	— 0,0000032
5, —4	6,4728$_n$	7,3621$_n$	6,2087	6,0106	— 0,0000035	+ 0,0000022
6, —4	6,6078$_n$	6,7697	7,0571$_n$	6,8040$_n$	— 0,0000249	— 0,0000139
7, —4					+ 0,0000092	+ 0,0000142
8, —4					+ 0,0000007	+ 0,0000056

Digitized by Google

i' i	log. $K_c^{i',i}$	log. $K_s^{i',i}$	log. $r\left(\frac{dK_c^{i',i}}{dr}\right)$	log. $r\left(\frac{dK_s^{i',i}}{dr}\right)$	lg. $r'\left(\frac{dK_c^{i',i}}{dr'}\right)$	lg. $r'\left(\frac{dK_s^{i',i}}{dr'}\right)$
9, — 4	5,30233$_n$	4,71096$_n$	6,00732$_n$	5,87460$_n$	6,08543	5,90331
10, — 4	4,30060$_n$	4,30621$_n$	4,81398$_n$	5,23719$_n$	4,93013	5,28533
2, — 5	4,2040$_n$	5,4250$_n$	5,3692	5,8681$_n$	5,3385$_n$	6,0022
3, — 5	6,65244$_n$	5,21219$_n$	7,17044$_n$	6,75051$_n$	7,28552	6,76298
4, — 5	6,88874	7,69408	6,99388	8,33187	7,24576$_n$	8,42187$_n$
5, — 5	8,36105	8,08422$_n$	9,08746	8,83154$_n$	9,16218$_n$	8,90302
6, — 5	8,09517	6,57519$_n$	8,84249	7,45637	8,91397$_n$	7,39515$_n$
7, — 5	7,49083	7,18390	8,21981	8,06295	8,29414$_n$	8,11683$_n$
8, — 5	6,62159	6,77873	7,23254	7,62139	7,32766$_n$	7,67974$_n$
9, — 5	5,09272	6,11767	6,20839$_n$	6,92691	6,17432	6,98954$_n$
10, — 5	4,94645$_n$	5,28556	6,00834$_n$	6,02563	6,04446	6,09820$_n$
11, — 5	4,4041$_n$	4,2490	5,3575$_n$	4,7195	5,4034	4,8461$_n$
4, — 6	5,99913$_n$	6,53071	6,90124$_n$	7,14132	6,95255	7,23649$_n$
5, — 6	7,49052	6,35793	8,21527	7,41929	8,29024$_n$	7,45530$_n$
6, — 6	7,49721$_n$	8,08607$_n$	8,34302$_n$	8,88823$_n$	8,40090	8,95183
7, — 6	7,13033	7,85236$_n$	8,06077	8,66535$_n$	8,10887$_n$	8,72751
8, — 6	7,15897	7,26181$_n$	8,05422	8,04761$_n$	8,10626$_n$	8,11356
9, — 6	6,71198	6,34596$_n$	7,59064	6,93611$_n$	7,64457$_n$	7,03543
10, — 6	6,05023	5,05843	6,89746	6,45548	6,95518$_n$	6,47256$_n$
11, — 6			5,98000	6,09286	6,04879$_n$	6,13204$_n$
5, — 7			7,03185	6,97225		
6, — 7	6,74351	7,24944$_n$	7,63407	8,04517$_n$	7,68681$_n$	8,10958
7, — 7	7,78803$_n$	5,84510	8,65575$_n$	7,28149	8,71099	7,29688$_n$
8, — 7	7,58092$_n$	7,21748$_n$	8,45129$_n$	8,13856$_n$	8,50623	8,18771
9, — 7	6,98704$_n$	7,06952$_n$	7,81638$_n$	7,99612$_n$	7,87639	8,04473
10, — 7	5,91275$_n$	6,60509$_n$	6,09272$_n$	7,52038$_n$	6,31323	7,57020
11, — 7	5,43329	5,94181$_n$	6,57811	6,82347$_n$	6,60817$_n$	6,87708
7, — 8	6,97220$_n$	6,74351$_n$	7,82840$_n$	7,65167$_n$	7,88508	7,70234
8, — 8	6,84757$_n$	7,46509	7,69897$_n$	8,39118	7,75626	8,43984$_n$
9, — 8	7,14301$_n$	7,27784	8,09559$_n$	8,19888	8,14157	8,24810$_n$
10, — 8	6,93602$_n$	6,64771	7,89795$_n$	7,50418	7,94330	7,56067$_n$
11, — 8			7,41434$_n$	6,59813$_n$	7,46045	6,60086
8, — 9	6,63749$_n$	6,65514	7,58343$_n$	7,56302	7,62992	7,61374$_n$
9, — 9	7,11126	6,84261	8,09174	7,77714	8,13506$_n$	7,82484$_n$
10, — 9	6,93349	6,99913	7,90037	7,98936	7,94488$_n$	8,03165$_n$
11, — 9	6,15655	6,76552	7,02094	7,76567	7,07650$_n$	7,80703$_n$
12, — 9			6,83187$_n$	7,27420	6,85890	7,31706$_n$

Digitized by Google

i' i	log. $\left(\frac{dK_c^{i'i}}{d\mathrm{I}}\right)$	log. $\left(\frac{dK_s^{i'i}}{d\mathrm{I}}\right)$	log. $\left(\frac{dK_c^{i'i}}{\sin 1 d\Theta}\right)$	log. $\left(\frac{dK_s^{i'i}}{\sin 1 d\Theta}\right)$	$\Phi_c^{i'i}$	$\Phi_s^{i'i}$
9, — 4					— 0,0000006	+ 0,0000013
10, — 4					— 0,0000002	+ 0,0000002
2, — 5					+ 0,0000044	+ 0,0000042
3, — 5					— 0,0000495	+ 0,0000108
4, — 5					+ 0,0000180	+ 0,0000060
5, — 5					+ 0,0000020	+ 0,0000080
6, — 5					— 0,0000040	+ 0,0000044
7, — 5					— 0,0000107	+ 0,0000121
8, — 5					+ 0,0000068	— 0,0000124
9, — 5					+ 0,0000042	+ 0,0000004
10, — 5					+ 0,0000011	+ 0,0000007
11, — 5					0,0000000	+ 0,0000012
4, — 6					0,000000	— 0,000029
5, — 6					+ 0,000008	— 0,000010
6, — 6					0,000000	0,000000
7, — 6					+ 0,000004	+ 0,000002
8, — 6					+ 0,000005	+ 0,000007
9, — 6					0,000000	— 0,000007
10, — 6					0,000000	— 0,000003
11, — 6					0,000000	0,000000
5, — 7					0,000000	0,000000
6, — 7					0,000000	0,000000
7, — 7					0,000000	0,000000
8, — 7					0,000000	0,000000
9, — 7					0,000000	0,000000
10, — 7					0,000000	0,000000
11, — 7					0,000000	0,000000
7, — 8					0,000000	0,000000
8, — 8					0,000000	0,000000
9, — 8					0,000000	0,000000
10, — 8					0,000000	0,000000
11, — 8					0,000000	0,000000
8, — 9					0,000000	0,000000
9, — 9					0,000000	0,000000
10, — 9					0,000000	0,000000
11, — 9					0,000000	0,000000
12, — 9					0,000000	0,000000

Digitized by Google

i' i	log. $\psi_c^{i'i}$	log. $\psi_s^{i'i}$	log. $X_c^{i'i}$	log. $X_s^{i'i}$	log. $\dot{X}_c^{i'i}$	log. $\dot{X}_s^{i'i}$
− 2, − 1	3,16346$_n$	3,65742	4,96037$_n$	4,22974	4,86985	4,18318
− 1, − 1	5,30808$_n$	5,93868	6,59768$_n$	5,65792	6,52476	5,84125
0, − 1	7,9792333	8,6519385$_n$	8,6521909	7,9789809	8,6521409$_n$	7,9794223$_n$
1, − 1	9,0531975$_n$	9,7259094	9,7259094$_n$	9,0531975$_n$	9,7259094	9,3164591
2, − 1	7,5011786$_n$	8,1738905	8,1738905$_n$	7,5011786$_n$	8,1738905	7,5011786
3, − 1	6,12525$_n$	6,79796	6,79796$_n$	6,12525$_n$	6,79796	6,12525
4, − 1	4,82311$_n$	5,49582	5,49582$_n$	4,82311$_n$	5,49582	4,82311
5, − 1	3,5619$_n$	4,2346	4,2346$_n$	3,5619$_n$	4,2346	3,5619
− 1, − 2	3,3461$_n$	4,5222	4,9187$_n$	3,9199	4,8337	4,2862
0, − 2	6,36061	7,03340$_n$	7,03357	6,36045	7,03353$_n$	6,36089$_n$
1, − 2	7,4346211$_n$	8,1073310	8,1073310$_n$	7,4346211$_n$	8,1073310	7,4346211
2, − 2	5,88260$_n$	6,55532	6,55532$_n$	5,88260$_n$	6,55532	5,88260
3, − 2	4,50667$_n$	5,17938	5,17938$_n$	4,50667$_n$	5,17938	4,50667
4, − 2	3,20454$_n$	3,87725	3,87725$_n$	3,20454$_n$	3,87725	3,20454
5, − 2	1,94329$_n$	2,61600	2,61600$_n$	1,94329$_n$	2,61600	1,94329
0, − 3	4,91805	5,59101$_n$	5,59098	4,91827	5,59098$_n$	4,91827$_n$
1, − 3	5,99214$_n$	6,66485	6,66485$_n$	5,99214$_n$	6,66485	5,99214
2, − 3	4,44011$_n$	5,11283	5,11283$_n$	4,44011$_n$	5,11283	4,44011
3, − 3	3,06417$_n$	3,73688	3,73688$_n$	3,06417$_n$	3,73688	3,06417
4, − 3	1,762$_n$	2,435	2,435$_n$	1,762$_n$	2,435	1,762
0, − 4	3,549	4,222$_n$	4,222	3,549	4,222$_n$	3,549$_n$
1, − 4	4,6234$_n$	5,2961	5,2961$_n$	4,6234$_n$	5,2961	4,6234
2, − 4	3,071$_n$	3,744	3,744$_n$	3,071$_n$	3,744	3,071
1, 0	7,9124505	8,5850123$_n$	8,5854081	7,9125461	8,5853580$_n$	7,9121047$_n$
2, 0	6,36037	7,03305$_n$	7,03333	6,36059	7,03328$_n$	6,36015$_n$
3, 0	4,98466	5,55715$_n$	5,55737	4,98443	5,55737$_n$	4,98443$_n$
4, 0	3,68242	4,35513$_n$	4,35513	3,68242	4,35513$_n$	3,68242$_n$

Digitized by Google

i', i	$\log.\left(\frac{d\psi_i^{i'i}}{dI}\right)$	$\log.\left(\frac{d\psi_i^{i'i}}{dI}\right)$	$\lg.\left(\frac{d\psi_i^{i'i}}{\sin I d\Theta}\right)$	$\lg.\left(\frac{d\psi_i^{i'i}}{\sin I d\Theta}\right)$
— 2, — 1	6,1684	5,8952	5,8949	$6,1683_n$
— 1, — 1	7,7202	7,4469	7,4469	$7,7203_n$
0, — 1	$6,7384_n$	6,4063	$6,3731_n$	6,6463
1, — 1	7,0944	$7,7650_n$	4,246	$3,619_n$
2, — 1	5,5412	$6,2130_n$	2,594	$2,067_n$
3, — 1	4,1652	$4,8371_n$	......	......
4, — 1	......	......	......	......
5, — 1	......	......	......	......
— 1, — 2	6,1018	5,8281	5,8283	$6,1017_n$
0, — 2	$5,1197_n$	4,7878	$4,7545_n$	5,0277
1, — 2	5,4746	$6,1464_n$	2,552	$2,301_n$
2, — 2	3,9225	$4,5944_n$	......	......
3, — 2	......	......	......	......
4, — 2	......	......	......	......
5, — 2	......	......	......	......
0, — 3	......	......	......	......
1, — 3	4,0321	$4,7038_n$	......	......
2, — 3	......	......	......	......
3, — 3	......	......	......	......
4, — 3	......	......	......	......
0, — 4	......	......	......	......
1, — 4	......	......	......	......
2, — 4	......	......	......	......
1, 0	$6,6716_n$	6,7945	$6,3064_n$	$6,5794_n$
2, 0	$5,1194_n$	5,2426	$4,7543_n$	$5,0275_n$
3, 0	......	......	......	......
4, 0	......	......	......	......

i	$\log.\frac{i^2}{a^3}$
1	0,7897848
2	1,3918449
3	1,7440273
4	1,9930048
5	2,1877248

i'	$\log.\frac{i'^2}{a'^3}$
1	0,0000000
2	0,6020600
3	0,9542425
4	1,2041200
5	1,3979400

i' i	log. $(i', i, c)^1$	log. $(i', i, s)^1$	log. $[i', i, c]^1$	log. $[i', i, s]^1$
− 2, − 1	$5,99694_n$	5,35026	6,70353	$6,12123_n$
− 1, − 1	$7,07286_n$	6,45071	7,67458	7,20967
0, − 1	8,6917179	$9,4498995_n$	8,9793835	$9,3978695_n$
1, − 1	$9,7553748_n$	0,4267547	$9,9950955_n$	0,6703598
2, − 1	8,5010840	8,5376189	$9,2628251_n$	9,3431759
3, − 1	7,85045	7,16681	$8,43655_n$	7,57673
4, − 1	6,88997	6,61387	$7,41679_n$	$7,23086_n$
5, − 1	5,74630	5,85936	$6,09250_n$	$6,53187_n$
− 1, − 2	$5,30681_n$	6,04785	5,65726	$6,09708_n$
0, − 2	7,73193	$8,42068_n$	7,83965	$8,47111_n$
1, − 2	$8,78262_n$	9,48771	$8,88899_n$	9,50939
2, − 2	$9,3718139_n$	$8,9768862_n$	9,8928370	9,5473184
3, − 2	$8,51721_n$	$8,62624_n$	8,99562	9,22943
4, − 2	$7,0261758_n$	$7,8975284_n$	$7,5076168_n$	8,5060931
5, − 2	6,6044199	$6,9736177_n$	$7,4817401_n$	7,5395630
0, − 3	6,66677	$7,33261_n$	6,59624	$7,34788_n$
1, − 3	$7,70258_n$	8,40620	$7,83350_n$	8,40136
2, − 3	$7,80003_n$	$7,88986_n$	8,14442	8,45214
3, − 3	$8,49010_n$	....	....	....
4, − 3	$8,49010_n$	8,17773	9,17227	$8,74473_n$
1, − 4	$6,59453_n$	7,28785	$6,69401_n$	7,29410
2, − 4	$6,06521_n$	$6,64197_n$	$6,50727_n$	7,26051

Digitized by Google

i	i'	log. (i, i', c)	log. (i, i', s)	log. $[i, i', c]$	log. $[i, i', s]$
— 4,	1	5,2304	5,0161	5,7372	5,0405
— 3,	1	6,48713	6,48433	6,93712	7,02482
— 2,	1	7,57046	7,66165	7,08789	8,13038
— 1,	1	8,1529973	8,8759290$_n$	8,7150586	9,4206797$_n$
0,	1	7,14998$_n$	8,52120$_n$	8,62085	8,56635
1,	1	7,03251$_n$	6,22003	7,58151$_n$	6,87272
2,	1	5,17672$_n$	5,51756$_n$	5,56136$_n$	6,25798$_n$
— 4,	2	6,02149$_n$	6,69106$_n$	6,61713	7,10435$_n$
— 3,	2	7,79035$_n$	7,92593$_n$	7,90031$_n$	8,28053$_n$
— 2,	2	9,3686970$_n$	9,0095994$_n$	9,7403608$_n$	9,3777901$_n$
— 1,	2	8,5861382	7,3433351	8,9986467	8,0498756$_n$
0,	2	7,45147	7,09006	6,94795$_n$	7,76664
1,	2	5,99557$_n$	5,33077$_n$	6,61109$_n$	6,06899$_n$
— 2,	3	8,51655$_n$	8,62868$_n$	8,82140$_n$	9,10185$_n$
— 1,	3	7,82661	7,51189	8,24036	7,91122
0,	3	5,30369$_n$	6,16608	6,84207$_n$	6,75017
— 2,	4	7,02561$_n$	7,89789$_n$	7,63041	8,38257$_n$
— 1,	4	6,85170	6,85679	7,21646	7,33800
0,	4	5,32344$_n$	4,77560$_n$	6,06884$_n$	4,76002
— 2,	5	6,6044167	6,9736110$_n$	7,4198305	7,4013574$_n$
— 1,	5	5,68922	6,01981	5,73531	6,52118

Digitized by Google

i'	i	log. $\frac{n'}{i'n'+in}$
1,	0	0,0000000
2,	0	9,69897
3,	0	9,42212
4,	0	9,39794
— 3,	— 1	9,26095$_n$
— 2,	— 1	9,34839$_n$
— 1,	— 1	9,45801$_n$
0,	— 1	9,6049664$_n$
1,	— 1	9,8287636$_n$
2,	— 1	0,3157601$_n$
3,	— 1	0,28677
4,	— 1	9,81910
5,	— 1	9,59918
6,	— 1	9,45386
— 2,	— 2	9,15697$_n$
— 1,	— 2	9,22426$_n$
0,	— 2	9,30394$_n$
1,	— 2	9,4015743$_n$
2,	— 2	9,5277336$_n$
3,	— 2	9,7062726$_n$
4,	— 2	0,0147300$_n$
5,	— 2	1,4769255
6,	— 2	9,98575
7,	— 2	9,69173
8,	— 2	9,51807

i'	i	log. $\frac{n'}{i'n'+in}$
— 1,	— 3	9,07313$_n$
0,	— 3	9,12784$_n$
1,	— 3	9,19045$_n$
2,	— 3	9,26360$_n$
3,	— 3	9,3516423$_n$
4,	— 3	9,4621839$_n$
5,	— 3	9,61084$_n$
6,	— 3	9,83864$_n$
7,	— 3	0,34680$_n$
8,	— 3	0,25961
9,	— 3	9,80966
1,	— 4	9,04899$_n$
2,	— 4	9,10054$_n$
3,	— 4	9,15905$_n$
4,	— 4	9,22670$_n$
5,	— 4	9,30686$_n$
6,	— 4	9,40523$_n$
7,	— 4	9,53264$_n$
8,	— 4	9,71369$_n$
9,	— 4	0,02997$_n$
10,	— 4	1,17590
11,	— 4	9,97196
3,	— 5	9,02611$_n$
4,	— 5	9,07486$_n$
5,	— 5	9,12979$_n$
6,	— 5	9,19269$_n$
7,	— 5	9,26627$_n$

i'	i	log. $\frac{n'}{i'n'+in}$
8,	— 5	9,35491$_n$
9,	— 5	9,46639$_n$
10,	— 5	9,61680$_n$
11,	— 5	9,84874$_n$
4,	— 6	8,96257$_n$
5,	— 6	9,00436$_n$
6,	— 6	9,05061$_n$
7,	— 6	9,10237$_n$
8,	— 6	9,16115$_n$
9,	— 6	9,22916$_n$
10,	— 6	9,30980$_n$
5,	— 7	8,90716$_n$
6,	— 7	8,94373$_n$
7,	— 7	8,98366$_n$
8,	— 7	9,02764$_n$
9,	— 7	9,07659$_n$
10,	— 7	9,13174$_n$
11,	— 7	9,19495$_n$
7,	— 8	8,85802$_n$
8,	— 8	8,92567$_n$
9,	— 8	8,96390$_n$
10,	— 8	9,00583$_n$
11,	— 8	9,05224$_n$
8,	— 9	8,84315$_n$
9,	— 9	8,87452$_n$
10,	— 9	8,90833$_n$
11,	— 9	8,94500$_n$

Digitized by Google

Tafel VII.

i	i'	$\log. \frac{n}{in+i'n'}$
1,	0	0,0000000
2,	0	9,69897
3,	0	9,52288
4,	0	9,39794
— 4,	1	9,44402$_n$
— 3,	1	9,58548$_n$
— 2,	1	9,7966079$_n$
— 1,	1	0,2237972$_n$
0,	1	0,3950336
1,	1	9,85304
2,	1	9,61929
— 5,	2	9,37730$_n$
— 4,	2	9,49557$_n$
— 3,	2	9,65863$_n$
— 2,	2	9,9227672$_n$
— 1,	2	0,7107937$_n$
0,	2	0,09400
1,	2	9,74342
2,	2	9,55200
— 6,	3	9,31948$_n$
— 5,	3	9,42114$_n$
— 4,	3	9,55408$_n$
— 3,	3	9,74667$_n$
— 2,	3	0,1013062$_n$
— 1,	3	0,68180
0,	3	9,91791
1,	3	9,65598

i	i'	$\log. \frac{n}{in+i'n'}$
— 7,	4	9,26846$_n$
— 6,	4	9,35760$_n$
— 5,	4	9,46989$_n$
— 4,	4	9,62174$_n$
— 3,	4	9,85722$_n$
— 2,	4	0,40975$_n$
— 1,	4	0,21413
0,	4	9,79297
— 7,	5	9,30219$_n$
— 6,	5	9,39939$_n$
— 5,	5	9,52482$_n$
— 4,	5	9,70189$_n$
— 3,	5	0,00587$_n$
— 2,	5	1,8719591
— 1,	5	9,99421
0,	5	9,69607
— 8,	6	9,25305$_n$
— 7,	6	9,33876$_n$
— 6,	6	9,44564$_n$
— 5,	6	9,58772$_n$
— 4,	6	9,80026$_n$
— 3,	6	0,23367$_n$
— 2,	6	0,38078
— 1,	6	9,84890

i	i'	$\log. \frac{n}{in+i'n'}$
— 8,	7	9,28556$_n$
— 7,	7	9,37869$_n$
— 6,	7	9,49740$_n$
— 5,	7	9,66130$_n$
— 4,	7	9,92767$_n$
— 3,	7	0,74153$_n$
— 2,	7	0,08677
— 9,	8	9,23815$_n$
— 8,	8	9,32070$_n$
— 7,	8	9,42267$_n$
— 6,	8	9,55618$_n$
— 5,	8	9,74994$_n$
— 4,	8	0,10872$_n$
— 3,	8	0,65465
— 2,	8	9,9131
— 9,	9	9,26955$_n$
— 8,	9	9,35893$_n$
— 7,	9	9,47162$_n$
— 6,	9	9,62419$_n$
— 5,	9	9,86142$_n$
— 4,	9	0,42501
— 3,	9	0,2047
— 7,	10	9,5268$_n$
— 6,	10	9,7048$_n$
— 5,	10	0,0118$_n$
— 4,	10	1,5709
— 3,	10	9,9554

Digitized by Google

Tafel VIII.

$\varkappa$ k	log. $\overset{1}{C}{}^{\varkappa,k}$	log. $\overset{1}{D}{}^{\varkappa,k}$
0, 0	0,4771213$_n$	0,3018877$_n$
1, 0	9,1481516$_n$	8,4495241
1, 1	$-\infty$	$-\infty$
0, 1	9,1481516	8,8471216$_n$
− 1, 1	0,3017168$_n$	0,0006868
1, 2	4,568	4,568$_n$
0, 2	7,29504	7,29504$_n$
− 1, 2	8,4486679$_n$	8,4486679
1, 3	3,196	3,372$_n$
0, 3	5,74300	5,91909$_n$
− 1, 3	6,89664$_n$	7,07273
1, 4	. . . .	. . . .
0, 4	4,3159	4,6169$_n$
− 1, 4	5,46957$_n$	5,77060
1, 5	. . . .	. . . .
0, 5	2,958	3,356$_n$
− 1, 5	4,1104$_n$	4,5094

$\varkappa$	$\eta'^{(\varkappa)}$	$\vartheta'^{(\varkappa)}$
1	+ 0,01402656	+ 0,00000185
2	+ 0,02805298	+ 0,00000190
3	+ 0,03741	
4	+ 0,04384	

Tafel IX.

$\varkappa$ k	log. $C^{\varkappa,k}$	log. $D^{\varkappa,k}$
0, 0	0,4771213$_n$	0,3016606$_n$
1, 0	9,0812761$_n$	8,3825580
1, 1	$-\infty$	$-\infty$
0, 1	9,0812761	8,7802461$_n$
− 1, 1	0,3015347$_n$	0,0005047
1, 2	4,368	4,368$_n$
0, 2	7,16163	7,16163$_n$
− 1, 2	8,3819282$_n$	8,3819282
1, 3	2,923	3,099$_n$
0, 3	5,54303	5,71912$_n$
− 1, 3	6,76335$_n$	6,93944
1, 4	. . . .	. . . .
0, 4	4,0494	4,3504$_n$
− 1, 4	5,26971$_n$	5,57074
1, 5	. . . .	. . . .
0, 5	. . . .	. . . .
− 1, 5	3,854$_n$	4,243

$\varkappa$	$\eta^{(\varkappa)}$	$\vartheta^{(\varkappa)}$
1	+ 0,01203354	+ 0,00000117
2	+ 0,02406706	+ 0,00000118
3	+ 0,03209	
4	+ 0,03761	

Digitized by Google

$\int T' d\tau =$

κ i′ i	cos	sin	κ i′ i	cos	sin
0, 0, 0	− 507″,195	. . . .	1, 3, −1	− 0″,029	+ 0″,208
1, −1, 0	− 506,389	− 1″,04745	0, 4, −1	− 0,950 x	+ 1,794 x
. . . .	. . . .	. . . .	0, 5, −1	+ 0,190	+ 0,194
. . . .	. . . .	. . . .	−1, 6, −1	− 0,174	− 0,220
0, 1, 0	+ 73,033	+ 47,591	1, 4, −1	− 0,014	+ 0,021
−1, +2, 0	− 57,397	− 42,238	0, 5, −1	− 0,209 x	+ 0,161 x
1, 0, 0	− 8,46764	− 5,23785	0, −1, −2	− 0,067	+ 0,205
0, 1, 0	− 27,903 x	+ 36,714 x	−1, 0, −2	+ 0,038	− 0,141
0, 2, 0	+ 4,076	+ 9,024	1, −2, −2	+ 0,033	− 0,103
−1, 3, 0	− 2,969	− 8,207	0, −1, −2	+ 0,065 x	+ 0,012 x
1, 1, 0	− 0,792	− 0,727	0, 0, −2	− 0,095	− 1,346
0, 2, 0	− 6,411 x	+ 2,208 x	−1, 1, −2	− 0,729	+ 4,373
0, 3, 0	− 0,135	+ 1,103	1, −1, −2	+ 0,693	− 2,242
−1, 4, 0	+ 0,212	− 0,988	0, 0, −2	0 x	0 x
1, 2, 0	− 0,057	− 0,102	0, 1, −2	+ 31,972	−123,990
0, 3, 0	− 0,817 x	− 0,185 x	−1, 2, −2	− 0,031	− 59,659
0, −2, −1	− 0,305	+ 0,030	1, 0, −2	− 36,608	+181,702
−1, −1, −1	+ 0,080	− 0,007	0, 1, −2	−177,640 x	− 35,031 x
1, −3, −1	+ 0,215	− 0,024	0, 2, −2	−300,866	−131,019
0, −2, −1	+ 0,026 x	+ 0,115 x	−1, 3, −2	+330,184	+138,767
0, −1, −1	− 2,524	− 0,037	1, 1, −2	− 29,700	− 11,485
−1, 0, −1	+ 0,973	− 0,934	0, 2, −2	+109,585 x	−272,070 x
1, −2, −1	+ 1,568	+ 0,325	0, 3, −2	− 61,390	− 74,969
0, −1, −1	+ 0,163 x	+ 0,683 x	−1, 4, −2	+ 63,823	+ 83,956
0, 0, −1	− 7,977	− 39,444	1, 2, −2	− 2,033	− 9,179
−1, +1, −1	− 2,370	+ 49,553	0, 3, −2	+ 73,315 x	− 57,036 x
1, −1, −1	+ 9,927	− 8,351	0, 4, −2	− 3,262	− 18,242
0, 0, −1	0 x	0 x	−1, 5, −2	+ 2,37538	+ 19,98459
0, 1, −1	+ 381,150	−1808,490	1, 3, −2	+ 0,946	− 1,652
−1, 2, −1	+ 30,165	− 125,965	0, 4, −2	+ 18,257 x	− 2,455 x
1, 0, −1	− 410,586	+1934,194	0, 5, −2	+ 0,99818	− 2,73813
0, 1, −1	−1543,800 x	− 329,011 x	−1, 6, −2	− 1,29342	+ 2,88081
0, 2, −1	+ 68,429	− 76,181	1, 4, −2	+ 0,28774	− 0,11933
−1, 3, −1	− 61,623	+ 26,865	0, 5, −2	+ 2,71909 x	+ 1,16205 x
1, 1, −1	− 0,842	+ 22,182	0, 6, −2	+ 0,322	− 0,255
0, 2, −1	− 39,855 x	+ 36,640 x	−1, 7, −2	− 0,369	+ 0,249
0, 3, −1	+ 14,856	− 3,354	1, 5, −2	+ 0,04373	+ 0,01025
−1, 4, −1	− 14,878	+ 0,540	0, 6, −2	+ 0,264 x	+ 0,342 x
1, 2, −1	+ 0,224	+ 1,754	0, 7, −2	+ 0,052	− 0,004
0, 3, −1	− 2,546 x	+ 12,286 x	−1, 8, −2	− 0,058	+ 0,002
0, 4, −1	+ 2,051	+ 0,615	1, 6, −2	+ 0,005	+ 0,004
−1, 5, −1	− 2,018	− 0,882	0, 7, −2	+ 0,006 x	+ 0,057 x

Digitized by Google

κ i′ i	cos	sin	κ i′ i	cos	sin
	″	″		″	″
0, 0, −3	+ 0,076	− 0,177	0, 4, −4	+ 73,328	+ 83,256
−1, 1, −3	− 0,097	+ 0,396	−1, 5, −4	− 91,279	− 103,190
1, −1, −3	+ 0,013	− 0,152	1, 3, −4	+ 18,201	+ 20,806
0, 0, −3	0 x	0 x	0, 4, −4	− 94,643 x	+ 82,046 x
0, 1, −3	+ 2,740	− 9,612	0, 5, −4	+ 14,111	+ 51,710
−1, 2, −3	+ 0,367	− 5,247	−1, 6, −4	− 15,535	− 63,088
1, 0, −3	− 3,216	+ 14,698	1, 4, −4	+ 1,100	+ 11,328
0, 1, −3	− 14,724 x	− 2,913 x	0, 5, −4	− 58,844 x	+ 14,649 x
0, 2, −3	− 3,881	− 12,609	0, 6, −4	− 3,265	+ 14,623
−1, 3, −3	+ 3,594	+ 16,789	−1, 7, −4	+ 4,642	− 17,246
1, 1, −3	− 1,577	− 1,785	1, 5, −4	− 1,439	+ 2,493
0, 2, −3	+ 8,968 x	− 7,295 x	0, 6, −4	− 16,453 x	− 4,260 x
0, 3, −3	− 113,213	+ 155,884	0, 7, −4	− 2,122	+ 2,402
−1, 4, −3	+ 133,740	− 184,740	−1, 8, −4	+ 2,653	− 2,680
1, 2, −3	− 21,613	+ 29,404	1, 6, −4	− 0,521	+ 0,241
0, 3, −3	− 161,075 x	− 118,544 x	0, 7, −4	− 2,624 x	− 2,524 x
0, 4, −3	− 66,502	+ 34,454	0, 8, −4	− 0,551	+ 0,186
−1, 5, −3	+ 78,391	− 37,674	−1, 9, −4	+ 0,656	− 0,176
1, 3, −3	− 11,869	+ 2,788	1, 7, −4	− 0,100	− 0,017
0, 4, −3	− 34,803 x	− 71,450 x	0, 8, −4	− 0,184 x	− 0,635 x
0, 5, −3	− 17,607	− 0,301	0, 9, −4	− 0,090	− 0,022
−1, 6, −3	+ 20,148	+ 1,354	−1, 10, −4	+ 0,10563	+ 0,02927
1, 4, −3	− 2,409	− 1,131	1, 8, −4	− 0,012	− 0,012
0, 5, −3	+ 1,038 x	− 18,909 x	0, 9, −4	+ 0,027 x	− 0,104 x
0, 6, −3	− 2,809	− 1,660	0, 10, −4	− 0,01072	− 0,00957
−1, 7, −3	+ 3,067	+ 2,080	−1, 11, −4	+ 0,01118	+ 0,01194
1, 5, −3	− 0,219	− 0,418	1, 9, −4	− 0,00042	− 0,00242
0, 6, −3	+ 1,931 x	− 2,962 x	0, 10, −4	+ 0,01170 x	− 0,01154 x
0, 7, −3	− 0,255	− 0,462	0, 4, −5	− 0,523	+ 10,750
−1, 8, −3	+ 0,251	+ 0,540	−1, 5, −5	+ 0,815	− 13,951
1, 6, −3	+ 0,010	− 0,074	1, 3, −5	+ 0,735	+ 2,644
0, 7, −3	+ 0,511 x	− 0,254 x	0, 4, −5	− 11,428 x	+ 1,789 x
0, 8, −3	+ 0,005	− 0,074	0, 5, −5	+ 55,271	− 29,887
−1, 9, −3	− 0,012	+ 0,085	−1, 6, −5	− 70,779	+ 38,530
1, 7, −3	+ 0,008	− 0,008	1, 4, −5	+ 16,146	− 8,694
0, 8, −3	+ 0,084 x	+ 0,007 x	0, 5, −5	+ 35,077 x	+ 66,351 x
0, 2, −4	+ 0,297	− 0,774	0, 6, −5	+ 36,425	− 1,864
−1, 3, −4	− 0,381	+ 0,879	−1, 7, −5	− 45,578	+ 1,363
1, 1, −4	− 0,114	− 0,054	1, 5, −5	+ 9,099	+ 0,729
0, 2, −4	+ 0,507 x	− 0,135 x	0, 6, −5	+ 1,304 x	+ 43,167 x
0, 3, −4	− 13,107	+ 1,797	0, 7, −5	+ 10,770	+ 4,906
−1, 4, −4	+ 16,925	− 1,734	−1, 8, −5	− 12,981	− 6,520
1, 2, −4	− 2,477	+ 1,407	1, 6, −5	+ 2,104	+ 1,648
0, 3, −4	− 5,004 x	− 12,271 x	0, 7, −5	− 6,177 x	+ 12,525 x

Digitized by Google

κ i′ i	cos	sin	κ i′ i	cos	sin
0, 8, − 5	+ 1″,726	+ 2″,295	1, 8, − 6	+ 0″,544	− 0″,093
−1, 9, − 5	− 1,952	− 2,880	0, 9, − 6	+ 1,153 x	+ 2,680 x
1, 7, − 5	+ 0,190	+ 0,567	0, 10, − 6	+ 0,543	+ 0,036
0, 8, − 5	− 2,778 x	+ 1,934 x	−1, 11, − 6	− 0,662	− 0,079
0, 9, − 5	+ 0,077	+ 0,581	1, 9, − 6	+ 0,110	+ 0,047
−1, 10, − 5	− 0,050	− 0,700	0, 10, − 6	− 0,066 x	+ 0,649 x
1, 8, − 5	− 0,030	+ 0,111	0, 6, − 7	+ 2,345	− 4,955
0, 9, − 5	− 0,682 x	+ 0,064 x	−1, 7, − 7	− 3,106	+ 6,597
0, 10, − 5	− 0,042	+ 0,093	1, 5, − 7	+ 0,392	− 1,636
−1, 11, − 5	+ 0,056	− 0,109	0, 6, − 7	+ 6,158 x	+ 1,921 x
1, 9, − 5	− 0,015	+ 0,013	0, 7, − 7	− 19,225	+ 0,450
0, 10, − 5	− 0,112 x	− 0,051 x	−1, 8, − 7	+ 25,772	− 0,716
0, 5, − 6	+ 7,610	+ 1,875	1, 6, − 7	− 6,797	+ 0,177
−1, 6, − 6	− 10,071	− 2,488	0, 7, − 7	− 0,283 x	− 24,829 x
1, 4, − 6	+ 2,273	− 0,018	0, 8, − 7	− 12,112	− 5,779
0, 5, − 6	− 0,659 x	+ 8,940 x	−1, 9, − 7	+ 17,267	+ 7,829
0, 6, − 6	− 11,628	− 33,850	1, 7, − 7	− 5,132	− 2,142
−1, 7, − 6	+ 13,384	+ 44,413	0, 8, − 7	+ 7,628 x	− 17,613 x
1, 5, − 6	− 1,704	− 10,985	0, 9, − 7	− 4,131	− 4,846
0, 6, − 6	+ 42,272 x	− 10,894 x	−1, 10, − 7	+ 5,152	+ 6,368
0, 7, − 6	+ 3,893	− 23,584	1, 8, − 7	− 0,948	− 1,496
−1, 8, − 6	− 5,614	+ 30,082	0, 9, − 7	+ 6,104 x	− 5,048 x
1, 6, − 6	+ 1,843	− 6,466	0, 8, − 8	− 2,333	+ 10,232
0, 7, − 6	+ 28,793 x	+ 5,461 x	−1, 9, − 8	+ 3,090	− 13,905
0, 8, − 6	+ 5,275	− 7,111	1, 7, − 8	− 0,829	+ 3,825
−1, 9, − 6	− 6,923	+ 8,688	0, 8, − 8	− 13,491 x	− 3,254 x
1, 7, − 6	+ 1,633	− 1,499	0, 9, − 8	− 5,578	+ 7,840
0, 8, − 6	+ 8,447 x	+ 6,667 x	−1, 10, − 8	+ 7,563	− 10,275
0, 9, − 6	+ 2,198	− 1,030	1, 8, − 8	− 1,971	+ 2,386
−1, 10, − 6	− 2,787	+ 1,153	0, 9, − 8	− 9,860 x	− 7,230 x

Digitized by Google

Tafel XI.

$n'\zeta' = n'\tau +$

κ, i′, i	sin	cos
1, −1, 0	+506″,389	− 1″,04745
2, −2, 0	+ 0,403	+ 0,29623
3, −3, 0	0,000	+ 0,00108
0, 0, 0	. . . .	−507,195 x
0, 1, 0	+ 36,319	− 19,688
−1, 2, 0	− 28,699	+ 21,119
−2, 3, 0	− 0,014	+ 0,039
1, 0, 0	− 5,23785 $n't$	− 8,46764 $n't$
2, −1, 0	+ 7,102	− 0,014
3, −2, 0	+ 0,012	+ 0,009
0, 1, 0	− 27,903 x	− 36,714 x
0, 2, 0	+ 1,486	− 2,909
−1, 3, 0	− 0,990	+ 2,736
−2, 4, 0	+ 0,001	+ 0,003
1, 1, 0	− 0,792	+ 0,727
2, 0, 0	− 0,07346 $n't$	− 0,11880 $n't$
3, −1, 0	+ 0,200	0,000
0, 2, 0	− 3,206 x	− 1,104 x
0, 3, 0	− 0,024	− 0,277
−1, 4, 0	+ 0,053	+ 0,247
1, 2, 0	− 0,029	+ 0,051
2, 1, 0	− 0,010	+ 0,008
3, 0, 0	− 0,00206 $n't$	− 0,00334 $n't$
0, 3, 0	− 0,272 x	+ 0,062 x
4, 0, 0	− 0,00007 $n't$	− 0,00012 $n't$
0, −2, −1	+ 0,062	+ 0,006
−1, −1, −1	− 0,023	− 0,002
−2, 0, −1	− 0,006	− 0,004
1, −3, −1	− 0,039	− 0,004
0, −2, −1	− 0,006 x	+ 0,025 x
0, −1, −1	+ 0,669	− 0,024
−1, 0, −1	− 0,392	− 0,376
−2, 1, −1	+ 0,022	+ 0,470
−3, 2, −1	− 0,025	− 0,106
1, −2, −1	− 0,349	+ 0,073
0, −1, −1	− 0,047 x	+ 0,196 x
0, 0, −1	+ 3,212	− 15,883
−1, 1, −1	+ 1,598	+ 33,405
−2, 2, −1	− 0,873	− 3,657
−3, 3, −1	− 0,047	− 0,019

κ, i′, i	sin	cos
1, −1, −1	− 2″,850	− 2″,398
2, −2, −1	− 0,005	+ 0,001
0, 0, −1	0 x	0 x
0, 1, −1	− 107,423	−517,567
−1, 2, −1	− 62,411	−260,621
−2, 3, −1	− 1,674	− 0,730
1, 0, −1	+ 165,337	+778,873
2, −1, −1	− 0,040	− 0,034
0, 1, −1	+1040,769 x	−221,807 x
0, 2, −1	− 298,425	+ 12,992
−1, 3, −1	− 119,264	− 51,995
−2, 4, −1	− 0,138	− 0,004
1, 1, −1	+ 0,568	+ 14,954
2, 0, −1	+ 2,319	+ 10,925
0, 2, −1	+ 82,460 x	+ 75,807 x
0, 3, −1	− 17,267	+ 16,026
−1, 4, −1	− 9,808	− 0,356
−2, 5, −1	− 0,009	+ 0,006
1, 2, −1	− 0,463	+ 3,629
2, 1, −1	+ 0,008	+ 0,209
3, 0, −1	+ 0,065	+ 0,306
0, 3, −1	− 4,926 x	− 23,778 x
0, 4, −1	+ 0,573	+ 0,007
−1, 5, −1	− 0,802	+ 0,350
1, 3, −1	− 0,056	− 0,403
2, 2, −1	− 0,006	+ 0,050
3, 1, −1	+ 0,001	+ 0,006
4, 0, −1	+ 0,002	+ 0,012
0, 4, −1	− 0,626 x	− 1,184 x
0, 5, −1	+ 0,051	− 0,044
−1, 6, −1	− 0,049	+ 0,063
1, 4, −1	− 0,009	− 0,014
0, 5, −1	− 0,083 x	− 0,064 x
0, −1, −2	+ 0,011	+ 0,034
−1, 0, −2	− 0,008	− 0,028
−2, 1, −2	+ 0,003	+ 0,015
1, −2, −2	− 0,005	− 0,015
0, −1, −2	− 0,011 x	+ 0,002 x
0, 0, −2	+ 0,019	− 0,271
−1, 1, −2	+ 0,184	+ 1,102

Digitized by Google

κ	i'	i	sin	cos
−2,	2,	−2	0″,000	− 0″,283
−3,	3,	−2	− 0,066	+ 0,028
1,	−1,	−2	− 0,116	− 0,376
0,	0,	−2	0 x	0 x
0,	1,	−2	− 5,834	− 19,967
−1,	2,	−2	+ 0,010	− 20,110
−2,	3,	−2	− 2,355	+ 0,990
−3,	4,	−2	− 0,027	+ 0,034
1,	0,	−2	+ 7,371	+ 36,585
2,	−1,	−2	− 0,002	− 0,005
0,	1,	−2	+ 44,783 x	− 8,831 x
0,	2,	−2	+ 132,329	− 56,615
−1,	3,	−2	− 167,891	+ 70,560
−2,	4,	−2	− 0,927	+ 1,218
−3,	5,	−2	+ 0,028	− 0,236
1,	1,	−2	+ 7,487	− 2,895
2,	0,	−2	+ 0,104	+ 0,514
0,	2,	−2	− 36,938 x	− 91,708 x
0,	3,	−2	+ 45,963	− 57,075
−1,	4,	−2	− 66,023	+ 86,850
−2,	5,	−2	+ 0,996	− 8,404
1,	2,	−2	+ 0,685	− 3,094
2,	1,	−2	+ 0,105	− 0,040
3,	0,	−2	+ 0,003	+ 0,015
0,	3,	−2	− 37,278 x	− 29,001 x
0,	4,	−2	+ 6,001	− 38,409
−1,	5,	−2	+ 71,229	− 599,268
−2,	6,	−2	− 0,018	− 0,039
1,	3,	−2	− 0,481	− 0,840
2,	2,	−2	+ 0,009	− 0,044
3,	1,	−2	+ 0,003	0,000
0,	4,	−2	− 18,887 x	− 2,540 x
0,	5,	−2	−1014,974	−2362,871
−1,	6,	−2	− 1,25168	− 2,78780
−2,	7,	−2	− 0,00255	− 0,00170
1,	4,	−2	− 0,29766	− 0,12344
2,	3,	−2	− 0,00673	− 0,01177
3,	2,	−2	+ 0,00026	− 0,00124
0,	5,	−2	+ 81,53600 x	− 34,84589 x
0,	6,	−2	− 0,008	+ 0,017
−1,	7,	−2	− 0,181	− 0,122
1,	5,	−2	+ 1,311	− 0,307

κ	i'	i	sin	cos
2,	4,	−2	− 0″,004	− 0″,002
0,	6,	−2	+ 0,238 x	− 0,331 x
0,	7,	−2	+ 0,011	+ 0,001
−1,	8,	−2	− 0,019	− 0,001
1,	6,	−2	+ 0,005	− 0,004
2,	5,	−2	+ 0,018	− 0,004
0,	7,	−2	+ 0,003 x	− 0,028 x
0,	0,	−3	− 0,010	− 0,024
−1,	1,	−3	+ 0,015	+ 0,061
−2,	2,	−3	− 0,001	− 0,014
1,	−1,	−3	− 0,002	− 0,018
0,	0,	−3	0 x	0 x
0,	1,	−3	− 0,355	− 1,136
−1,	2,	−3	− 0,067	− 0,963
−2,	3,	−3	− 0,012	+ 0,053
−3,	4,	−3	− 0,016	− 0,021
1,	0,	−3	+ 0,432	+ 1,973
0,	1,	−3	+ 2,283 x	− 0,452 x
0,	2,	−3	+ 0,958	− 2,616
−1,	3,	−3	− 0,808	+ 3,773
−2,	4,	−3	− 0,544	− 0,751
−3,	5,	−3	− 0,011	− 0,005
1,	1,	−3	+ 0,245	− 0,277
2,	0,	−3	+ 0,006	+ 0,028
0,	2,	−3	− 1,646 x	− 1,338 x
0,	3,	−3	+31,427	+43,163
−1,	4,	−3	−38,765	−53,549
−2,	5,	−3	− 0,449	− 0,216
1,	2,	−3	+ 3,965	+ 5,394
2,	1,	−3	+ 0,004	− 0,004
0,	3,	−3	+36,197 x	−26,638 x
0,	4,	−3	+25,279	+12,911
−1,	5,	−3	−31,997	−15,377
−2,	6,	−3	− 0,195	+ 0,015
1,	3,	−3	+ 2,667	+ 0,626
2,	2,	−3	+ 0,056	+ 0,076
0,	4,	−3	+10,088 x	−20,710 x
0,	5,	−3	+10,337	− 0,296
−1,	6,	−3	−13,896	+ 0,934
−2,	7,	−3	− 0,096	+ 0,064
1,	4,	−3	+ 0,698	− 0,328

Digitized by Google

κ	i'	i	sin	cos
			″	″
2,	3,	−3	+ 0,037	+ 0,009
0,	5,	−3	− 0,424 x	− 7,718 x
0,	6,	−3	+ 3,346	− 2,063
−1,	7,	−3	− 6,816	+ 4,623
−2,	8,	−3	+ 0,007	− 0,015
1,	5,	−3	+ 0,091	− 0,171
2,	4,	−3	+ 0,010	− 0,004
0,	6,	−3	− 1,332 x	− 2,043 x
0,	7,	−3	+ 1,821	− 3,555
−1,	8,	−3	+ 0,456	− 0,982
1,	6,	−3	− 0,007	− 0,051
2,	5,	−3	+ 0,001	− 0,002
0,	7,	−3	− 1,138 x	− 0,564 x
0,	8,	−3	− 0,013	− 0,143
−1,	9,	−3	− 0,010	− 0,055
1,	7,	−3	− 0,018	− 0,018
0,	8,	−3	+ 0,153 x	− 0,012 x
0,	2,	−4	− 0,035	− 0,105
−1,	3,	−4	+ 0,055	+ 0,127
−2,	4,	−4	− 0,040	− 0,004
1,	1,	−4	+ 0,013	− 0,006
0,	2,	−4	− 0,064 x	− 0,017 x
0,	3,	−4	+ 2,145	+ 0,363
−1,	4,	−4	− 2,853	− 0,292
−2,	5,	−4	+ 0,259	− 0,293
−3,	6,	−4	+ 0,001	− 0,006
1,	2,	−4	+ 0,312	+ 0,177
0,	3,	−4	+ 0,722 x	− 1,769 x
0,	4,	−4	− 14,689	+ 16,720
−1,	5,	−4	+ 18,503	− 20,917
−2,	6,	−4	+ 0,055	− 0,224
1,	3,	−4	− 2,625	+ 3,001
2,	2,	−4	+ 0,004	+ 0,002
0,	4,	−4	+ 15,951 x	+ 13,828 x
0,	5,	−4	− 3,462	+ 12,900
−1,	6,	−4	+ 3,949	− 16,039
−2,	7,	−4	− 0,022	− 0,082
1,	4,	−4	− 0,185	+ 1,910
2,	3,	−4	− 0,036	+ 0,042
0,	5,	−4	+ 11,928 x	+ 2,969 x
0,	6,	−4	+ 1,105	+ 4,781
−1,	7,	−4	− 1,582	− 5,879

κ	i'	i	sin	cos
			″	″
−2,	8,	−4	− 0,019	− 0,019
1,	5,	−4	+ 0,292	+ 0,505
2,	4,	−4	− 0,003	+ 0,027
0,	6,	−4	+ 4,182 x	− 1,083 x
0,	7,	−4	+ 1,016	+ 1,124
−1,	8,	−4	− 1,372	− 1,386
−2,	9,	−4	− 0,010	− 0,003
1,	6,	−4	+ 0,132	+ 0,061
2,	5,	−4	+ 0,004	+ 0,007
0,	7,	−4	+ 0,895 x	− 0,860 x
0,	8,	−4	+ 0,455	+ 0,145
−1,	9,	−4	− 0,703	− 0,188
−2,	10,	−4	+ 0,022	− 0,006
1,	7,	−4	+ 0,034	− 0,006
0,	8,	−4	+ 0,095 x	− 0,328 x
0,	9,	−4	+ 0,215	− 0,055
−1,	10,	−4	+ 1,584	− 0,439
1,	8,	−4	+ 0,006	− 0,006
0,	9,	−4	− 0,029 x	− 0,111 x
0,	10,	−4	+ 2,434	− 2,486
−1,	11,	−4	+ 0,01048	− 0,01120
1,	9,	−4	+ 0,00045	− 0,00259
2,	8,	−4	+ 0,00008	− 0,00008
0,	10,	−4	+ 0,17536 x	+ 0,17311 x
0,	4,	−5	+ 0,037	+ 1,440
−1,	5,	−5	− 0,110	− 1,880
−2,	6,	−5	+ 0,155	+ 0,084
1,	3,	−5	− 0,078	+ 0,281
0,	4,	−5	+ 1,358 x	+ 0,213 x
0,	5,	−5	− 8,658	− 4,668
−1,	6,	−5	+ 11,030	+ 6,005
−2,	7,	−5	+ 0,118	+ 0,003
1,	4,	−5	− 1,918	− 1,033
2,	3,	−5	− 0,001	+ 0,004
0,	5,	−5	− 4,729 x	+ 8,946 x
0,	6,	−5	− 6,725	− 0,322
−1,	7,	−5	+ 8,416	+ 0,252
−2,	8,	−5	+ 0,041	− 0,020
1,	5,	−5	− 1,227	+ 0,098
2,	4,	−5	− 0,037	− 0,014
0,	6,	−5	− 0,203 x	+ 6,728 x

Digitized by Google

κ i' i	sin	cos
0, 7, − 5	− 2″,415	+ 1″,117
− 1, 8, − 5	+ 2,939	− 1,476
− 2, 9, − 5	+ 0,008	− 0,012
1, 6, − 5	− 0,328	+ 0,257
2, 5, − 5	− 0,017	+ 0,001
0, 7, − 5	+ 1,141 x	+ 2,313 x
0, 8, − 5	− 0,490	+ 0,661
− 1, 9, − 5	+ 0,571	− 0,843
1, 7, − 5	− 0,035	+ 0,105
2, 6, − 5	− 0,005	+ 0,004
0, 8, − 5	+ 0,629 x	+ 0,438 x
0, 9, − 5	− 0,029	+ 0,228
− 1, 10, − 5	+ 0,021	− 0,290
1, 8, − 5	+ 0,007	+ 0,025
0, 9, − 5	+ 0,200 x	+ 0,019 x
0, 5, − 6	− 0,860	+ 0,196
− 1, 6, − 6	+ 1,132	− 0,280
− 2, 7, − 6	− 0,023	+ 0,079
1, 4, − 6	− 0,209	− 0,002
0, 5, − 6	+ 0,067 x	+ 0,903 x
0, 6, − 6	+ 1,445	− 4,338
− 1, 7, − 6	− 1,694	+ 5,623
− 2, 8, − 6	+ 0,011	+ 0,061
1, 5, − 6	+ 0,172	− 1,110
2, 4, − 6	− 0,003	0,000
0, 6, − 6	− 4,794 x	− 1,224 x
0, 7, − 6	− 0,581	− 3,446
− 1, 8, − 6	+ 0,814	+ 4,360
− 2, 9, − 6	+ 0,016	+ 0,020
1, 6, − 6	− 0,207	− 0,727
2, 5, − 6	+ 0,002	− 0,016
0, 7, − 6	− 3,644 x	+ 0,691 x
0, 8, − 6	− 0,904	− 1,208
− 1, 9, − 6	+ 1,174	+ 1,473
− 2, 10, − 6	+ 0,008	+ 0,003
1, 7, − 6	− 0,207	− 0,190
2, 6, − 6	− 0,003	− 0,010
0, 0, − 6	− 1,224 x	+ 0,966 x

κ i' i	sin	cos
0, 9, − 6	− 0″,450	− 0″,208
− 1, 10, − 6	+ 0,569	+ 0,235
1, 8, − 6	− 0,079	− 0,013
2, 7, − 6	− 0,003	− 0,003
0, 9, − 6	− 0,196 x	+ 0,454 x
0, 6, − 7	− 0,221	− 0,483
− 1, 7, − 7	+ 0,299	+ 0,635
− 2, 8, − 7	− 0,038	− 0,001
1, 5, − 7	− 0,032	− 0,132
0, 6, − 7	− 0,541 x	+ 0,169 x
0, 7, − 7	+ 2,082	+ 0,046
− 1, 8, − 7	− 2,746	− 0,076
− 2. 9, − 7	− 0,029	+ 0,013
1, 6, − 7	+ 0,597	+ 0,016
0, 7, − 7	+ 0,027 x	− 2,391 x
0, 8, − 7	+ 1,491	− 0,703
− 1, 9, − 7	− 2,060	+ 0,934
− 2, 10, − 7	− 0,010	+ 0,012
1, 7, − 7	+ 0,494	− 0,206
2, 6, − 7	+ 0,008	0,000
0, 8, − 7	− 0,815 x	− 1,877 x
0, 9, − 7	+ 0,565	− 0,665
− 1, 10, − 7	− 0,698	+ 0,862
1, 8, − 7	+ 0,101	− 0,159
2, 7, − 7	+ 0,007	− 0,003
0, 9, − 7	− 0,728 x	− 0,602 x
0, 8, − 8	+ 0,220	+ 0,938
− 1, 9, − 8	− 0,284	− 1,280
− 2, 10, − 8	− 0,010	− 0,014
1, 7, − 8	+ 0,064	+ 0,297
0, 8, − 8	+ 1,137 x	− 0,274 x
0, 9, − 8	+ 0,574	+ 0,806
− 1, 10, − 8	− 0,767	− 1,041
1, 8, − 8	+ 0,166	+ 0,201
0, 9, − 8	+ 0,907 x	− 0,665 x

Digitized by Google

$$\left(\frac{d\zeta'}{d\tau}\right) = 1 +$$

κ, i', i	cos	sin
0, 0, 0	—507,195	....
1, —1, 0	+506,389	+ 1,04745
2, —2, 0	+ 0,806	— 0,59246
3, —3, 0	0,000	— 0,00324
	0,000	....
0, 1, 0	— 36,714	—27,903
—1, 2, 0	+ 28,699	+21,119
—2, 3, 0	+ 0,028	+ 0,078
1, 0, 0	— 5,23785 $n't$	+ 8,46764 $n't$
2, —1, 0	+ 14,204	+ 0,028
3, —2, 0	+ 0,036	— 0,027
	+ 6,253	— 6,705
	(+ 14,721	+ 1,467)
0, 2, 0	— 1,104	— 3,206
—1, 3, 0	+ 0,990	+ 2,736
—2, 4, 0	— 0,002	+ 0,006
1, 1, 0	— 0,792	— 0,727
2, 0, 0	— 0,14692 $n't$	+ 0,23760 $n't$
3, —1, 0	+ 0,600	0,000
	— 0,308	— 1,191
	(— 0,095	+ 0,559)
0, 3, 0	+ 0,062	— 0,272
—1, 4, 0	— 0,053	+ 0,247
1, 2, 0	— 0,029	— 0,051
2, 1, 0	— 0,020	— 0,016
3, 0, 0	— 0,00618 $n't$	+ 0,01002 $n't$
	— 0,040	— 0,092
	(— 0,012	+ 0,030)
4, 0, 0	— 0,00028 $n't$	+ 0,00048 $n't$
0, —2, —1	+ 0,025	— 0,006
—1, —1, —1	+ 0,023	— 0,002
—2, 0, —1	+ 0,012	— 0,008
1, —3, —1	— 0,039	+ 0,004
	+ 0,021	— 0,012
	(— 0,005	— 0,003)

κ, i', i	cos	sin
0, —1, —1	+ 0,196	— 0,047
—1, 0, —1	+ 0,392	— 0,376
—2, 1, —1	— 0,044	+ 0,940
—3, 2, —1	+ 0,075	— 0,318
1, —2, —1	— 0,349	— 0,073
	+ 0,270	+ 0,126
	(— 0,078	+ 0,036)
0, 0, —1	0,000	0,000
—1, 1, —1	— 1,598	+ 33,405
—2, 2, —1	+ 1,746	— 7,314
—3, 3, —1	+ 0,141	— 0,057
1, —1, —1	— 2,850	+ 2,398
2, —2, —1	— 0,010	— 0,002
	— 2,571	+ 28,430
	(+ 1,035	+ 11,450)
0, 1, —1	—221,807	+1040,769
—1, 2, —1	+ 62,411	— 260,621
—2, 3, —1	+ 3,348	— 1,460
1, 0, —1	+165,337	— 778,873
2, —1, —1	— 0,080	+ 0,068
	+ 9,209	— 0,117
	(— 6,209	— 0,079)
0, 2, —1	+ 75,807	+ 82,460
—1, 3, —1	+119,264	— 51,995
—2, 4, —1	+ 0,276	— 0,008
1, 1, —1	+ 0,568	— 14,954
2, 0, —1	+ 4,638	— 21,850
	+200,553	— 6,347
	(—414,944	— 13,132)
0, 3, —1	— 23,778	— 4,926
—1, 4, —1	+ 9,808	— 0,356
—2, 5, —1	+ 0,018	+ 0,012
1, 2, —1	— 0,463	— 3,629
2, 1, —1	+ 0,016	— 0,418
3, 0, —1	+ 0,195	— 0,918
	— 14,204	— 10,235
	(— 27,491	+ 19,809)

Digitized by Google

κ i' i	cos	sin
0, 4, −1	− 1,183	− 0,626
−1, 5, −1	+ 0,802	+ 0,350
1, 3, −1	− 0,056	+ 0,403
2, 2, −1	− 0,012	− 0,100
3, 1, −1	+ 0,003	− 0,018
4, 0, −1	+ 0,008	− 0,048
	− 0,438	− 0,039
	(− 0,289	+ 0,026)
0, 5, −1	− 0,064	− 0,083
−1, 6, −1	+ 0,049	+ 0,063
1, 4, −1	− 0,009	+ 0,014
	− 0,024	− 0,006
	(− 0,010	+ 0,002)
0, −1, −2	+ 0,002	− 0,011
−1, 0, −2	+ 0,008	− 0,028
−2, 1, −2	− 0,006	+ 0,030
1, −2, −2	− 0,005	+ 0,015
	− 0,001	+ 0,006
	(0,000	+ 0,001)
0, 0, −2	0,000	0,000
−1, 1, −2	− 0,184	+ 1,102
−2, 2, −2	0,000	− 0,556
−3, 3, −2	+ 0,198	+ 0,084
1, −1, −2	− 0,116	+ 0,376
	− 0,102	+ 0,996
	(+ 0,021	− 0,200)
0, 1, −2	− 8,831	+ 44,783
−1, 2, −2	− 0,010	− 20,110
−2, 3, −2	+ 4,710	+ 1,980
−3, 4, −2	+ 0,081	+ 0,102
1, 0, −2	+ 7,371	− 36,585
2, −1, −2	− 0,004	+ 0,010
	+ 3,317	− 9,820
	(− 0,836	− 2,476)
0, 2, −2	− 91,708	− 36,938
−1, 3, −2	+167,891	+ 70,560
−2, 4, −2	+ 1,854	+ 2,436
−3, 5, −2	− 0,084	− 0,708
1, 1, −2	+ 7,487	+ 2,895
2, 0, −2	+ 0,208	− 1,028
	+ 85,648	+ 37,217
	(− 28,870	+ 12,545)

κ i' i	cos	sin
0, 3, −2	− 29,001	− 37,278
−1, 4, −2	+ 66,023	+ 86,850
−2, 5, −2	− 1,992	− 16,808
1, 2, −2	+ 0,685	+ 3,094
2, 1, −2	+ 0,210	+ 0,080
3, 0, −2	+ 0,009	− 0,045
	+ 35,934	+ 35,893
	(− 18,272	+ 18,251)
0, 4, −2	− 2,540	− 18,887
−1, 5, −2	− 71,229	− 599,268
−2, 6, −2	+ 0,036	− 0,078
1, 3, −2	− 0,481	+ 0,840
2, 2, −2	+ 0,018	+ 0,088
3, 1, −2	+ 0,009	0,000
	− 74,187	− 617,305
	(+ 76,745	− 638,603)
0, 5, −2	− 34,84589	+ 81,53600
−1, 6, −2	+ 1,25168	− 2,78780
−2, 7, −2	+ 0,00500	− 0,00340
1, 4, −2	− 0,29766	+ 0,12344
2, 3, −2	− 0,01346	+ 0,02354
3, 2, −2	+ 0,00078	+ 0,00372
	− 33,89955	+ 78,89550
	(−1016,528	−2365,799)
0, 6, −2	− 0,331	+ 0,238
−1, 7, −2	+ 0,181	− 0,122
1, 5, −2	+ 1,311	+ 0,307
2, 4, −2	− 0,008	+ 0,004
	+ 1,153	+ 0,427
	(+ 1,116	− 0,413)
0, 7, −2	− 0,028	+ 0,003
−1, 8, −2	+ 0,019	− 0,001
1, 6, −2	+ 0,005	+ 0,004
2, 5, −2	+ 0,036	+ 0,008
	+ 0,032	+ 0,014
	(+ 0,016	+ 0,007)
0, 0, −3	0,000	0,000
−1, 1, −3	− 0,015	+ 0,061
−2, 2, −3	+ 0,002	− 0,028
1, −1, −3	− 0,002	+ 0,018
	− 0,015	+ 0,051
	(+ 0,002	+ 0,007)

Digitized by Google

κ i' i	cos	sin
	″	″
0, 1, − 3	− 0,452	+ 2,283
− 1, 2, − 3	+ 0,067	− 0,963
− 2, 3, − 3	+ 0,024	+ 0,106
− 3, 4, − 3	+ 0,048	− 0,063
1, 0, − 3	+ 0,432	− 1,973
	+ 0,119	− 0,610
	(− 0,018	− 0,094)
0, 2, − 3	− 1,338	− 1,646
− 1, 3, − 3	+ 0,808	+ 3,773
− 2, 4, − 3	+ 1,088	− 1,502
− 3, 5, − 3	+ 0,033	− 0,015
1, 1, − 3	+ 0,245	+ 0,277
2, 0, − 3	+ 0,012	− 0,056
	+ 0,848	+ 0,831
	(− 0,156	+ 0,153)
0, 3, − 3	− 26,638	+ 36,197
− 1, 4, − 3	+ 38,765	− 53,549
− 2, 5, − 3	+ 0,898	− 0,432
1, 2, − 3	+ 3,965	− 5,394
2, 1, − 3	+ 0,008	+ 0,008
	+ 16,998	− 23,170
	(− 3,819	− 5,206)
0, 4, − 3	− 20,710	+ 10,088
− 1, 5, − 3	+ 31,997	− 15,377
− 2, 6, − 3	+ 0,390	+ 0,030
1, 3, − 3	+ 2,667	− 0,626
2, 2, − 3	+ 0,112	− 0,152
	+ 14,456	− 6,037
	(− 4,190	− 1,750)
0, 5, − 3	− 7,718	− 0,424
− 1, 6, − 3	+ 13,897	+ 0,934
− 2, 7, − 3	+ 0,192	+ 0,128
1, 4, − 3	+ 0,698	+ 0,328
2, 3, − 3	+ 0,074	− 0,018
	+ 7,143	+ 0,948
	(− 2,915	+ 0,387)

κ i' i	cos	sin
	″	″
0, 6, − 3	− 2,043	− 1,332
− 1, 7, − 3	+ 6,816	+ 4,623
− 2, 8, − 3	− 0,014	− 0,030
1, 5, − 3	+ 0,091	+ 0,171
2, 4, − 3	+ 0,020	+ 0,008
	+ 4,870	+ 3,440
	(− 3,358	+ 2,373)
0, 7, − 3	− 0,564	− 1,138
− 1, 8, − 3	− 0,456	− 0,982
1, 6, − 3	− 0,007	+ 0,051
2, 5, − 3	+ 0,002	+ 0,004
	− 1,025	− 2,065
	(+ 2,278	− 4,590)
0, 8, − 3	− 0,012	+ 0,153
− 1, 9, − 3	+ 0,010	− 0,055
1, 7, − 3	− 0,018	+ 0,018
	− 0,020	+ 0,116
	(− 0,036	− 0,211)
0, 2, − 4	− 0,017	− 0,064
− 1, 3, − 4	− 0,055	+ 0,127
− 2, 4, − 4	+ 0,080	− 0,008
1, 1, − 4	+ 0,013	+ 0,006
	+ 0,021	+ 0,061
	(− 0,003	+ 0,008)
0, 3, − 4	− 1,769	+ 0,722
− 1, 4, − 4	+ 2,853	− 0,292
− 2, 5, − 4	− 0,518	− 0,586
− 3, 6, − 4	− 0,003	− 0,018
1, 2, − 4	+ 0,312	− 0,177
	+ 0,875	− 0,351
	(− 0,126	− 0,051)
0, 4, − 4	+ 13,828	+ 15,951
− 1, 5, − 4	− 18,503	− 20,917
− 2, 6, − 4	− 0,110	− 0,448
1, 3, − 4	− 2,625	− 3,001
2, 2, − 4	+ 0,008	− 0,004
	− 7,402	− 8,419
	(+ 1,248	− 1,419)

Digitized by Google

κ, i', i	cos	sin
	″	″
0, 5, − 4	+ 2,969	+ 11,928
− 1, 6, − 4	− 3,949	− 16,039
− 2, 7, − 4	+ 0,044	− 0,164
1, 4, − 4	− 0,185	− 1,910
2, 3, − 4	− 0,072	− 0,084
	− 1,193	− 6,269
	(+ 0,242	− 1,271)
0, 6, − 4	− 1,083	+ 4,182
− 1, 7, − 4	+ 1,582	− 5,879
− 2, 8, − 4	+ 0,038	− 0,038
1, 5, − 4	+ 0,292	− 0,505
2, 4, − 4	− 0,006	− 0,054
	+ 0,823	− 2,294
	(− 0,209	− 0,583)
0, 7, − 4	− 0,860	+ 0,895
− 1, 8, − 4	+ 1,372	− 1,386
− 2, 9, − 4	+ 0,020	− 0,006
1, 6, − 4	+ 0,132	− 0,061
2, 5, − 4	+ 0,008	− 0,014
	+ 0,672	− 0,572
	(− 0,229	− 0,195)
0, 8, − 4	− 0,328	+ 0,095
− 1, 9, − 4	+ 0,703	− 0,188
− 2, 10, − 4	− 0,044	− 0,012
1, 7, − 4	+ 0,034	+ 0,006
	+ 0,365	− 0,099
	(− 0,189	− 0,051)
0, 9, − 4	− 0,111	− 0,029
− 1, 10, − 4	− 1,584	− 0,439
1, 8, − 4	+ 0,006	+ 0,006
	− 1,689	− 0,462
	(+ 1,810	− 0,495)
0, 10, − 4	+ 0,17311	+ 0,17536
− 1, 11, − 4	− 0,01048	− 0,01120
1, 9, − 4	+ 0,00045	+ 0,00259
2, 8, − 4	+ 0,00016	+ 0,00016
	+ 0,16324	+ 0,16691
	(+ 2,447	− 2,502)
	″	″
0, 4, − 5	+ 0,213	+ 1,358
− 1, 5, − 5	+ 0,110	− 1,880
− 2, 6, − 5	− 0,310	+ 0,168
1, 3, − 5	− 0,078	− 0,281
	− 0,065	− 0,635
	(+ 0,008	− 0,072)
0, 5, − 5	+ 8,946	− 4,729
− 1, 6, − 5	− 11,030	+ 6,005
− 2, 7, − 5	− 0,236	+ 0,006
1, 4, − 5	− 1,918	+ 1,033
2, 3, − 5	− 0,002	− 0,008
	− 4,230	+ 2,307
	(+ 0,570	+ 0,311)
0, 6, − 5	+ 6,728	− 0,203
− 1, 7, − 5	− 8,416	+ 0,252
− 2, 8, − 5	− 0,082	− 0,040
1, 5, − 5	− 1,227	− 0,098
2, 4, − 5	− 0,054	+ 0,028
	− 3,051	− 0,061
	(+ 0,476	− 0,010)
0, 7, − 5	+ 2,313	+ 1,141
− 1, 8, − 5	− 2,939	− 1,476
− 2, 9, − 5	− 0,016	− 0,024
1, 6, − 5	− 0,328	− 0,257
2, 5, − 5	− 0,034	− 0,002
	− 1,004	− 0,618
	(+ 0,185	− 0,114)
0, 8, − 5	+ 0,438	+ 0,629
− 1, 9, − 5	− 0,571	− 0,843
1, 7, − 5	− 0,035	− 0,105
2, 6, − 5	− 0,010	− 0,008
	− 0,178	− 0,327
	(+ 0,040	− 0,074)
0, 9, − 5	+ 0,019	+ 0,200
− 1, 10, − 5	− 0,021	− 0,290
1, 8, − 5	+ 0,007	− 0,025
	+ 0,005	− 0,115
	(− 0,002	− 0,034)

Digitized by Google

κ	i'	i	cos	sin
0,	5,	− 6	+ 0″,903	+ 0″,067
− 1,	6,	− 6	− 1,132	− 0,280
− 2,	7,	− 6	+ 0,046	+ 0,158
1,	4,	− 6	− 0,209	+ 0,002
			− 0,392	− 0,053
			(+ 0,040	− 0,005)
0,	6,	− 6	− 1,224	− 4,749
− 1,	7,	− 6	+ 1,694	+ 5,623
− 2,	8,	− 6	− 0,022	+ 0,122
1,	5,	− 6	+ 0,172	+ 1,110
2,	4,	− 6	− 0,006	0,000
			+ 0,614	+ 2,106
			(− 0,069	+ 0,237)
0,	7,	− 6	+ 0,691	− 3,644
− 1,	8,	− 6	− 0,814	+ 4,360
− 2,	9,	− 6	− 0,032	+ 0,040
1,	6,	− 6	− 0,207	+ 0,727
2,	5,	− 6	+ 0,004	+ 0,032
			− 0,358	+ 1,515
			(+ 0,045	+ 0,191
0,	8,	− 6	+ 0,966	− 1,224
− 1,	9,	− 6	− 1,174	+ 1,473
− 2,	10,	− 6	− 0,016	+ 0,006
1,	7,	− 6	− 0,207	+ 0,190
2,	6,	− 6	− 0,006	+ 0,020
			− 0,437	+ 0,465
			(+ 0,063	+ 0,067)
0,	9,	− 6	+ 0,454	− 0,196
− 1,	10,	− 6	− 0,569	+ 0,235
1,	8,	− 6	− 0,079	+ 0,013
2,	7,	− 6	− 0,006	+ 0,006
			− 0,200	+ 0,058
			(+ 0,034	+ 0,010)

κ	i'	i	cos	sin
0,	6,	− 7	+ 0″,169	− 0″,541
− 1,	7,	− 7	− 0,299	+ 0,635
− 2,	8,	− 7	+ 0,076	− 0,002
1,	5,	− 7	− 0,032	+ 0,132
			− 0,086	+ 0,224
			(+ 0,008	+ 0,020)
0,	7,	− 7	− 2,391	+ 0,027
− 1,	8,	− 7	+ 2,746	− 0,076
− 2,	9,	− 7	+ 0,058	+ 0,026
1,	6,	− 7	+ 0,597	− 0,016
			+ 1,010	− 0,029
			(− 0,097	− 0,003)
0,	8,	− 7	− 1,877	− 0,815
− 1,	9,	− 7	+ 2,060	+ 0,934
− 2,	10,	− 7	+ 0,020	+ 0,024
1,	7,	− 7	+ 0,494	+ 0,206
2,	6,	− 7	+ 0,016	0,000
			+ 0,713	+ 0,349
			(− 0,076	+ 0,037)
0,	9,	− 7	− 0,602	− 0,728
− 1,	10,	− 7	+ 0,698	+ 0,862
1,	8,	− 7	+ 0,101	+ 0,159
2,	7,	− 7	+ 0,014	+ 0,006
			+ 0,211	+ 0,299
			(− 0,025	+ 0,036)
0,	8,	− 8	− 0,274	+ 1,137
− 1,	9,	− 8	+ 0,284	− 1,280
− 2,	10,	− 8	+ 0,020	− 0,028
1,	7,	− 8	+ 0,064	− 0,297
			+ 0,094	− 0,468
			(− 0,008	− 0,040)
0,	9,	− 8	− 0,665	+ 0,907
− 1,	10,	− 8	+ 0,767	− 1,041
1,	8,	− 8	+ 0,166	− 0,201
			+ 0,268	− 0,335
			(− 0,023	− 0,028)

Digitized by Google

$$-\frac{\iota}{n'}\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} =$$

κ i' i	sin	cos
1, −1, 0	+ 506,389	− 1,04745
2, −2, 0	+ 1,612	+ 1,18492
3, −3, 0	0,000	+ 0,00972
	0,000	+ 0,14719
−1, 2, 0	− 28,699	+ 21,119
−2, 3, 0	− 0,056	+ 0,156
1, 0, 0	− 5,23785 $n't$	− 8,46764 $n't$
2, −1, 0	+ 28,408	− 0,056
3, −2, 0	+ 0,108	+ 0,081
	− 0,239	+ 21,300
−1, 3, 0	− 0,990	+ 2,736
−2, 4, 0	+ 0,004	+ 0,012
1, 1, 0	− 0,792	+ 0,727
2, 0, 0	− 0,29384 $n't$	− 0,47520 $n't$
3, −1, 0	− 1,800	0,000
	+ 0,022	+ 3,475
−1, 4, 0	+ 0,053	+ 0,247
1, 2, 0	− 0,029	+ 0,051
2, 1, 0	− 0,040	+ 0,032
3, 0, 0	− 0,01854 $n't$	− 0,03006 $n't$
	− 0,016	+ 0,330
4, 0, 0	− 0,00112 $n't$	− 0,00192 $n't$
−1, −1, −1	− 0,023	− 0,002
−2, 0, −1	− 0,024	− 0,016
1, −3, −1	− 0,039	− 0,004
	− 0,086	− 0,022
−1, 0, −1	− 0,392	− 0,376
−2, 1, −1	+ 0,088	+ 1,880
−3, 2, −1	− 0,255	− 0,954
1, −2, −1	− 0,349	+ 0,073
	− 0,878	+ 0,623
−1, 1, −1	+ 1,598	+ 33,405
−2, 2, −1	− 3,492	− 14,628
−3, 3, −1	− 0,423	− 0,171
1, −1, −1	− 2,850	− 2,398
2, −2, −1	− 0,020	+ 0,004
	− 5,187	+ 16,212

κ i' i	sin	cos
−1, 2, −1	− 62,411	− 260,621
−2, 3, −1	− 6,696	− 2,920
1, 0, −1	+ 165,337	+ 778,873
2, −1, −1	− 0,160	− 0,136
	+ 96,070	+ 515,196
−1, 3, −1	− 119,264	− 51,995
−2, 4, −1	− 0,552	− 0,016
1, 1, −1	+ 0,568	+ 14,954
2, 0, −1	+ 9,276	+ 43,700
	− 109,972	+ 6,643
−1, 4, −1	− 9,808	− 0,356
−2, 5, −1	− 0,036	+ 0,024
1, 2, −1	− 0,463	+ 3,629
2, 1, −1	+ 0,032	+ 0,836
3, 0, −1	+ 0,585	+ 2,754
	− 9,690	+ 6,887
−1, 5, −1	− 0,802	+ 0,350
1, 3, −1	− 0,056	− 0,403
2, 2, −1	− 0,024	+ 0,200
3, 1, −1	+ 0,009	+ 0,054
4, 0, −1	+ 0,032	+ 0,192
	− 0,841	+ 0,393
−1, 6, −1	− 0,049	+ 0,063
1, 4, −1	− 0,009	− 0,014
	− 0,058	+ 0,049
−1, 0, −2	− 0,008	− 0,028
−2, 1, −2	+ 0,012	+ 0,060
1, −2, −2	− 0,005	− 0,015
	− 0,001	+ 0,017
−1, 1, −2	+ 0,184	+ 1,102
−2, 2, −2	0,000	− 1,132
−3, 3, −2	− 0,594	+ 0,252
1, −1, −2	− 0,116	− 0,376
	− 0,526	− 0,154

κ	i'	i	sin	cos
−1,	2,	−2	+ 0,010	− 20,110
−2,	3,	−2	− 9,420	+ 3,960
−3,	4,	−2	− 0,243	+ 0,306
1,	0,	−2	+ 7,371	+ 36,585
2,	−1,	−2	− 0,008	− 0,020
			− 2,290	+ 20,721
−1,	3,	−2	− 167,891	+ 70,560
−2,	4,	−2	− 3,708	+ 4,872
−3,	5,	−2	+ 0,252	− 2,124
1,	1,	−2	+ 7,487	− 2,895
2,	0,	−2	+ 0,416	+ 2,056
			− 163,444	+ 72,469
−1,	4,	−2	− 66,023	− 86,850
−2,	5,	−2	+ 3,984	− 33,616
1,	2,	−2	+ 0,685	− 3,094
2,	1,	−2	+ 0,420	− 0,160
3,	0,	−2	+ 0,027	+ 0,135
			− 60,907	+ 50,115
−1,	5,	−2	+ 71,229	− 599,268
−2,	6,	−2	− 0,072	− 0,156
1,	3,	−2	− 0,481	− 0,840
2,	2,	−2	+ 0,036	− 0,176
3,	1,	−2	+ 0,027	0,000
			+ 70,739	− 600,440
−1,	6,	−2	− 1,25168	− 2,78780
−2,	7,	−2	− 0,01020	− 0,00680
1,	4,	−2	− 0,29766	− 0,12344
2,	3,	−2	− 0,02692	− 0,04718
3,	2,	−2	+ 0,00234	− 0,01116
			− 1,58412	− 2,97638
−1,	7,	−2	− 0,181	− 0,122
1,	5,	−2	+ 1,311	− 0,307
2,	4,	−2	− 0,016	− 0,008
			+ 1,114	− 0,437
−1,	8,	−2	− 0,019	− 0,001
1,	6,	−2	+ 0,005	− 0,004
2,	5,	−2	+ 0,072	− 0,016
			+ 0,058	− 0,021

κ	i'	i	sin	cos
−1,	1,	−3	+ 0,015	+ 0,061
−2,	2,	−3	− 0,004	− 0,056
1,	−1,	−3	− 0,002	− 0,018
			+ 0,009	− 0,013
−1,	2,	−3	− 0,067	− 0,963
−2,	3,	−3	− 0,048	+ 0,212
−3,	4,	−3	− 0,144	− 0,189
1,	0,	−3	+ 0,432	+ 1,973
			+ 0,173	− 1,033
−1,	3,	−3	− 0,808	+ 3,773
−2,	4,	−3	− 2,176	− 3,004
−3,	5,	−3	− 0,099	− 0,045
1,	1,	−3	+ 0,245	− 0,277
2,	0,	−3	+ 0,024	+ 0,112
			− 2,814	+ 0,559
−1,	4,	−3	− 38,765	− 53,549
−2,	5,	−3	− 1,796	− 0,864
1,	2,	−3	+ 3,965	+ 5,394
2,	1,	−3	+ 0,016	− 0,016
			− 36,580	− 49,035
−1,	5,	−3	− 31,997	− 15,377
−2,	6,	−3	− 0,780	+ 0,060
1,	3,	−3	+ 2,667	+ 0,626
2,	2,	−3	+ 0,224	+ 0,304
			− 29,886	− 14,387
−1,	6,	−3	− 13,896	+ 0,934
−2,	7,	−3	− 0,384	+ 0,256
1,	4,	−3	+ 0,698	− 0,328
2,	3,	−3	+ 0,148	+ 0,036
			− 13,434	+ 0,898
−1,	7,	−3	− 6,816	+ 4,623
−2,	8,	−3	+ 0,028	− 0,060
1,	5,	−3	+ 0,091	− 0,171
2,	4,	−3	+ 0,040	− 0,016
			− 6,657	+ 4,376
−1,	8,	−3	+ 0,456	− 0,982
1,	6,	−3	− 0,007	− 0,051
2,	5,	−3	+ 0,004	− 0,008
			+ 0,453	− 1,041

Digitized by Google

κ i' i	sin	cos
−1, 9, −3	− 0″,010	− 0″,055
1, 7, −3	− 0,018	− 0,018
	− 0,028	− 0,073
−1, 3, −4	+ 0,055	+ 0,127
−2, 4, −4	− 0,160	− 0,016
1, 1, −4	+ 0,013	− 0,006
	− 0,092	+ 0,105
−1, 4, −4	− 2,853	− 0,290
−2, 5, −4	+ 1,036	− 1,172
−3, 6, −4	+ 0,009	− 0,054
1, 2, −4	+ 0,312	+ 0,177
	− 1,496	− 1,341
−1, 5, −4	+ 18,503	− 20,917
−2, 6, −4	+ 0,220	− 0,896
1, 3, −4	− 2,625	+ 3,001
2, 2, −4	+ 0,016	+ 0,008
	+ 16,114	− 18,804
−1, 6, −4	+ 3,949	− 16,039
−2, 7, −4	− 0,088	− 0,328
1, 4, −4	− 0,185	+ 1,910
2, 3, −4	− 0,144	+ 0,168
	+ 3,532	− 14,289
−1, 7, −4	− 1,582	− 5,879
−2, 8, −4	− 0,076	− 0,076
1, 5, −4	+ 0,292	+ 0,505
2, 4, −4	− 0,012	+ 0,108
	− 1,378	− 5,342
−1, 8, −4	− 1,372	− 1,386
−2, 9, −4	− 0,040	− 0,012
1, 6, −4	+ 0,132	+ 0,061
2, 5, −4	+ 0,016	+ 0,028
	− 1,264	− 1,309
−1, 9, −4	− 0,703	− 0,188
−2, 10, −4	+ 0,088	− 0,024
1, 7, −4	+ 0,034	− 0,006
	− 0,581	− 0,218
−1, 10, −4	+ 1,584	− 0,439
1, 8, −4	+ 0,006	− 0,006
	+ 1,590	− 0,445

κ i' i	sin	cos
−1, 11, −4	+ 0″,01048	− 0″,01120
1, 9, −4	+ 0,00045	− 0,00259
2, 8, −4	+ 0,00032	− 0,00032
	+ 0,01125	− 0,01411
−1, 5, −5	− 0,110	− 1,880
−2, 6, −5	+ 0,620	+ 0,336
1, 3, −5	− 0,078	+ 0,281
	+ 0,432	− 1,263
−1, 6, −5	+ 11,030	+ 6,005
−2, 7, −5	+ 0,472	+ 0,012
1, 4, −5	− 1,918	− 1,033
2, 3, −5	− 0,004	+ 0,016
	+ 9,580	+ 5,000
−1, 7, −5	+ 8,416	+ 0,252
−2, 8, −5	+ 0,164	− 0,080
1, 5, −5	− 1,227	+ 0,098
2, 4, −5	− 0,108	− 0,056
	+ 7,245	+ 0,214
−1, 8, −5	+ 2,939	− 1,476
−2, 9, −5	+ 0,032	− 0,048
1, 6, −5	− 0,328	+ 0,257
2, 5, −5	− 0,068	+ 0,004
	+ 2,575	− 1,263
−1, 9, −5	+ 0,571	− 0,843
1, 7, −5	− 0,035	+ 0,105
2, 6, −5	− 0,020	+ 0,016
	+ 0,516	− 0,712
−1, 10, −5	+ 0,021	− 0,290
1, 8, −5	+ 0,007	+ 0,025
	+ 0,028	− 0,265
−1, 6, −6	+ 1,132	− 0,280
−2, 7, −6	− 0,092	+ 0,316
1, 4, −6	− 0,209	− 0,002
	+ 0,831	+ 0,034
−1, 7, −6	− 1,694	+ 5,623
−2, 8, −6	+ 0,044	+ 0,244
1, 5, −6	+ 0,172	− 1,110
2, 4, −6	− 0,012	0,000
	− 1,490	+ 4,757

Digitized by Google

κ i′ i	sin	cos
	″	″
— 1, 8, — 6	+ 0,814	+ 4,360
— 2, 9, — 6	+ 0,064	+ 0,080
1, 6, — 6	— 0.207	— 0,727
2, 5, — 6	+ 0,008	— 0,064
	+ 0,679	+ 3,649
— 1, 9, — 6	+ 1,174	+ 1,473
— 2, 10, — 6	+ 0,032	+ 0,012
1, 7, — 6	— 0,207	— 0,190
2, 6, — 6	— 0,912	— 0,040
	+ 0,987	+ 1,255
— 1, 10, — 6	+ 0,569	+ 0,235
1, 8, — 6	— 0,079	— 0,013
2, 7, — 6	— 0,012	— 0,012
	+ 0,478	+ 0,210
— 1, 7, — 7	+ 0,299	+ 0,635
— 2, 8, — 7	— 0,152	— 0,004
1, 5, — 7	— 0,032	— 0,132
	+ 0,115	+ 0,499

κ i′ i	sin	cos
	″	″
— 1, 8, — 7	— 2,746	— 0,076
— 2, 9, — 7	— 0,116	+ 0,052
1, 6, — 7	+ 0,597	+ 0,016
	— 2,265	— 0,008
— 1, 9, — 7	— 2,060	+ 0,934
— 2, 10, — 7	— 0,040	+ 0,048
1, 7, — 7	+ 0,494	— 0,206
2, 6, — 7	+ 0,032	0,000
	— 1,574	+ 0,776
— 1, 10, — 7	— 0,698	+ 0,862
1, 8, — 7	+ 0,101	— 0,159
2, 7, — 7	+ 0,028	— 0,012
	— 0,569	+ 0,691
— 1, 9, — 8	— 0,284	— 1,280
— 2, 10, — 8	— 0,040	— 0,056
1, 7, — 8	+ 0,064	+ 0,297
	— 0,260	— 1,039
— 1, 10, — 8	— 0,767	— 1,041
1, 8, — 8	+ 0,166	+ 0,201
	— 0,601	— 0,840

Digitized by Google

i' i	l(r') = cos	l(r') = sin	S' = cos	S' = sin	i' i	l(r') = cos	l(r') = sin	S' = cos	S' = sin
	"		"	"		"	"	"	"
0, 0	+84,533	....	+169,066	....	5, −3	−2,742	−0,163	+1,060	+0,562
......	+ 0,07300 $n't$	....	+ 0,14719 $n't$	....	6, −3	−2,296	−1,509	+0,279	+0,422
1, 0	− 4,115	+ 8,031	− 1,976	+ 9,357	7, −3	+0,504	+1,137	−0,016	+0,248
......	+ 2,61893 $n't$	− 4,23382 $n't$	0,000	0,000	8, −3	+0,026	−0,067	+0,031	−0,017
2, 0	− 0,065	+ 0,832	− 0,438	+ 0,473	2, −4	−0,006	−0,007	+0,009	+0,048
......	+ 0,07340 $n't$	− 0,11880 $n't$	0,000	0,000	3, −4	−0,108	+0,097	+0,639	−0,158
3, 0	+ 0,001	+ 0,054	− 0,038	+ 0,016	4, −4	+1,338	+1,583	−4,086	−5,280
......	+ 0,00309 $n't$	− 0,00301 $n't$	0,000	0,000	5, −4	+0,338	+1,449	−0,477	−3,372
−2, −1	− 0,010	+ 0,003	+ 0,002	− 0,007	6, −4	−0,173	+0,679	+0,473	−0,936
−1, −1	− 0,126	− 0,000	+ 0,018	− 0,053	7, −4	−0,216	+0,223	+0,241	−0,126
0, −1	− 1,045	− 3,263	− 4,660	+ 21,901	8, −4	−0,151	+0,057	+0,064	+0,014
1, −1	+32,384	−178,663	+ 73,976	−347,442	9, −4	+0,852	+0,230	+0,013	+0,015
2, −1	−133,766	− 6,872	− 26,979	− 20,001	10, −4	−0,063	−0,106	−0,006	−0,043
3, −1	+ 0,377	+ 0,665	+ 4,350	+ 3,094	4, −5	+0,026	+0,075	−0,014	−0,485
4, −1	+ 0,277	+ 0,130	+ 0,110	+ 0,220	5, −5	+0,646	−0,337	−2,838	+1,633
5, −1	+ 0,012	+ 0,010	− 0,001	+ 0,013	6, −5	+0,363	−0,017	−1,922	−0,094
−1, −2	0,000	− 0,002	− 0,001	+ 0,003	7, −5	+0,236	+0,117	−0,329	−0,385
0, −2	− 0,053	+ 0,016	− 0,298	+ 1,027	8, −5	+0,030	+0,082	−0,061	−0,164
1, −2	− 0,289	− 2,612	+ 2,740	− 15,044	9, −5	+0,004	+0,039	+0,010	−0,037
2, −2	−27,847	− 12,214	+ 30,354	+ 12,789	5, −6	+0,042	−0,002	−0,306	−0,056
3, −2	−15,485	− 12,741	+ 4,964	+ 10,411	6, −6	−0,084	−0,265	+0,446	+1,571
4, −2	+36,391	+310,577	− 1,005	+ 3,849	7, −6	+0,043	−0,231	−0,272	+1,054
5, −2	+23,752	− 44,626	+ 13,603	− 10,356	8, −6	+0,072	−0,091	−0,204	+0,283
6, −2	− 0,520	− 0,212	+ 0,075	+ 0,004	9, −6	+0,041	−0,018	−0,119	+0,023
7, −2	− 0,015	− 0,005	+ 0,003	+ 0,004	6, −7	+0,006	−0,022	−0,076	+0,180
0, −3	+ 0,001	+ 0,001	− 0,014	+ 0,033	7, −7	−0,109	0,000	+0,792	−0,028
1, −3	+ 0,014	− 0,080	+ 0,146	− 0,770	8, −7	−0,084	−0,043	+0,845	+0,266
2, −3	− 0,256	− 0,022	+ 0,332	+ 0,728	9, −7	−0,034	−0,042	+0,143	+0,216
3, −3	− 4,110	+ 5,810	+ 8,778	− 12,151	8, −8	−0,011	+0,044	+0,072	−0,381
4, −3	− 4,323	+ 2,065	+ 3,792	− 1,967	9, −8	−0,039	+0,039	+0,213	−0,238

$\int T d\tau =$

κ	i	i′	cos	sin	κ	i	i′	cos	sin
0,	0,	0	− 14″,262	....	1,	− 4,	2	+ 0″,868	+ 0″,974
1,	− 1,	0	+ 14,261	− 0″,01625	0,	− 3,	2	− 2,429 x	+ 1,778 x
...	...	...	....	....	0,	− 2,	2	+ 35,299	+ 15,465
...	...	...	....	....	− 1,	− 1,	2	− 47,684	− 20,802
0,	1,	0	+ 0,873	− 1,362	1,	− 3,	2	+ 12,317	+ 5,331
− 1,	2,	0	+ 0,093	+ 0,346	0,	− 2,	2	− 19,631 x	+ 44,900 x
1,	0,	0	− 1,13539	+ 1,01786	0,	− 1,	2	− 3,521	+ 1,960
0,	1,	0	− 0,505 x	− 0,920 x	− 1,	0,	2	+ 4,881	− 0,559
0,	2,	0	+ 0,058	+ 0,066	1,	− 2,	2	− 1,506	− 1,468
− 1,	3,	0	− 0,001	+ 0,005	0,	− 1,	2	+ 0,212 x	− 3,702 x
1,	1,	0	− 0,049	− 0,083	0,	0,	2	− 0,236	− 0,340
0,	2,	0	+ 0,053 x	− 0,050 x	− 1,	1,	2	+ 0,055	+ 0,171
0,	− 3,	1	− 0,030	− 0,050	1,	− 1,	2	+ 0,198	+ 0,187
− 1,	− 2,	1	+ 0,059	+ 0,068	0,	0,	2	0 x	0 x
1,	− 4,	1	− 0,035	− 0,028	0,	1,	2	+ 0,021	− 0,004
0,	− 3,	1	+ 0,088 x	− 0,089 x	− 1,	2,	2	− 0,004	+ 0,002
0,	− 2,	1	− 0,131	− 0,654	1,	0,	2	− 0,019	0,000
− 1,	− 1,	1	+ 0,501	+ 1,108	0,	1,	2	+ 0,002 x	− 0,010 x
1,	− 3,	1	− 0,406	− 0,296	0,	− 5,	3	+ 0,034	+ 0,067
0,	− 2,	1	+ 0,881 x	− 0,714 x	− 1,	− 4,	3	− 0,101	− 0,063
0,	− 1,	1	− 3,438	+ 16,754	1,	− 6,	3	+ 0,098	− 0,014
− 1,	0,	1	+ 2,613	− 13,214	0,	− 5,	3	− 0,008 x	+ 0,216 x
1,	− 2,	1	+ 0,814	− 3,552	0,	− 4,	3	+ 1,176	+ 0,102
0,	− 1,	1	− 7,215 x	− 1,366 x	− 1,	− 3,	3	− 1,958	+ 0,091
0,	0,	1	− 2,822	− 1,566	1,	− 5,	3	+ 1,028	− 0,529
− 1,	1,	1	+ 1,382	+ 0,920	0,	− 4,	3	+ 1,109 x	+ 2,718 x
1,	− 1,	1	+ 1,429	+ 0,687	0,	− 3,	3	+ 14,576	− 20,349
0,	0,	1	0 x	0 x	− 1,	− 2,	3	− 20,256	+ 28,207
0,	1,	1	+ 0,160	− 0,104	1,	− 4,	3	+ 5,745	− 7,743
− 1,	2,	1	− 0,020	+ 0,033	0,	− 3,	3	+ 26,765 x	+ 19,695 x
1,	0,	1	− 0,159	+ 0,063	0,	− 2,	3	+ 5,472	+ 6,415
0,	1,	1	− 0,016 x	− 0,104 x	− 1,	− 1,	3	− 6,680	− 9,048
0,	2,	1	+ 0,003	+ 0,010	1,	− 4,	3	+ 1,127	+ 2,723
− 1,	3,	1	0,000	0,000	0,	− 2,	3	− 8,166 x	+ 6,309 x
1,	1,	1	− 0,002	− 0,009	0,	− 1,	3	− 0,713	+ 0,021
0,	2,	1	+ 0,006 x	− 0,003 x	− 1,	0,	3	+ 0,875	+ 0,321
0,	− 4,	2	− 0,079	+ 0,015	1,	− 2,	3	− 0,177	− 0,374
− 1,	− 3,	2	+ 0,051	− 0,083	0,	− 1,	3	+ 0,312 x	− 0,644 x
1,	− 5,	2	+ 0,042	+ 0,086	0,	0,	3	− 0,009	− 0,054
0,	− 4,	2	− 0,188 x	+ 0,040 x	− 1,	1,	3	− 0,007	+ 0,021
0,	− 3,	2	− 0,235	+ 0,904	1,	− 1,	3	+ 0,017	+ 0,036
− 1,	− 2,	2	− 0,062	− 1,627	0,	0,	3	0 x	0 x

Digitized by Google

κ	i	i′	cos	sin	κ	i	i′	cos	sin
0,	− 6,	4	+ 0″,065	− 0″,035	0,	− 2,	5	− 0″,04656	+ 0″,17153
− 1,	− 5,	4	− 0,079	+ 0,097	− 1,	− 1,	5	+ 0,10230	− 0,20381
1,	− 7,	4	+ 0,012	− 0,087	1,	− 3,	5	− 0,06232	+ 0,03019
0,	− 6,	4	+ 0,195 x	+ 0,058 x	0,	− 2,	5	− 0,18070 x	− 0,07723 x
0,	− 5,	4	+ 0,187	− 1,096	0,	− 1,	5	− 0,011	− 0,009
− 1,	− 4,	4	− 0,148	+ 1,779	− 1,	0,	5	+ 0,008	+ 0,015
1,	− 6,	4	− 0,206	− 0,877	1,	− 2,	5	+ 0,00374	− 0,00528
0,	− 5,	4	+ 2,374 x	− 0,372 x	0,	− 1,	5	+ 0,010 x	− 0,005 x
0,	− 4,	4	− 10,285	− 11,380	0,	− 7,	6	− 0,306	+ 0,577
− 1,	− 3,	4	+ 14,438	+ 16,057	− 1,	− 6,	6	+ 0,442	− 0,929
1,	− 5,	4	− 4,036	− 4,718	1,	− 8,	6	− 0,117	+ 0,437
0,	− 4,	4	+ 15,724 x	− 13,632 x	0,	− 7,	6	− 1,194 x	− 0,372 x
0,	− 3,	4	+ 6,680	− 3,585	0,	− 6,	6	+ 1,495	+ 5,012
− 1,	− 2,	4	− 9,474	+ 4,496	− 1,	− 5,	6	− 2,095	− 7,175
1,	− 4,	4	+ 2,845	− 0,819	1,	− 7,	6	+ 0,525	+ 2,157
0,	− 3,	4	+ 4,336 x	+ 8,904 x	0,	− 6,	6	− 7,023 x	+ 1,810 x
0,	− 2,	4	+ 0,297	+ 1,278	0,	− 5,	6	− 4,344	+ 0,280
− 1,	− 1,	4	− 0,157	− 1,713	− 1,	− 4,	6	+ 6,193	− 0,202
1,	− 3,	4	− 0,176	+ 0,445	1,	− 6,	6	− 1,853	− 0,126
0,	− 2,	4	− 1,518 x	+ 0,204 x	0,	− 5,	6	− 0,181 x	− 5,977 x
0,	− 1,	4	− 0,096	− 0,036	0,	− 4,	6	+ 0,274	− 1,386
− 1,	0,	4	+ 0,095	+ 0,087	− 1,	− 3,	6	− 0,531	+ 1,916
1,	− 2,	4	+ 0,002	− 0,056	1,	− 5,	6	+ 0,283	− 0,525
0,	− 1,	4	+ 0,069 x	− 0,068 x	0,	− 4,	6	+ 1,823 x	+ 0,472 x
0,	0,	4	+ 0,002	− 0,007	0,	− 3,	6	+ 0,211	+ 0,109
− 1,	1,	4	− 0,002	+ 0,003	− 1,	− 2,	6	− 0,263	− 0,187
1,	− 1,	4	0,000	+ 0,005	1,	− 4,	6	+ 0,049	+ 0,085
0,	0,	4	0 x	0 x	0,	− 3,	6	− 0,160 x	+ 0,246 x
0,	− 6,	5	− 0,845	− 0,271	0,	− 2,	6	− 0,016	+ 0,018
− 1,	− 5,	5	+ 1,392	+ 0,354	− 1,	− 1,	6	+ 0,025	− 0,015
1,	− 7,	5	− 0,659	− 0,009	1,	− 3,	6	− 0,009	− 0,003
0,	− 6,	5	+ 0,131 x	− 1,782 x	0,	− 2,	6	− 0,014 x	− 0,019 x
0,	− 5,	5	− 7,894	+ 4,489	0,	− 7,	7	+ 2,911	− 0,198
− 1,	− 4,	5	+ 11,237	− 6,337	− 1,	− 6,	7	− 4,225	+ 0,221
1,	− 6,	5	− 3,359	+ 1,735	1,	− 8,	8	+ 1,306	+ 0,027
0,	− 5,	5	− 5,828 x	− 11,024 x	0,	− 7,	7	+ 0,047 x	+ 4,125 x
0,	− 4,	5	− 1,647	− 5,746	0,	− 6,	7	− 0,457	+ 2,968
− 1,	− 3,	5	+ 2,010	+ 8,180	− 1,	− 5,	7	+ 0,773	− 4,239
1,	− 5,	5	− 0,268	− 2,445	1,	− 7,	7	− 0,351	+ 1,256
0,	− 4,	5	+ 7,822 x	− 1,947 x	0,	− 6,	7	− 4,100 x	− 0,778 x
0,	− 3,	5	+ 1,477	− 0,022	0,	− 5,	7	− 1,114	− 0,481
− 1,	− 2,	5	− 2,02489	− 0,16638	− 1,	− 4,	7	+ 1,545	+ 0,784
1,	− 4,	5	+ 0,549	+ 0,221	1,	− 6,	7	− 0,419	− 0,320
0,	− 3,	5	− 0,104 x	+ 1,885 x	0,	− 5,	7	+ 0,733 x	− 1,487 x

Digitized by Google

κ	i	i′	cos	sin	κ	i	i′	cos	sin
0,	− 4,	7	+ 0″,168	− 0″,207	1,	− 4,	8	− 0″,002	+ 0″,002
− 1,	− 3,	7	− 0,265	+ 0,260	0,	− 3,	8	− 0,005 x	0,000
1,	− 5,	7	+ 0,103	− 0,048	0,	− 8,	9	+ 0,717	− 1,063
0,	− 4,	7	+ 0,249 x	+ 0,240 x	− 1,	− 7,	9	− 1,073	+ 1,513
0,	− 3,	7	+ 0,021	+ 0,030	1,	− 9,	9	+ 0,368	− 0,437
− 1,	− 2,	7	− 0,019	+ 0,042	0,	− 8,	9	+ 1,456 x	+ 1,068 x
1,	− 4,	7	− 0,005	+ 0,014	0,	− 7,	9	+ 0,491	+ 0,542
0,	− 3,	7	− 0,037 x	+ 0,018 x	− 1,	− 6,	9	− 0,653	− 0,815
0,	− 2,	7	− 0,004	− 0,002	1,	− 8,	9	+ 0,154	+ 0,279
− 1,	− 1,	7	+ 0,004	+ 0,001	0,	− 7,	9	− 0,788 x	+ 0,651 x
1,	− 3,	7	0,000	+ 0,001	0,	− 6,	9	− 0,211	+ 0,106
0,	− 2,	7	0,000 x	− 0,003 x	− 1,	− 5,	9	+ 0,313	− 0,130
0,	− 8,	8	+ 0,273	− 1,596	1,	− 7,	9	− 0,104	+ 0,017
− 1,	− 7,	8	− 0,440	+ 2,318	0,	− 6,	9	− 0,123 x	− 0,297 x
1,	− 9,	8	+ 0,200	− 0,710	0,	− 5,	9	− 0,010	− 0,047
0,	− 8,	8	+ 2,242 x	+ 0,541 x	− 1,	− 4,	9	+ 0,004	+ 0,067
0,	− 7,	8	+ 1,855	+ 0,726	1,	− 6,	9	+ 0,006	− 0,020
− 1,	− 6,	8	− 2,647	− 1,111	0,	− 5,	9	+ 0,063 x	− 0,006 x
1,	− 8,	8	+ 0,777	+ 0,408	0,	− 4,	9	+ 0,007	0,000
0,	− 7,	8	− 1,109 x	+ 2,561 x	− 1,	− 3,	9	− 0,008	− 0,003
0,	− 6,	8	− 0,564	+ 0,793	1,	− 5,	9	+ 0,002	+ 0,002
− 1,	− 5,	8	+ 0,868	− 1,089	0,	− 4,	9	− 0,002 x	+ 0,008 x
1,	− 7,	8	− 0,317	+ 0,290	0,	− 6,	10	− 0,049	− 0,001
0,	− 6,	8	− 1,053 x	− 0,830 x	− 1,	− 5,	10	+ 0,069	+ 0,008
0,	− 5,	8	− 0,162	− 0,203	1,	− 7,	10	− 0,019	− 0,009
− 1,	− 4,	8	+ 0,205	+ 0,308	0,	− 6,	10	+ 0,007 x	− 0,065 x
1,	− 6,	8	− 0,037	− 0,109	0,	− 5,	10	+ 0,002	− 0,007
0,	− 5,	8	+ 0,289 x	− 0,201 x	− 1,	− 4,	10	− 0,00494	+ 0,00978
0,	− 4,	8	+ 0,041	− 0,018	1,	− 6,	10	+ 0,003	0,000
− 1,	− 3,	8	− 0,058	+ 0,014	0,	− 5,	10	+ 0,009 x	+ 0,004 x
1,	− 5,	8	+ 0,018	+ 0,004	0,	− 4,	10	+ 0,00072	+ 0,00053
0,	− 4,	8	+ 0,015 x	+ 0,053 x	− 1,	− 3,	10	− 0,00080	− 0,00091
0,	− 3,	8	+ 0,001	+ 0,005	1,	− 5,	10	+ 0,00005	+ 0,00042
− 1,	− 2,	8	+ 0,002	− 0,006	0,	− 4,	10	− 0,00078 x	+ 0,00077 x

Digitized by Google

$n\zeta = n\tau +$

κ, i, i′	sin	cos
1, −1, 0	− 14″,261	− 0″,01625
2, −2, 0	− 0,001	− 0,00206
0, 0, 0	. . . .	+ 14,262 x
0, 1, 0	+ 1,793	+ 1,867
−1, 2, 0	+ 0,047	− 0,173
1, 0, 0	+ 1,01786 nt	− 1,13539 nt
2, −1, 0	− 0,173	0,000
0, 1, 0	− 0,505 x	+ 0,920 x
0, 2, 0	+ 0,042	− 0,046
−1, 3, 0	0,000	− 0,002
1, 1, 0	− 0,049	+ 0,083
2, 0, 0	+ 0,01224 nt	− 0,01366 nt
0, 2, 0	+ 0,027 x	+ 0,025 x
3, 0, 0	+ 0,00029 nt	− 0,00033 nt
0, −3, 1	+ 0,025	− 0,032
−1, −2, 1	− 0,037	+ 0,043
−2, −1, 1	− 0,010	+ 0,022
1, −4, 1	+ 0,010	− 0,008
0, −3, 1	− 0,034 x	− 0,034 x
0, −2, 1	+ 0,362	− 0,754
−1, −1, 1	− 0,839	+ 1,855
−2, 0, 1	+ 0,078	+ 0,394
1, −3, 1	+ 0,156	− 0,114
0, −2, 1	− 0,552 x	− 0,447 x
0, −1, 1	+ 9,584	+ 48,272
−1, 0, 1	+ 6,499	+ 32,814
−2, 1, 1	+ 0,012	− 0,008
1, −2, 1	− 0,509	− 2,224
2, −3, 1	+ 0,002	− 0,001
0, −1, 1	+ 12,079 x	− 2,286 x
0, 0, 1	− 7,007	+ 3,889
−1, 1, 1	+ 0,985	− 0,656
1, −1, 1	− 2,392	+ 1,150
2, −2, 1	− 0,006	− 0,027
0, 0, 1	0 x	0 x
0, 1, 1	+ 0,167	+ 0,082
−1, 2, 1	− 0,008	− 0,014
1, 0, 1	− 0,395	− 0,156
2, −1, 1	− 0,029	+ 0,014
0, 1, 1	− 0,011 x	+ 0,074 x
0, −4, 2	+ 0″,021	+ 0″,023
−1, −3, 2	− 0,023	− 0,038
−2, −2, 2	− 0,001	− 0,016
−3, −1, 2	+ 0,071	− 0,031
1, −5, 2	− 0,010	+ 0,020
0, −4, +2	+ 0,059 x	+ 0,013 x
0, −3, 2	− 0,261	+ 0,916
−1, −2, 2	+ 0,052	− 1,362
−2, −1, 2	+ 2,942	− 1,284
1, −4, 2	− 0,273	+ 0,306
0, −3, 2	+ 1,106 x	+ 0,806 x
0, −2, 2	− 61,010	+ 26,702
−1, −1, 2	+245,000	−106,881
−2, 0, 2	+ 0,073	+ 0,008
1, −3, 2	− 5,613	+ 2,429
2, −4, 2	− 0,003	+ 0,004
0, −2, 2	+ 16,433 x	+ 37,585 x
0, −1, 2	+115,826	+ 4,483
−1, 0, 2	+ 6,060	+ 0,694
1, −2, 2	+ 1,261	− 1,229
2, −3, 2	− 0,067	+ 0,029
0, −1, 2	− 1,088 x	− 19,022 x
0, 0, 2	− 0,293	+ 0,422
−1, 1, 2	+ 0,030	− 0,095
1, −1, 2	− 1,017	+ 0,961
2, −2, 2	+ 0,015	− 0,015
0, 0, 2	0 x	0 x
0, 1, 2	+ 0,015	+ 0,002
−1, 2, 2	− 0,001	− 0,001
1, 0, 2	− 0,024	0,000
2, −1, 2	− 0,012	+ 0,012
0, 1, 2	+ 0,001 x	+ 0,006 x
0, −5, 3	− 0,024	+ 0,019
−1, −4, 3	+ 0,036	− 0,023
−2, −3, 3	+ 0,013	+ 0,001
−3, −2, 3	+ 0,008	+ 0,010
1, −6, 3	− 0,020	− 0,003
0, −5, 3	+ 0,002 x	+ 0,057 x
0, −4, 3	− 0,771	− 0,105
−1, −3, 3	+ 1,093	+ 0,051

Digitized by Google

κ	i	i'	sin	cos
−2,	−2,	3	+ 0″,307	+ 0″,427
1,	−5,	3	− 0,271	− 0,140
0,	−4,	3	− 0,397 *x*	+ 0,972 *x*
0,	−3,	3	− 14,267	− 19,690
−1,	−2,	3	+ 25,578	+ 35,617
−2,	−1,	3	− 0,385	+ 0,322
1,	−4,	3	− 2,056	− 2,773
2,	−5,	3	− 0,003	− 0,002
0,	−3,	3	− 14,934 *x*	+ 10,991 *x*
0,	−2,	3	− 16,970	+ 21,121
−1,	−1,	3	− 32,105	+ 43,486
−2,	0,	3	+ 0,009	− 0,003
1,	−3,	3	− 0,630	+ 1,520
2,	−4,	3	− 0,025	− 0,033
0,	−2,	3	+ 10,311 *x*	+ 7,967 *x*
0,	−1,	3	+ 11,450	− 7,309
−1,	0,	3	+ 0,724	− 0,266
1,	−2,	3	+ 0,223	− 0,472
2,	−3,	3	− 0,007	+ 0,018
0,	−1,	3	+ 1,500 *x*	+ 3,095 *x*
0,	0,	3	− 0,008	+ 0,045
−1,	1,	3	− 0,003	− 0,010
1,	−1,	3	+ 0,082	− 0,173
2,	−2,	3	+ 0,003	− 0,006
0,	0,	3	0 *x*	0 *x*
0,	−6,	4	− 0,018	− 0,018
−1,	−5,	4	+ 0,023	+ 0,029
−2,	−4,	4	+ 0,001	+ 0,009
1,	−7,	4	− 0,002	− 0,016
0,	−6,	4	− 0,044 *x*	+ 0,013 *x*
0,	−5,	4	− 0,023	− 0,530
−1,	−4,	4	+ 0,062	+ 0,745
−2,	−3,	4	− 0,125	+ 0,139
1,	−6,	4	+ 0,047	− 0,201
0,	−5,	4	− 0,700 *x*	− 0,110 *x*
0,	−4,	4	+ 6,691	− 7,517
−1,	−3,	4	− 10,393	+ 11,558
−2,	−2,	4	+ 0,292	+ 0,139
1,	−5,	4	+ 1,191	− 1,392
2,	−6,	4	+ 0,001	− 0,002
0,	−4,	4	− 6,581 *x*	− 5,705 *x*
0,	−3,	4	− 9″,422	− 4″,827
−1,	−2,	4	+ 24,338	+ 11,550
−2,	−1,	4	− 0,003	+ 0,034
1,	−4,	4	− 1,191	− 0,343
2,	−5,	4	+ 0,014	− 0,016
0,	−3,	4	− 3,120 *x*	+ 6,409 *x*
0,	−2,	4	− 2,109	+ 13,297
−1,	−1,	4	− 0,257	+ 2,804
1,	−3,	4	+ 0,127	+ 0,320
2,	−4,	4	− 0,014	− 0,004
0,	−2,	4	+ 3,898 *x*	+ 0,524 *x*
0,	−1,	4	+ 0,025	− 0,126
−1,	0,	4	+ 0,059	− 0,054
1,	−2,	4	− 0,005	− 0,144
2,	−3,	4	+ 0,001	+ 0,004
0,	−1,	4	+ 0,113 *x*	+ 0,112 *x*
0,	−6,	5	+ 0,324	− 0,076
−1,	−5,	5	− 0,466	+ 0,119
−2,	−4,	5	− 0,068	− 0,038
1,	−7,	5	+ 0,132	− 0,002
0,	−6,	5	− 0,033 *x*	− 0,447 *x*
0,	−5,	5	+ 3,879	+ 2,158
−1,	−4,	5	− 5,657	− 3,190
−2,	−3,	5	− 0,025	+ 0,099
−3,	−2,	5	− 0,043	+ 0,004
1,	−6,	5	+ 0,843	+ 0,435
2,	−7,	5	+ 0,002	0,000
0,	−5,	5	+ 1,951 *x*	− 3,692 *x*
0,	−4,	5	+ 1,322	− 4,875
−1,	−3,	5	− 2,038	+ 8,292
−2,	−2,	5	− 1,811	+ 0,149
1,	−5,	5	+ 0,090	− 0,819
2,	−6,	5	+ 0,010	+ 0,005
0,	−4,	5	− 3,937 *x*	− 0,980 *x*
0,	−3,	5	− 3,434	+ 0,085
−1,	−2,	5	− 150,786	+ 12,390
1,	−5,	5	− 0,276	+ 0,111
2,	−5,	5	+ 0,001	− 0,010
0,	−3,	5	+ 0,105 *x*	+ 1,911 *x*
0,	−2,	5	+ 424,776	+ 989,265
−1,	−1,	5	+ 0,10095	+ 0,20111
−2,	0,	5	+ 0,00005	− 0,00010

Digitized by Google

κ i i'	sin	cos
1, — 3, 5	+ 0,06317	+ 0,03060
2, — 4, 5	— 0,00333	+ 0,00133
3, — 5, 5	+ 0,00002	— 0,00024
0, — 2, 5	— 13,45628 x	+ 5,75083 x
0, — 1, 5	— 0,006	— 0,001
— 1, 0, 5	+ 0,004	— 0,008
1, — 2, 5	+ 0,278	+ 0,393
0, — 1, 5	+ 0,010 x	+ 0,005 x
0, — 7, 6	+ 0,085	+ 0,183
— 1, — 6, 6	— 0,123	— 0,259
— 2, — 5, 6	+ 0,010	— 0,033
1, — 8, 6	+ 0,021	+ 0,078
0, — 7, 6	+ 0,261 x	— 0,081 x
0, — 6, 6	— 0,558	+ 1,945
— 1, — 5, 6	+ 0,811	— 2,777
— 2, — 4, 6	— 0,047	— 0,002
1, — 7, 6	— 0,115	+ 0,471
0, — 6, 6	+ 1,959 x	+ 0,505 x
0, — 5, 6	+ 2,574	+ 0,135
— 1, — 4, 6	— 3,910	— 0,128
— 2, — 3, 6	+ 0,012	+ 0,039
1, — 6, 6	+ 0,517	— 0,035
2, — 7, 6	— 0,001	+ 0,006
0, — 5, 6	+ 0,070 x	— 2,308 x
0, — 4, 6	— 0,361	— 1,600
— 1, — 3, 6	+ 0,909	+ 3,282
— 2, — 2, 6	— 0,008	+ 0,005
1, — 5, 6	— 0,110	— 0,203
0, — 4, 6	— 1,151 x	+ 0,298 x
0, — 3, 6	— 1,083	+ 0,656
— 1, — 2, 6	— 0,632	+ 0,449
1, — 4, 6	— 0,031	+ 0,054
0, — 3, 6	+ 0,274 x	+ 0,421 x
0, — 2, 6	+ 0,072	+ 0,038
— 1, — 1, 6	+ 0,018	+ 0,011
1, — 3, 6	+ 0,016	— 0,005
0, — 2, 6	— 0,034 x	+ 0,046 x
0, — 7, 7	— 0,932	— 0,050
— 1, — 6, 7	+ 1,328	+ 0,069
— 2, — 5, 7	— 0,004	— 0,023
1, — 8, 7	— 0,252	+ 0,005
0, — 7, 7	— 0,011 x	+ 0,987 x
0, — 6, 7	+ 0,221	+ 1,338
— 1, — 5, 7	— 0,354	— 1,944
— 2, — 4, 7	— 0,016	+ 0,008
1, — 7, 7	+ 0,084	+ 0,300
2, — 8, 7	— 0,003	0,000
0, — 6, 7	+ 1,289 x	— 0,245 x
0, — 5, 7	+ 0,825	— 0,375
— 1, — 4, 7	— 1,308	+ 0,664
— 2, — 3, 7	+ 0,017	+ 0,014
1, — 6, 7	+ 0,132	— 0,101
2, — 7, 7	+ 0,001	+ 0,004
0, — 5, 7	— 0,336 x	— 0,682 x
0, — 4, 7	— 0,314	— 0,354
— 1, — 3, 7	+ 1,468	+ 1,435
1, — 5, 7	— 0,047	— 0,022
2, — 6, 7	+ 0,002	— 0,001
0, — 4, 7	— 0,211 x	+ 0,203 x
0, — 3, 7	— 0,667	+ 1,276
— 1, — 2, 7	— 0,023	+ 0,051
1, — 4, 7	+ 0,004	+ 0,012
0, — 3, 7	+ 0,201 x	+ 0,100 x
0, — 8, 8	— 0,081	— 0,432
— 1, — 7, 8	+ 0,116	+ 0,613
— 2, — 6, 8	+ 0,011	— 0,005
1, — 9, 8	— 0,035	— 0,123
0, — 8, 8	— 0,469 x	+ 0,113 x
0, — 7, 8	— 0,671	+ 0,270
— 1, — 6, 8	+ 0,953	— 0,400
— 2, — 5, 8	— 0,006	— 0,007
1, — 8, 8	— 0,163	+ 0,085
0, — 7, 8	+ 0,293 x	+ 0,678 x
0, — 6, 8	+ 0,311	+ 0,426
— 1, — 5, 8	— 0,488	— 0,613
— 2, — 4, 8	— 0,003	+ 0,005
1, — 7, 8	+ 0,084	+ 0,077
2, — 8, 8	— 0,002	+ 0,001
0, — 6, 8	+ 0,379 x	— 0,299 x
0, — 5, 8	+ 0,155	— 0,205
— 1, — 4, 8	— 0,264	+ 0,395
— 2, — 3, 8	— 0,003	— 0,001
1, — 6, 8	+ 0,113	— 0,039
0, — 5, 8	— 0,163 x	— 0,113 x

Digitized by Google

κ	i	i'	sin	cos
0,	− 4,	8	− 0″,141	− 0″,048
− 1,	− 3,	8	− 0,262	− 0,063
1,	− 5,	8	− 0,010	+ 0,002
0,	− 4,	8	− 0,019 *x*	+ 0,068 *x*
0,	− 3,	8	+ 0,014	+ 0,084
− 1,	− 2,	8	+ 0,002	+ 0,005
1,	− 4,	8	+ 0,003	+ 0,003
0,	− 3,	8	− 0,024 *x*	+ 0,002 *x*
0,	− 8,	9	− 0,220	− 0,318
− 1,	− 7,	9	+ 0,317	+ 0,449
− 2,	− 6,	9	+ 0,003	− 0,004
1,	− 9,	9	− 0,069	− 0,081
0,	− 8,	9	− 0,332 *x*	+ 0,243 *x*
0,	− 7,	9	− 0,202	+ 0,230
− 1,	− 6,	9	+ 0,275	− 0,343
− 2,	− 5,	9	− 0,003	− 0,001
1,	− 8,	9	− 0,035	+ 0,064
0,	− 7,	9	+ 0,234 *x*	+ 0,193 *x*
0,	− 6,	9	+ 0,142	+ 0,068
− 1,	− 5,	8	− 0,227	− 0,094
1,	− 7,	9	+ 0,031	+ 0,005
0,	− 6,	9	+ 0,054 *x*	− 0,125 *x*
0,	− 5,	9	+ 0″,010	− 0″,067
− 1,	− 4,	9	− 0,011	+ 0,178
1,	− 6,	9	− 0,003	− 0,008
0,	− 5,	9	− 0,046 *x*	− 0,004 *x*
0,	− 4,	9	− 0,074	+ 0,014
− 1,	− 3,	9	− 0,013	+ 0,005
1,	− 5,	9	− 0,001	− 0,001
0,	− 4,	9	+ 0,005 *x*	+ 0,021 *x*
0,	− 6,	10	+ 0,042	+ 0,003
− 1,	− 5,	10	− 0,071	+ 0,008
− 2,	− 4,	10	− 0,002	− 0,004
1,	− 7,	10	+ 0,007	− 0,003
0,	− 6,	10	− 0,004 *x*	− 0,033 *x*
0,	− 5,	10	− 0,006	− 0,017
− 1,	− 4,	10	− 0,184	− 0,364
1,	− 6,	10	− 0,002	0,000
0,	− 5,	10	− 0,009 *x*	+ 0,004 *x*
0,	− 4,	10	− 1,036	+ 1,058
− 1,	− 3,	10	− 0,00078	+ 0,00089
1,	− 5,	10	− 0,00005	+ 0,00043
0,	− 4,	10	− 0,02894 *x*	− 0,02857 *x*

Digitized by Google

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = 1 +$$

κ i i'	cos	sin
0, 0, 0	+ 14,262	....
1, —1, 0	— 14,261	+ 0,01625
2, —2, 0	— 0,002	+ 0,00412
0, 1, 0	+ 0,920	— 0,505
—1, 2, 0	— 0,047	— 0,173
1, 0, 0	+ 1,01786 *nt*	+ 1,13539 *nt*
2, —1, 0	— 0,346	0,000
	+ 0,527	— 0,678
	(+ 1,662	+ 1,694)
0, 2, 0	+ 0,025	+ 0,027
—1, 3, 0	0,000	— 0,002
1, 1, 0	— 0,049	— 0,083
2, 0, 0	+ 0,02448 *nt*	+ 0,02732 *nt*
	— 0,024	— 0,058
	(— 0,005	+ 0,035)
3, 0, 0	+ 0,00087 *nt*	+ 0,00099 *nt*
0, —3, 1	— 0,034	— 0,034
—1, —2, 1	+ 0,037	+ 0,043
—2, —1, 1	+ 0,020	+ 0,044
1, —4, 1	+ 0,010	+ 0,008
	+ 0,033	+ 0,061
	(— 0,013	+ 0,023)
0, —2, 1	— 0,447	— 0,552
—1, —1, 1	+ 0,839	+ 1,855
—2, 0, 1	— 0,156	+ 0,788
1, —3, 1	+ 0,156	+ 0,114
	+ 0,392	+ 2,205
	(— 0,245	+ 1,380)
0, —1, 1	— 2,286	+ 12,079
—1, 0, 1	— 6,490	+ 32,814
—2, 1, 1	— 0,024	— 0,016
1, —2, 1	— 0,509	+ 2,224
2, —3, 1	+ 0,004	+ 0,002
	— 9,305	+ 47,103
	(+ 15,578	— 78,858)

κ i i'	cos	sin
0, 0, 1	0,000	0,000
—1, 1, 1	— 0,985	— 0,656
1, —1, 1	— 2,392	— 1,150
2, —2, 1	— 0,012	+ 0,054
	— 3,389	— 1,752
	(— 8,416	+ 4,350)
0, 1, 1	+ 0,074	— 0,011
—1, 2, 1	+ 0,008	— 0,014
1, 0, 1	— 0,395	+ 0,156
2, —1, 1	— 0,058	— 0,028
	— 0,371	+ 0,103
	(— 0,265	— 0,073)
0, —4, 2	+ 0,013	+ 0,059
—1, —3, 2	+ 0,023	— 0,038
—2, —2, 2	+ 0,002	— 0,032
—3, —1, 2	— 0,213	— 0,093
1, —5, 2	— 0,010	— 0,020
	— 0,185	— 0,124
	(+ 0,058	— 0,039)
0, —3, 2	+ 0,806	+ 1,106
—1, —2, 2	— 0,052	— 1,362
—2, —1, 2	— 5,884	— 2,568
1, —4, 2	— 0,273	— 0,306
	— 5,403	— 3,130
	(+ 2,462	— 1,426)
0, —2, 2	+ 37,585	+ 16,433
—1, —1, 2	— 245,000	— 106,881
—2, 0, 2	— 0,146	+ 0,016
1, —3, 2	— 5,613	— 2,429
2, —4, 2	— 0,006	— 0,008
	— 213,180	— 92,869
	(+ 178,452	— 77,742)
0, —1, 2	— 19,022	— 1,088
—1, 0, 2	— 6,060	+ 0,694
1, —2, 2	+ 1,261	+ 1,229
2, —3, 2	— 0,134	— 0,058
	— 23,955	+ 0,777
	(+ 123,080	+ 3,992)

κ	i	i'	cos	sin
0,	0,	2	0,000	0,000
− 1,	1,	2	− 0,030	− 0,095
1,	− 1,	2	− 1,017	− 0,961
2,	− 2,	2	+ 0,030	+ 0,030
			− 1,017	− 1,026
			(− 1,263	+ 1,275)
0,	1,	2	+ 0,006	+ 0,001
− 1,	2,	2	+ 0,001	− 0,001
1,	0,	2	− 0,024	0,000
2,	− 1,	2	− 0,024	− 0,024
			− 0,041	− 0,024
			(− 0,023	+ 0,013)
0,	− 5,	3	+ 0,057	+ 0,002
− 1,	− 4,	3	− 0,036	− 0,023
− 2,	− 3,	3	− 0,026	+ 0,002
− 3,	− 2,	3	− 0,024	+ 0,030
1,	− 6,	3	− 0,020	+ 0,003
			− 0,049	+ 0,014
			(+ 0,013	+ 0,004)
0,	− 4,	3	+ 0,972	− 0,397
− 1,	− 3,	3	− 1,093	+ 0,051
− 2,	− 2,	3	− 0,614	+ 0,854
1,	− 5,	3	− 0,271	+ 0,140
			− 1,006	− 0,648
			(+ 0,360	+ 0,232)
0,	− 3,	3	+ 10,991	− 14,934
− 1,	− 2,	3	− 25,578	+ 35,617
− 2,	− 1,	3	+ 0,770	+ 1,044
1,	− 4,	3	− 2,058	+ 2,773
2,	− 5,	3	− 0,006	+ 0,004
			− 15,881	+ 24,504
			(+ 8,863	+ 13,674)
0,	− 2,	3	+ 7,967	+ 10,311
− 1,	− 1,	3	+ 32,105	+ 43,486
− 2,	0,	3	− 0,018	− 0,006
1,	− 3,	3	− 0,630	− 1,520
2,	− 4,	3	− 0,050	+ 0,066
			+ 39,374	+ 52,337
			(− 49,719	+ 66,085)

κ	i	i'	cos	sin
0,	− 1,	3	+ 3,095	+ 1,500
− 1,	0,	3	− 0,724	− 0,266
1,	− 2,	3	+ 0,223	+ 0,472
2,	− 3,	3	− 0,014	− 0,036
			+ 2,580	+ 1,670
			(+ 12,400	− 8,026)
0,	0,	3	0,000	0,000
− 1,	1,	3	+ 0,003	− 0,010
1,	− 1,	3	+ 0,082	+ 0,173
2,	− 2,	3	+ 0,006	+ 0,012
			+ 0,091	+ 0,175
			(+ 0,075	− 0,145)
0,	− 6,	4	+ 0,013	− 0,044
− 1,	− 5,	4	− 0,023	+ 0,029
− 2,	− 4,	4	− 0,002	+ 0,018
1,	− 7,	4	− 0,002	+ 0,016
			− 0,014	+ 0,019
			(+ 0,003	+ 0,004)
0,	− 5,	4	− 0,110	− 0,700
− 1,	− 4,	4	− 0,062	+ 0,745
− 2,	− 3,	4	+ 0,250	+ 0,278
1,	− 6,	4	+ 0,047	+ 0,201
			+ 0,125	+ 0,524
			(− 0,037	+ 0,155)
0,	− 4,	4	− 5,705	− 6,581
− 1,	− 3,	4	+ 10,393	+ 11,558
− 2,	− 2,	4	− 0,584	+ 0,278
1,	− 5,	4	+ 1,191	+ 1,392
2,	− 6,	4	+ 0,002	+ 0,004
			+ 5,297	+ 6,651
			(− 2,217	+ 2,784)
0,	− 3,	4	+ 6,904	− 3,120
− 1,	− 2,	4	− 24,338	+ 11,550
− 2,	− 1,	4	+ 0,006	+ 0,068
1,	− 4,	4	− 1,191	+ 0,343
2,	− 5,	4	+ 0,028	+ 0,032
			− 19,086	+ 8,873
			(+ 13,727	+ 6,387)

Digitized by Google

κ	i	i'	cos	sin
0,	− 2,	4	+ 0″,524	+ 3″,898
− 1,	− 1,	4	+ 0,257	+ 2,804
1,	− 3,	4	+ 0,127	− 0,320
2,	− 4,	4	− 0,028	+ 0,008
			+ 0,880	+ 6,390
			(− 2,261	+ 16,426)
0,	− 1,	4	+ 0,112	+ 0,113
− 1,	0,	4	− 0,059	− 0,054
1,	− 2,	4	− 0,005	+ 0,144
2,	− 3,	4	+ 0,002	− 0,008
			+ 0,050	+ 0,195
			(+ 0,082	− 0,319)
0,	− 6,	5	− 0,447	− 0,033
− 1,	− 5,	5	+ 0,466	+ 0,119
− 2,	− 4,	5	+ 0,136	− 0,076
1,	− 7,	5	+ 0,132	+ 0,002
			+ 0,287	+ 0,012
			(− 0,072	+ 0,003)
0,	− 5,	5	− 3,692	+ 1,951
− 1,	− 4,	5	+ 5,657	− 3,190
− 2,	− 3,	5	+ 0,050	+ 0,198
− 3,	− 2,	5	+ 0,129	+ 0,012
1,	− 6,	5	+ 0,843	− 0,435
2,	− 7,	5	+ 0,004	0,000
			+ 2,991	− 1,464
			(− 1,002	− 0,490)
0,	− 4,	5	− 0,980	− 3,937
− 1,	− 3,	5	− 12,038	+ 8,292
− 2,	− 2,	5	+ 3,622	+ 0,298
1,	− 5,	5	+ 0,090	+ 0,819
2,	− 6,	5	+ 0,020	− 0,010
			+ 4,790	+ 5,462
			(− 2,411	+ 2,750)
0,	− 3,	5	+ 1,911	+ 0,105
− 1,	− 2,	5	+ 150,786	+ 12,390
1,	− 4,	5	− 0,276	− 0,111
2,	− 5,	5	+ 0,002	+ 0,020
			+ 152,423	+ 12,404
			(− 154,497	+ 12,573)

κ	i	i'	cos	sin
0,	− 2,	5	+ 5″,75083	− 13″,45628
− 1,	− 1,	5	− 0,10095	+ 0,20111
− 2,	− 0,	5	− 0,00010	− 0,00020
1,	− 3,	5	+ 0,06317	− 0,03060
2,	− 4,	5	− 0,00666	− 0,00266
3,	− 5,	5	+ 0,00006	+ 0,00072
			+ 5,70635	− 13,28791
			(+ 424,930	+ 989,500)
0,	− 1,	5	+ 0,005	+ 0,010
− 1,	0,	5	− 0,004	+ 0,008
1,	− 2,	5	+ 0,278	− 0,393
			+ 0,277	− 0,391
			(+ 0,273	+ 0,386)
0,	− 7,	6	− 0,081	+ 0,261
− 1,	− 6,	6	+ 0,123	− 0,259
− 2,	− 5,	6	− 0,020	− 0,066
1,	− 8,	6	+ 0,021	− 0,078
			+ 0,043	− 0,142
			(− 0,009	− 0,031)
0,	− 6,	6	+ 0,505	+ 1,959
− 1,	− 5,	6	− 0,811	− 2,777
− 2,	− 4,	6	+ 0,094	− 0,004
1,	− 7,	6	− 0,115	− 0,471
			− 0,327	− 1,293
			(+ 0,091	− 0,361)
0,	− 5,	6	− 2,308	+ 0,070
− 1,	− 4,	6	+ 3,910	− 0,128
− 2,	− 3,	6	− 0,002	+ 0,078
1,	− 6,	6	+ 0,517	+ 0,035
2,	− 7,	6	− 0,002	− 0,012
			+ 2,095	+ 0,043
			(− 0,812	+ 0,017)
0,	− 4,	6	+ 0,298	− 1,151
− 1,	− 3,	6	− 0,909	+ 3,282
− 2,	− 2,	6	+ 0,016	+ 0,010
1,	− 5,	6	− 0,110	+ 0,203
			− 0,705	+ 2,344
			(+ 0,445	+ 1,480)

Digitized by Google

κ, i, i′	cos	sin
0, −3, 6	+ 0″,421	+ 0″,274
−1, −2, 6	+ 0,632	+ 0,449
1, −4, 6	− 0,031	− 0,054
	+ 1,022	+ 0,669
	(− 1,750	+ 1,146)
0, −2, 6	+ 0,046	− 0,034
−1, −1, 6	− 0,018	+ 0,011
1, −3, 6	+ 0,016	+ 0,005
	+ 0,044	− 0,018
	(+ 0,106	+ 0,043)
0, −7, 7	+ 0,987	− 0,011
−1, −6, 7	− 1,328	+ 0,069
−2, −5, 7	+ 0,008	− 0,046
1, −8, 7	− 0,252	− 0,005
	− 0,585	+ 0,007
	(+ 0,140	+ 0,002)
0, −6, 7	− 0,245	+ 1,289
−1, −5, 7	+ 0,354	− 1,944
−2, −4, 7	+ 0,032	+ 0,016
1, −7, 7	+ 0,084	− 0,300
2, −8, 7	− 0,006	0,000
	+ 0,219	− 0,939
	(− 0,069	− 0,295)
0, −5, 7	− 0,682	− 0,336
−1, −4, 7	+ 1,308	+ 0,664
−2, −3, 7	− 0,034	+ 0,028
1, −6, 7	+ 0,132	+ 0,101
2, −7, 7	+ 0,002	− 0,008
	+ 0,726	+ 0,449
	(− 0,333	+ 0,206)
0, −4, 7	+ 0,203	− 0,211
−1, −3, 7	− 1,468	+ 1,435
1, −5, 7	− 0,047	+ 0,022
2, −6, 7	+ 0,004	+ 0,002
	− 1,308	+ 1,248
	(+ 1,308	+ 1,057)
0, −3, 7	+ 0,100	+ 0,201
−1, −2, 7	+ 0,023	+ 0,051
1, −4, 7	+ 0,004	− 0,012
	+ 0,127	+ 0,240
	(− 0,701	+ 1,324)

κ, i, i′	cos	sin
0, −8, 8	+ 0″,113	− 0″,469
−1, −7, 8	− 0,116	+ 0,613
−2, −6, 8	− 0,022	− 0,010
1, −9, 8	− 0,035	+ 0,123
	− 0,060	+ 0,257
	(+ 0,012	+ 0,054)
0, −7, 8	+ 0,678	+ 0,293
−1, −7, 8	− 0,953	− 0,400
−2, −5, 8	+ 0,012	− 0,014
1, −8, 8	− 0,163	− 0,085
	− 0,426	− 0,206
	(+ 0,113	− 0,055)
0, −6, 8	− 0,299	+ 0,379
−1, −5, 8	+ 0,488	− 0,613
−2, −4, 8	+ 0,006	+ 0,010
1, −7, 8	+ 0,084	− 0,077
2, −8, 8	− 0,004	− 0,002
	+ 0,275	− 0,303
	(− 0,099	− 0,109)
0, −5, 8	− 0,113	− 0,163
−1, −4, 8	+ 0,264	+ 0,395
−2, −3, 8	+ 0,006	− 0,002
1, −6, 8	+ 0,013	+ 0,039
	+ 0,170	+ 0,269
	(− 0,096	+ 0,151)
0, −4, 8	+ 0,068	− 0,019
−1, −3, 8	+ 0,262	− 0,063
1, −5, 8	− 0,010	− 0,002
	+ 0,320	− 0,084
	(− 0,411	− 0,108)
0, −3, 8	+ 0,002	− 0,024
−1, −2, 8	− 0,002	+ 0,005
1, −4, 8	+ 0,003	− 0,003
	+ 0,003	− 0,022
	(+ 0,014	+ 0,099)
0, −8, 9	+ 0,243	− 0,332
−1, −7, 9	− 0,317	+ 0,449
−2, −6, 9	− 0,006	− 0,008
1, −9, 9	− 0,069	+ 0,081
	− 0,149	+ 0,190
	(+ 0,034	+ 0,043)

Digitized by Google

κ i i′	sin	cos	κ i i′	sin	cos
0, − 7, 9	+ 0″,193	+ 0″,234	0, − 6, 10	− 0″,033	− 0″,004
− 1, − 6, 9	− 0,275	− 0,343	− 1, − 5, 10	+ 0,071	+ 0,008
− 2, − 5, 9	+ 0,006	− 0,002	− 2, − 4, 10	+ 0,004	− 0,008
1, − 8, 9	− 0,035	− 0,064	1, − 7, 10	+ 0,007	+ 0,003
	− 0,111	− 0,175		+ 0,049	− 0,001
	(+ 0,033	− 0,052)		(− 0,025	− 0,001)
0, − 6, 9	− 0,125	+ 0,054	0, − 5, 10	+ 0,004	− 0,009
− 1, − 5, 9	+ 0,227	− 0,094	− 1, − 4, 10	+ 0,184	− 0,364
1, − 7, 9	+ 0,031	− 0,005	1, − 6, 10	− 0,002	0,000
	+ 0,133	− 0,045		+ 0,186	− 0,373
	(− 0,056	− 0,019)		(− 0,191	− 0,383)
0, − 5, 9	− 0,004	− 0,046	0, − 4, 10	− 0,02857	− 0,02894
− 1, − 4, 9	+ 0,011	+ 0,178	− 1, − 3, 10	+ 0,00078	+ 0,00089
1, − 6, 9	− 0,003	+ 0,008	1, − 5, 10	− 0,00005	− 0,00043
	+ 0,004	+ 0,140		− 0,02784	− 0,02848
	(− 0,003	+ 0,102)		(− 1,036	+ 1,060)
0, − 4, 9	+ 0,021	+ 0,005			
− 1, − 3, 9	+ 0,013	+ 0,005			
1, − 5, 9	− 0,001	+ 0,001			
	+ 0,033	+ 0,011			
	(− 0,088	+ 0,029)			

Digitized by Google

$$+\frac{1}{n}\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} =$$

ϰ, i, i'	sin	cos
1, — 1, 0	+ 14,261″	+ 0,01625″
2, — 2, 0	+ 0,004	+ 0,00824
	. . . .	+ 0,02449
— 1, 2, 0	+ 0,047	+ 0,173
1, 0, 0	— 1,01786 *nt*	+ 1,13539 *nt*
2, — 1, 0	+ 0,692	0,000
	+ 0,645	+ 0,173
— 1, 3, 0	0,000	+ 0,002
1, 1, 0	+ 0,049	— 0,083
2, 0, 0	— 0,04896 *nt*	+ 0,05464 *nt*
	+ 0,049	— 0,081
3, 0, 0	— 0,00261 *nt*	+ 0,00297 *nt*
— 1, — 2, 1	+ 0,037	— 0,043
— 2, — 1, 1	+ 0,040	— 0,088
1, — 4, 1	— 0,010	+ 0,008
	+ 0,067	— 0,123
— 1, — 1, 1	+ 0,839	— 1,855
— 2, 0, 1	— 0,312	— 1,576
1, — 3, 1	— 0,156	+ 0,114
	+ 0,371	— 3,317
— 1, 0, 1	— 6,490	— 32,814
— 2, 1, 1	— 0,048	+ 0,032
1, — 2, 1	+ 0,509	+ 2,224
2, — 3, 1	— 0,008	+ 0,004
	— 6,037	— 30,554
— 1, 1, 1	— 0,985	+ 0,656
1, — 1, 1	+ 2,392	— 1,150
2, — 2, 1	+ 0,024	+ 0,108
	+ 1,431	— 0,386
— 1, 2, 1	+ 0,008	+ 0,014
1, 0, 1	+ 0,395	+ 0,156
2, — 1, 1	+ 0,116	— 0,056
	+ 0,519	+ 0,114
— 1, — 3, 2	+ 0,023	+ 0,038
— 2, — 2, 2	+ 0,004	+ 0,064
— 3, — 1, 2	— 0,639	+ 0,279
1, — 5, 2	+ 0,010	— 0,020
	— 0,602	+ 0,361

ϰ, i, i'	sin	cos
— 1, — 2, 2	— 0,052″	+ 1,362″
— 2, — 1, 2	— 11,768	+ 5,136
1, — 4, 2	+ 0,273	— 0,306
	— 11,547	+ 6,192
— 1, — 1, 2	— 245,000	+ 106,881
— 2, 0, 2	— 0,292	— 0,032
1, — 3, 2	+ 5,613	— 2,429
2, — 4, 2	+ 0,012	— 0,016
	— 239,667	+ 104,404
— 1, 0, 2	— 6,060	— 0,674
1, — 2, 2	— 1,261	+ 1,229
2, — 3, 2	+ 0,268	— 0,116
	— 7,053	+ 0,419
— 1, 1, 2	— 0,030	+ 0,095
1, — 1, 2	+ 1,017	— 0,961
2, — 2, 2	— 0,060	+ 0,060
	+ 0,927	— 0,806
— 1, 2, 2	+ 0,001	+ 0,001
1, 0, 2	+ 0,024	0,000
2, — 1, 2	+ 0,048	— 0,048
	+ 0,073	— 0,047
— 1, — 4, 3	— 0,036	+ 0,023
— 2, — 3, 3	— 0,052	— 0,004
— 3, — 2, 3	— 0,072	— 0,090
1, — 6, 3	+ 0,020	+ 0,003
	— 0,140	— 0,068
— 1, — 3, 3	— 1,093	— 0,051
— 2, — 2, 3	— 1,228	— 1,708
1, — 5, 3	+ 0,271	+ 0,140
	— 2,050	— 1,619
— 1, — 2, 3	— 25,578	— 35,617
— 2, — 1, 3	+ 1,540	— 2,068
1, — 4, 3	+ 2,058	+ 2,773
2, — 5, 3	+ 0,012	+ 0,008
	— 21,968	— 34,924

Digitized by Google

κ	i	i′	sin	cos
− 1,	− 1,	3	+ 32″,105	− 43″,486
− 2,	0,	3	− 0,036	+ 0,012
1,	− 3,	3	+ 0,630	− 1,520
2,	− 4,	3	+ 0,100	+ 0,132
			+ 32,799	− 44,862
− 1,	0,	3	− 0,724	+ 0,266
1,	− 2,	3	− 0,223	+ 0,472
2,	− 3,	3	+ 0,028	− 0,072
			− 0,919	+ 0,666
− 1,	1,	3	+ 0,003	+ 0,010
1,	− 1,	3	− 0,082	+ 0,173
2,	− 2,	3	− 0,012	+ 0,024
			− 0,091	+ 0,207
− 1,	− 5,	4	− 0,023	− 0,029
− 2,	− 4,	4	− 0,004	− 0,036
1,	− 7,	4	+ 0,002	+ 0,016
			− 0,025	− 0,049
− 1,	− 4,	4	− 0,062	− 0,745
− 2,	− 3,	4	+ 0,500	− 0,556
1,	− 6,	4	− 0,047	+ 0,201
			+ 0,391	− 1,100
− 1,	− 3,	4	+ 10,393	− 11,538
− 2,	− 2,	4	− 1,168	− 0,556
1,	− 5,	4	− 1,191	+ 1,392
2,	− 6,	4	− 0,004	+ 0,008
			+ 8,030	− 10,714
− 1,	− 2,	4	− 24,338	− 11,550
− 2,	− 1,	4	+ 0,012	− 0,136
1,	− 4,	4	+ 1,191	+ 0,343
2,	− 5,	4	− 0,056	+ 0,064
			− 23,191	− 11,279
− 1,	− 1,	4	+ 0,257	− 2,804
1,	− 3,	4	− 0,127	− 0,320
2,	− 4,	4	+ 0,056	+ 0,016
			+ 0,186	− 3,108

κ	i	i′	sin	cos
− 1,	0,	4	− 0″,059	+ 0″,054
1,	− 2,	4	+ 0,005	+ 0,144
2,	− 3,	4	− 0,004	− 0,016
			− 0,058	+ 0,182
− 1,	− 5,	5	+ 0,466	− 0,119
− 2,	− 4,	5	+ 0,272	+ 0,152
1,	− 7,	5	− 0,132	+ 0,002
			+ 0,606	+ 0,035
− 1,	− 4,	5	+ 5,657	+ 3,190
− 2,	− 3,	5	+ 0,100	− 0,396
− 3,	− 2,	5	+ 0,387	− 0,036
1,	− 6,	5	− 0,834	− 0,435
2,	− 7,	5	− 0,008	0,000
			+ 5,302	+ 2,323
− 1,	− 3,	5	+ 2,038	− 8,292
− 2,	− 2,	5	+ 7,244	− 0,596
1,	− 5,	5	− 0,090	+ 0,819
2,	− 6,	5	− 0,040	− 0,020
			+ 9,152	− 8,089
− 1,	− 2,	5	+ 150,786	− 12,390
1,	− 4,	5	+ 0,276	− 0,111
2,	− 5,	5	− 0,004	+ 0,040
			+ 151,058	− 12,461
− 1,	− 1,	5	− 0,10095	− 0,20111
− 2,	0,	5	− 0,00020	+ 0,00040
1,	− 3,	5	− 0,06317	− 0,03060
2,	− 4,	5	+ 0,01332	− 0,00532
3,	− 5,	5	− 0,00018	+ 0,00216
			− 0,15118	− 0,23447
− 1,	0,	5	− 0,004	+ 0,008
1,	− 2,	5	− 0,278	− 0,393
			− 0,282	− 0,385
− 1,	− 6,	6	+ 0,123	+ 0,259
− 2,	− 5,	6	− 0,040	+ 0,132
1,	− 8,	6	− 0,021	− 0,078
			+ 0,062	+ 0,313

Digitized by Google

κ	i	i′	sin	cos
			″	″
− 1,	− 5,	6	− 0,811	+ 2,777
− 2,	− 4,	6	+ 0,188	+ 0,008
1,	− 7,	6	+ 0,115	− 0,471
			− 0,508	+ 2,314
− 1,	− 4,	6	+ 3,910	+ 0,128
− 2,	− 3,	6	− 0,044	− 0,156
1,	− 6,	6	− 0,517	+ 0,035
2,	− 7,	6	+ 0,004	− 0,024
			+ 3,353	− 0,017
− 1,	− 3,	6	− 0,909	− 3,282
− 2,	− 2,	6	+ 0,032	− 0,020
1,	− 5,	6	+ 0,110	+ 0,203
			− 0,767	− 3,099
− 1,	− 2,	6	+ 0,632	− 0,449
1,	− 4,	6	+ 0,031	− 0,054
			+ 0,663	− 0,503
− 1,	− 1,	6	− 0,018	− 0,011
1,	− 3,	6	− 0,016	+ 0,005
			− 0,034	− 0,006
− 1,	− 6,	7	− 1,328	− 0,069
− 2,	− 5,	7	+ 0,016	+ 0,092
1,	− 8,	7	+ 0,252	− 0,005
			− 1,060	+ 0,018
− 1,	− 5,	7	+ 0,354	+ 1,944
− 2,	− 4,	7	+ 0,064	− 0,032
1,	− 7,	7	− 0,084	− 0,300
2,	− 8,	7	+ 0,012	0,000
			+ 0,346	+ 1,612
− 1,	− 4,	7	+ 1,308	− 0,664
− 2,	− 3,	7	− 0,068	− 0,056
1,	− 6,	7	− 0,132	+ 0,101
2,	− 7,	7	− 0,004	− 0,016
			+ 1,104	− 0,635
− 1,	− 3,	7	− 1,468	− 1,435
1,	− 5,	7	+ 0,047	+ 0,022
2,	− 6,	7	− 0,008	+ 0,004
			− 1,429	− 1,409

κ	i	i′	sin	cos
			″	″
− 1,	− 2,	7	+ 0,023	− 0,051
1,	− 4,	7	− 0,004	− 0,012
			+ 0,019	− 0,063
− 1,	− 7,	8	− 0,116	− 0,613
− 2,	− 6,	8	− 0,044	+ 0,020
1,	− 9,	8	+ 0,035	+ 0,123
			− 0,125	− 0,470
− 1,	− 6,	8	− 0,953	+ 0,400
− 2,	− 5,	8	+ 0,024	+ 0,028
1,	− 8,	8	+ 0,163	− 0,085
			− 0,766	+ 0,343
− 1,	− 5,	8	+ 0,488	+ 0,613
− 2,	− 4,	8	+ 0,012	− 0,020
1,	− 7,	8	− 0,084	− 0,077
2,	− 8,	8	+ 0,008	− 0,004
			+ 0,424	+ 0,512
− 1,	− 4,	8	+ 0,264	− 0,395
− 2,	− 3,	8	+ 0,012	+ 0,004
1,	− 6,	8	− 0,013	+ 0,039
			+ 0,263	− 0,352
− 1,	− 3,	8	+ 0,262	+ 0,063
1,	− 5,	8	+ 0,010	− 0,002
			+ 0,272	+ 0,061
− 1,	− 2,	8	− 0,002	− 0,005
1,	− 4,	8	− 0,003	− 0,003
			− 0,005	− 0,008
− 1,	− 7,	9	− 0,317	− 0,449
− 2,	− 6,	9	− 0,012	+ 0,016
1,	− 9,	9	+ 0,069	+ 0,081
			− 0,260	− 0,352
− 1,	− 6,	9	− 0,275	+ 0,343
− 2,	− 5,	9	+ 0,012	+ 0,004
1,	− 8,	9	+ 0,035	− 0,064
			− 0,228	+ 0,283
− 1,	− 5,	9	+ 0,227	+ 0,094
1,	− 7,	9	− 0,031	− 0,005
			+ 0,196	+ 0,089

Digitized by Google

κ i i'	sin	cos	κ i i'	sin	cos
−1, −4, 9	+ 0″,011	− 0″,178	−1, −4, 10	+ 0″,184	+ 0″,364
1, −6, 9	+ 0,003	+ 0,008	1, −6, 10	+ 0,002	0,000
	+ 0,014	− 0,170		+ 0,186	+ 0,364
−1, −3, 9	+ 0,013	− 0,005	−1, −3, 10	+ 0,00078	− 0,00089
1, −5, 9	+ 0,001	+ 0,001	1, −5, 10	+ 0,00005	− 0,00043
	+ 0,014	− 0,004		+ 0,00083	− 0,00132
−1, −5, 10	+ 0,071	− 0,008			
−2, −4, 10	+ 0,008	+ 0,016			
1, −7, 10	− 0,007	+ 0,003			
	+ 0,072	+ 0,011			

Digitized by Google

i, i'	l(r) cos	l(r) sin	S cos	S sin
	"		"	
0, 0	− 2,377	....	− 4,754	....
......	− 0,01225 nt	....	− 0,02449 nt	....
1, 0	− 0,245	+ 0",423	+ 0,037	+ 0",167
......	− 0,30893 nt	− 0,36770 nt	0	0
2, 0	+ 0,006	+ 0,027	− 0,013	− 0,005
......	− 0,01224 nt	− 0,01366 nt	0	0
3, 0	− 0,00044 nt	− 0,00050 nt	0	0
−3, 1	− 0,013	− 0,024	+ 0,007	+ 0,014
−2, 1	− 0,110	− 1,038	+ 0,160	+ 0,129
−1, 1	+ 5,054	− 25,377	+ 0,802	− 4,050
0, 1	+ 1,777	+ 0,479	+ 0,165	− 0,794
1, 1	+ 0,185	− 0,041	− 0,001	+ 0,022
−4, 2	+ 0,094	+ 0,057	+ 0,003	− 0,011
−3, 2	+ 2,631	+ 1,411	− 0,142	− 0,309
−2, 2	+100,313	+ 43,698	− 12,555	− 8,473
−1, 2	+ 18,119	+ 1,077	+ 12,283	+ 2,930
0, 2	+ 0,576	+ 0,301	+ 0,134	− 0,025
1, 2	+ 0,020	+ 0,013	− 0,001	+ 0,002
−5, 3	+ 0,019	− 0,009	− 0,012	− 0,004
−4, 3	+ 0,367	− 0,290	− 0,272	+ 0,068
−3, 3	+ 6,130	− 9,745	− 3,622	+ 3,015
−2, 3	− 20,708	− 28,325	− 2,042	− 4,312
−1, 3	− 2,209	− 1,601	− 1,837	− 1,332
0, 3	− 0,038	− 0,086	+ 0,010	+ 0,004
−6, 4	+ 0,003	− 0,006	− 0,008	+ 0,008
−5, 4	− 0,058	− 0,163	+ 0,010	+ 0,190
−4, 4	− 1,680	− 2,242	+ 1,936	+ 2,167
−3, 4	+ 8,347	− 4,060	− 2,393	+ 0,754
−2, 4	− 0,239	− 3,993	+ 0,402	− 1,896
−1, 4	− 0,048	− 0,149	− 0,045	− 0,103
−6, 5	− 0,076	+ 0,003	+ 0,135	+ 0,031

i, i'	l(r) cos	l(r) sin	S cos	S sin
	"	"	"	"
−5, 5	−0,888	+0,389	+1,213	−0,088
−4, 5	−2,304	−2,036	+0,163	+1,391
−3, 5	−76,555	−6,316	−0,657	−0,237
−2, 5	−5,629	+8,730	−5,532	+4,172
−1, 5	−0,139	+0,130	+0,001	−0,011
−7, 6	−0,007	+0,034	+0,029	−0,074
−6, 6	+0,071	+0,323	−0,185	−0,647
−5, 6	−0,649	−0,004	+0,797	+0,036
−4, 6	+0,242	−0,979	−0,221	+0,387
−3, 6	−0,568	−0,432	−0,114	−0,193
−2, 6	−0,041	+0,007	−0,036	−0,004
−7, 7	+0,127	+0,002	−0,331	+0,011
−6, 7	−0,053	+0,254	+0,110	−0,432
−5, 7	−0,253	−0,146	+0,220	+0,138
−4, 7	+0,605	−0,507	−0,096	+0,035
−3, 7	−0,053	−0,174	+0,022	−0,108
−8, 8	+0,013	−0,049	−0,034	+0,159
−7, 8	+0,102	+0,046	−0,223	−0,115
−6, 8	−0,077	+0,092	+0,122	−0,119
−5, 8	−0,074	−0,099	+0,023	+0,071
−4, 8	−0,175	+0,030	−0,029	−0,006
−3, 8	−0,012	+0,010	−0,020	+0,014
−8, 9	+0,030	−0,040	−0,080	+0,110
−7, 9	+0,034	+0,042	−0,043	−0,091
−6, 9	−0,042	+0,019	+0,050	−0,008
−5, 9	−0,006	−0,062	−0,008	+0,017
−4, 9	−0,019	−0,006	−0,004	0,000
−6, 10	−0,018	+0,003	+0,013	+0,005
−5, 10	−0,096	+0,187	−0,066	+0,001
−4, 10	+0,010	+0,025	+0,003	+0,021

i′, i			Fehler.			Fehler.	i′, i			Fehler.			Fehler.
0, 0							8, −3	−0″,006	0″,000	− 6	+0″,007	0″,000	+ 7
1, 0	− 0″,650	+ 0″,648	− 2	+ 3″,064	− 3″,063	+ 1	2, −4	+0,007	−0,001	+ 6	+0,008	+0,001	+ 9
2, 0	− 46	+ 33	−13	+ 0,170	− 0,178	− 8	3, −4	− 1	0	− 1	+ 3	0	+ 3
3, 0	0	+ 2	+ 2	+ 10	− 10	0	4, −4	+ 6	0	+ 6	+ 3	0	+ 3
−2, −1	0	+ 0	0	− 5	0	− 5	5, −4	− 13	0	−13	+ 1	0	+ 1
−1, −1	+ 6	− 4	+ 2	− 43	+ 40	− 3	6, −4	− 27	0	−27	+ 2	0	+ 2
0, −1	− 1,885	+ 1,883	− 2	+ 6,985	− 6,984	+ 1	7, −4	+ 1	0	+ 1	+ 4	0	+ 4
1, −1	+31,311	−31,303	+ 8	−147,337	+147,330	− 7	8, −4	− 3	0	− 3	0	0	0
2, −1	+ 1,157	− 1,128	+29	− 5,356	+ 5,310	−46	9, −4	+ 2	0	+ 2	+ 6	0	+ 6
3, −1	+ 40	− 78	−38	− 256	+ 278	+22	10, −4	+ 1	0	+ 1	+ 3	0	+ 3
4, −1	+ 2	− 6	− 4	− 12	+ 17	+ 5	4, −5	+ 4	0	+ 4	− 1	0	− 1
5, −1	0	0	0	− 6	0	− 6	5, −5	+ 5	0	+ 5	− 16	0	−16
−1, −2	− 1	− 1	− 2	+ 1	− 3	− 2	6, −5	+ 5	0	+ 5	− 3	0	− 3
0, −2	− 98	+ 92	− 6	+ 428	− 426	+ 2	7, −5	+ 3	0	+ 3	0	0	0
1, −2	+ 1,290	− 1,290	0	− 6,075	+ 6,074	− 1	8, −5	− 3	0	− 3	+ 3	0	+ 3
2, −2	+ 46	− 42	+ 4	− 199	+ 199	0	9, −5	− 3	0	− 3	+ 2	0	+ 2
3, −2	+ 5	− 3	+ 2	− 18	+ 10	− 8	10, −5	− 5	0	− 5	+ 1	0	+ 1
4, −2	− 12	− 1	−13	− 9	− 5	−14	5, −6	+ 9	0	+ 9	− 2	0	− 2
5, −2	+ 58	− 44	+14	− 99	+ 67	−32	6, −6	− 2	0	− 2	0	0	0
6, −2	− 7	0	− 7	− 2	0	− 2	7, −6	− 2	0	− 2	+ 3	0	+ 3
7, −2	+ 1	0	+ 1	+ 2	0	+ 2	8, −6	+ 1	0	+ 1	− 3	0	− 3
0, −3	− 6	+ 5	− 1	+ 21	− 22	− 1	9, −6	+ 1	0	+ 1	+ 1	0	+ 1
1, −3	+ 67	− 67	0	− 303	+ 309	+ 6	10, −6	+ 13	0	+13	+ 5	0	+ 5
2, −3	− 5	− 2	− 7	− 9	+ 10	+ 1	6, −7	− 2	0	− 2	0	0	0
3, −3	− 2	0	− 2	+ 4	0	+ 4	7, −7	− 4	0	− 4	0	0	0
4, −3	− 4	0	− 4	− 16	0	−16	8, −7	+ 1	0	+ 1	− 6	0	− 6
5, −3	+ 1	0	+ 1	+ 13	0	+13	9, −7	+ 16	0	+16	− 2	0	− 2
6, −3	+ 1	0	+ 1	− 19	0	−19	8, −8	− 5	0	− 5	+ 2	0	+ 2
7, −3	+ 15	0	+15	− 6	− 1	− 7	9, −8	− 2	0	− 2	+ 4	0	+ 4

Tafel XXI.

i'	i	$r^2\left(\frac{d^2 K_c^{i',i}}{dr^2}\right)$	$r^2\left(\frac{d^2 K_s^{i',i}}{dr^2}\right)$	$r'^2\left(\frac{d^2 K_c^{i',i}}{dr'^2}\right)$	$r'^2\left(\frac{d^2 K_s^{i',i}}{dr'^2}\right)$	$r\left(\frac{d^2 K_c^{i',i}}{dr\,d\mathfrak{l}}\right)$	$r\left(\frac{d^2 K_s^{i',i}}{dr\,d\mathfrak{l}}\right)$
0,	0	+ 0,44013	0,00000	+ 3,51787	0,00000	— 0,03526	0,00000
1,	0	+ 0,10481	+ 0,12263	+ 0,36627	+ 0,52041	— 0,00337	— 0,01174
2,	0	— 0,00176	+ 0,02478	— 0,00516	+ 0,07650	+ 0,00950	+ 0,03299
3,	0	— 0,00241	+ 0,00269	— 0,00575	+ 0,00717	— 0,00259	+ 0,00935
4,	0	— 0,00048	+ 0,00014	— 0,00104	+ 0,00037	....	....
— 2,	— 1	— 0,00190	+ 0,00068	— 0,00372	+ 0,00118	....	....
— 1,	— 1	— 0,01475	— 0,00334	— 0,03204	— 0,00717	— 0,03278	— 0,01747
0,	— 1	— 0,07326	— 0,08072	— 0,20055	— 0,17644	+ 0,00799	— 0,00020
1,	— 1	+ 0,15559	— 0,76580	+ 1,06977	— 5,16384	— 0,01348	+ 0,06357
2,	— 1	+ 0,21991	— 0,08387	+ 0,77188	— 0,48250	— 0,01489	+ 0,00523
3,	— 1	+ 0,04228	+ 0,01674	+ 0,13247	+ 0,02193	+ 0,02621	— 0,00387
4,	— 1	+ 0,00372	+ 0,00630	+ 0,01236	+ 0,01344	+ 0,00918	+ 0,00449
5,	— 1	— 0,00009	+ 0,00108	+ 0,00028	+ 0,00235	....	....
— 1,	— 2	+ 0,00009	+ 0,00131	— 0,00008	+ 0,00208	....	....
0,	— 2	— 0,00421	+ 0,00704	— 0,00871	+ 0,01301	— 0,02274	+ 0,02658
1,	— 2	— 0,03885	+ 0,03786	— 0,01019	+ 0,02422	— 0,00424	— 0,00436
2,	— 2	— 0,97110	— 0,41611	— 3,63692	— 1,58387	+ 0,05069	+ 0,02233
3,	— 2	— 0,09197	— 0,31930	— 0,42262	— 0,91073	+ 0,00531	+ 0,01743
4,	— 2	+ 0,03254	— 0,06387	+ 0,04751	— 0,17624	+ 0,00075	— 0,01718
5,	— 2	+ 0,01175	— 0,00494	+ 0,02306	— 0,01690	+ 0,00492	— 0,00709
6,	— 2	+ 0,00196	+ 0,00045	+ 0,00402	0,00000	....	....
0,	— 3	+ 0,00051	+ 0,00023	+ 0,00076	+ 0,00046	....	....
1,	— 3	+ 0,00313	+ 0,00402	+ 0,00779	+ 0,00609	....	....
2,	— 3	+ 0,01000	— 0,01310	— 0,03407	— 0,10659	....	....
3,	— 3	— 0,59814	+ 0,85098	— 1,64288	+ 2,29793	....	....
4,	— 3	— 0,38069	+ 0,06826	— 0,91361	+ 0,26037	....	....
5,	— 3	— 0,08014	— 0,04878	— 0,19287	— 0,07896	— 0,01241	— 0,00423
6,	— 3	— 0,00621	— 0,00220	— 0,01901	— 0,03243	....	....
7,	— 3	+ 0,00097	— 0,00304	+ 0,00066	— 0,00601	....	....
1,	— 4	+ 0,00025	— 0,00014	+ 0,00053	— 0,00019	....	....
2,	— 4	+ 0,00365	— 0,00258	+ 0,00510	— 0,00866	....	....
3,	— 4	— 0,05354	— 0,00129	— 0,16243	+ 0,02743	....	....
4,	— 4	+ 0,58427	+ 0,63372	+ 1,28778	+ 1,33526	....	....
5,	— 4	+ 0,01394	+ 0,38402	+ 0,08272	+ 0,80680	+ 0,00996	— 0,01206
6,	— 4	— 0,06426	+ 0,08419	— 0,10742	+ 0,18070	....	....
7,	— 4	— 0,02235	+ 0,00575	— 0,03981	+ 0,01679	....	....
8,	— 4	— 0,00400	— 0,00163	— 0,00750	— 0,00172	....	....
9,	— 4	— 0,00020	— 0,00026	— 0,00065	— 0,00056	....	....

Digitized by Google

i'	i	$r\left(\frac{d^2 K_c^{i',i}}{\sin 1\, dr\, d\Theta}\right)$	$r\left(\frac{d^2 K_s^{i',i}}{\sin 1\, dr\, d\Theta}\right)$	$r'\left(\frac{d^2 K_c^{i',i}}{dr'\, d1}\right)$	$r'\left(\frac{d^2 K_s^{i',i}}{dr'\, d1}\right)$	$r'\left(\frac{d^2 K_c^{i',i}}{\sin 1\, dr'\, d\Theta}\right)$	$r'\left(\frac{d^2 K_s^{i',i}}{\sin 1\, dr'\, d\Theta}\right)$
0,	0	+ 0,00063	0,00000	+ 0,04494	0,00000	— 0,00075	0,00000
1,	0	+ 0,00102	+ 0,00572	+ 0,00383	+ 0,01476	— 0,00160	— 0,00712
2,	0	— 0,03299	+ 0,00949	— 0,01240	— 0,04169	+ 0,04213	— 0,01242
3,	0	— 0,00961	— 0,00270	+ 0,00271	— 0,01160	+ 0,01191	+ 0,00278
4,	0	....	....	....	....	....	....
—2,	—1	....	....	....	....	....	....
—1,	—1	— 0,01746	+ 0,03274	+ 0,04406	+ 0,02379	+ 0,02383	— 0,04425
0,	—1	— 0,00734	— 0,00142	— 0,00994	+ 0,00058	+ 0,00911	+ 0,00177
1,	—1	— 0,00135	— 0,00037	+ 0,01726	— 0,08260	+ 0,00144	+ 0,00061
2,	—1	+ 0,00394	— 0,00039	+ 0,01832	— 0,00680	— 0,00474	+ 0,00074
3,	—1	+ 0,00330	+ 0,02836	— 0,03177	+ 0,00456	— 0,00400	— 0,03451
4,	—1	— 0,00449	+ 0,00918	— 0,01101	— 0,00512	+ 0,00517	— 0,01108
5,	—1	....	....	....	....	....	....
—1,	—2	....	....	....	....	....	....
0,	—2	+ 0,02598	+ 0,02262	+ 0,02898	— 0,03379	— 0,03328	— 0,02891
1,	—2	— 0,00178	+ 0,00843	+ 0,00548	+ 0,00513	+ 0,00209	— 0,01021
2,	—2	+ 0,00068	— 0,00154	— 0,06293	— 0,02746	— 0,00043	+ 0,00138
3,	—2	— 0,00061	— 0,00241	— 0,00666	— 0,02105	+ 0,00085	+ 0,00282
4,	—2	+ 0,02111	+ 0,00180	— 0,00103	+ 0,02028	— 0,02492	— 0,00215
5,	—2	+ 0,00754	+ 0,00545	— 0,00567	+ 0,00833	— 0,00887	— 0,00628
6,	—2	....	....	....	....	....	....
0,	—3	....	....	....	....	....	....
1,	—3	....	....	....	....	....	....
2,	—3	....	....	....	....	....	....
3,	—3	....	....	....	....	....	....
4,	—3	....	....	....	....	....	....
5,	—3	+ 0,00605	— 0,01322	+ 0,01388	+ 0,00477	— 0,00671	+ 0,01538
6,	—3	....	....	....	....	....	....
7,	—3	....	....	....	....	....	....
1,	—4	....	....	....	....	....	....
2,	—4	....	....	....	....	....	....
3,	—4	....	....	....	....	....	....
4,	—4	....	....	....	....	....	....
5,	—4	— 0,00009	+ 0,00101	— 0,00966	+ 0,01436	— 0,00007	— 0,00111

Digitized by Google

i'	i	$r^2\left(\frac{d^2 K_c^{i',i}}{dr^2}\right)$	$r^2\left(\frac{d^2 K_s^{i',i}}{dr^2}\right)$	$r'^2\left(\frac{d^2 K_c^{i',i}}{dr'^2}\right)$	$r'^2\left(\frac{d^2 K_s^{i',i}}{dr'^2}\right)$	$r\left(\frac{d^2 K_c^{i',i}}{dr\,d1}\right)$	$r\left(\frac{d^2 K_s^{i',i}}{dr\,d1}\right)$
2,	− 5	+ 0,00007	− 0,00020	+ 0,00016	− 0,00054	....	....
3,	− 5	− 0,00347	− 0,00399	− 0,01029	− 0,00627	....	....
4,	− 5	− 0,00807	+ 0,07250	− 0,00258	+ 0,16828	....	....
5,	− 5	+ 0,55553	− 0,32381	+ 1,09069	− 0,61949	....	....
6,	− 5	+ 0,33807	+ 0,04449	+ 0,64130	+ 0,05518	....	....
7,	− 5	+ 0,07524	+ 0,07538	+ 0,14794	+ 0,12467	....	....
8,	− 5	+ 0,00357	+ 0,02542	+ 0,01124	+ 0,04335	....	....
9,	− 5	− 0,00249	+ 0,00467	− 0,00311	+ 0,00831	....	....
10,	− 5	− 0,00034	+ 0,00021	− 0,00077	+ 0,00067	....	....

Digitized by Google

$\int V d\tau =$

κ	i'	i	cos	sin	κ	i'	i	cos	sin
					1,	−1,	−2	− 1,65	− 1,31
					0,	0,	−2	0 *x*	0 *x*
0,	0,	0	− 851,36	....	0,	1,	−2	+ 30,21	− 23,90
1,	−1,	0	+ 849,76	+ 2,68	−1,	2,	−2	+ 39,81	− 101,40
0,	1,	0	− 163,60	− 153,05	1,	0,	−2	− 53,80	+ 132,53
−1,	2,	0	+ 113,24	+ 123,66	0,	1,	−2	− 186,73 *x*	− 44,75 *x*
1,	0,	0	+ 38,30	+ 29,03	0,	2,	−2	+ 1097,72	+ 479,51
0,	1,	0	+ 71,42 *x*	− 56,13 *x*	−1,	3,	−2	− 1147,69	− 501,35
0,	2,	0	− 5,93	− 32,16	1,	1,	−2	+ 53,54	+ 24,91
−1,	3,	0	+ 2,09	+ 26,59	0,	2,	−2	− 407,55 *x*	+ 903,02 *x*
1,	1,	0	+ 2,99	+ 5,11	0,	3,	−2	+ 205,70	+ 320,45
0,	2,	0	+ 18,15 *x*	− 0,12 *x*	−1,	4,	−2	− 201,07	− 347,16
0,	3,	0	+ 1,73	− 4,12	1,	2,	−2	− 5,49	+ 27,46
−1,	4,	0	− 1,87	+ 3,30	0,	3,	−2	− 294,02 *x*	+ 171,62 *x*
1,	2,	0	+ 0,07	+ 0,73	0,	4,	−2	− 2,83	+ 79,92
0,	3,	0	+ 2,35 *x*	+ 1,54 *x*	−1,	5,	−2	+ 8,97	− 84,08
0,	−1,	−1	+ 12,27	+ 6,27	1,	3,	−2	− 6,18	+ 3,90
−1,	0,	−1	− 4,02	− 2,77	0,	4,	−2	− 74,13 *x*	− 7,44 *x*
1,	−2,	−1	− 7,78	− 3,41	0,	5,	−2	− 8,25	+ 11,10
0,	−1,	−1	+ 0,94 *x*	− 2,73 *x*	−1,	6,	−2	+ 9,83	− 11,10
0,	0,	−1	+ 66,47	+ 44,25	1,	4,	−2	− 1,40	− 0,16
−1,	1,	−1	− 46,78	+ 41,93	0,	5,	−2	− 10,01 *x*	− 8,76 *x*
1,	−1,	−1	− 25,16	− 59,52	0,	2,	−3	+ 1,88	+ 38,04
0,	0,	−1	0 *x*	0 *x*	−1,	3,	−3	+ 2,09	− 59,85
0,	1,	−1	− 27,90	+ 183,72	1,	1,	−3	+ 4,48	+ 10,26
−1,	2,	−1	+ 389,87	− 1891,19	0,	2,	−3	− 32,74 *x*	+ 16,12 *x*
1,	0,	−1	− 365,28	+ 1711,85	0,	3,	−3	+ 515,42	− 723,59
0,	1,	−1	− 2705,13 *x*	− 571,39 *x*	−1,	4,	−3	− 590,19	+ 831,46
0,	2,	−1	− 254,30	+ 234,05	1,	2,	−3	+ 80,17	− 110,00
−1,	3,	−1	+ 259,04	− 248,23	0,	3,	−3	+ 707,65 *x*	+ 512,06 *x*
1,	1,	−1	− 0,41	− 9,74	0,	4,	−3	+ 335,45	− 137,89
0,	2,	−1	− 254,71 *x*	− 211,69 *x*	−1,	5,	−3	− 385,77	+ 142,78
0,	3,	−1	− 58,75	+ 7,55	1,	3,	−3	+ 50,57	− 2,98
−1,	4,	−1	+ 57,02	− 4,17	0,	4,	−3	+ 128,42 *x*	+ 343,68 *x*
1,	2,	−1	+ 1,74	− 4,01	0,	5,	−3	+ 89,25	+ 17,23
0,	3,	−1	− 6,55 *x*	− 47,37 *x*	−1,	6,	−3	− 99,10	− 25,22
0,	4,	−1	− 7,79	− 4,28	1,	4,	−3	+ 9,30	+ 8,31
−1,	5,	−1	+ 7,02	+ 4,84	0,	5,	−3	− 28,11 *x*	+ 90,89 *x*
1,	3,	−1	+ 0,65	− 0,54	0,	6,	−3	+ 12,94	+ 12,80
0,	4,	−1	+ 3,94 *x*	− 6,03 *x*	−1,	7,	−3	− 13,33	− 15,29
0,	0,	−2	+ 4,49	− 2,92	1,	5,	−3	+ 0,30	+ 2,37
−1,	1,	−2	− 2,93	+ 5,86	0,	6,	−3	− 14,04 *x*	+ 12,58 *x*

Digitized by Google

κ	i'	i	cos	sin	κ	i'	i	cos	sin
0,	7,	− 3	+ 0″,50	+ 3″,05	…	…	…	…	…
− 1,	8,	− 3	− 0,35	− 3,48	0,	10,	− 4	+ 0,11 x	+ 0,05 x
1,	6,	− 3	− 0,23	+ 0,35	0,	4,	− 5	+ 8,53	− 58,25
0,	7,	− 3	− 3,26 x	+ 0,44 x	− 1,	5,	− 5	− 12,68	+ 76,04
0,	3,	− 4	+ 57,03	+ 1,17	1,	3,	− 5	− 2,33	− 14,14
− 1,	4,	− 4	− 111,69	+ 6,01	0,	4,	− 5	+ 61,05 x	− 4,07 x
1,	2,	− 4	+ 47,54	− 14,98	0,	5,	− 5	− 359,32	+ 202,84
0,	3,	− 4	+ 29,88 x	+ 106,68 x	− 1,	6,	− 5	+ 452,40	− 257,17
0,	4,	− 4	− 413,73	− 426,66	1,	4,	− 5	− 97,33	+ 54,40
− 1,	5,	− 4	+ 505,90	+ 540,28	0,	5,	− 5	− 231,11 x	− 419,74 x
1,	3,	− 4	− 93,66	− 118,57	0,	6,	− 5	− 246,37	− 1,31
0,	4,	− 4	+ 503,57 x	− 447,56 x	− 1,	7,	− 5	+ 303,82	+ 9,02
0,	5,	− 4	− 60,56	− 303,26	1,	5,	− 5	− 57,27	− 9,25
− 1,	6,	− 4	+ 61,65	+ 364,14	0,	6,	− 5	+ 8,61 x	− 284,41 x
1,	4,	− 4	+ 0,85	− 60,61	0,	7,	− 5	− 70,72	− 43,32
0,	5,	− 4	+ 334,81 x	− 57,02 x	− 1,	8,	− 5	+ 83,88	+ 56,53
0,	6,	− 4	+ 32,83	− 85,35	1,	6,	− 5	− 11,73	− 12,81
− 1,	7,	− 4	− 43,69	+ 98,37	0,	7,	− 5	+ 52,93 x	− 79,62 x
1,	5,	− 4	+ 10,88	− 12,16	0,	8,	− 5	− 9,41	− 18,96
0,	6,	− 4	+ 91,90 x	+ 39,54 x	− 1,	9,	− 5	+ 10,01	+ 23,21
0,	7,	− 4	+ 16,71	− 12,17	1,	7,	− 5	− 0,35	− 4,23
− 1,	8,	− 4	− 20,39	+ 12,71	0,	8,	− 5	+ 22,11 x	− 9,83 x
1,	6,	− 4	+ 3,38	− 0,51	0,	9,	− 5	+ 0,46	− 4,46
0,	7,	− 4	+ 12,48 x	+ 18,91 x	− 1,	10,	− 5	− 0,90	+ 4,89
0,	8,	− 4	+ 3,90	− 0,20	1,	8,	− 5	+ 0,46	− 0,72
− 1,	9,	− 4	− 4,56	− 0,14	0,	9,	− 5	+ 5,08 x	+ 0,78 x
1,	7,	− 4	+ 0,59	+ 0,33	0,	10,	− 5	+ 0,33	− 0,55
0,	8,	− 4	0,00 x	+ 4,38 x	− 1,	11,	− 5	− 0,59	+ 0,67
0,	9,	− 4	+ 0,51	+ 0,21	1,	9,	− 5	+ 0,24	− 0,10
− 1,	10,	− 4	− 0,59	− 0,38	0,	10,	− 5	+ 0,73 x	+ 0,64 x
1,	8,	− 4	+ 0,08	+ 0,18	…	…	…	…	…
0,	9,	− 4	− 0,42 x	+ 0,63 x	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	0,	10,	− 6	+ 1,72 x	− 5,21 x

$$\int\left(\frac{dT}{dP}\right)d\tau$$

γ	g′	g	cos	sin	γ	g′	g	cos	sin
			″	″				″	″
0,	0,	0	+ 0,24	0,00	− 1,	+ 4,	− 1	− 1,61	− 13,69
1,	− 1,	0	− 0,23	0,00	1,	+ 2,	− 1	− 0,03	+ 0,50
0,	1,	0	+ 0,55	+ 2,76	0,	3,	− 1	− 10,73 x	+ 1,20 x
− 1,	+ 2,	0	− 0,80	− 1,82	0,	4,	− 1	− 1,87	+ 5,25
1,	0,	0	+ 0,03	− 0,87	− 1,	+ 5,	− 1	+ 2,03	− 5,36
0,	1,	0	− 0,81 x	+ 0,34 x	1,	+ 3,	− 1	− 0,14	+ 0,10
0,	2,	0	− 16,19	+ 4,86	0,	4,	− 1	− 4,40 x	− 1,58 x
− 1,	+ 3,	0	+ 15,06	− 4,67	0,	0,	− 2	+ 12,88	+ 11,14
1,	+ 1,	0	+ 1,08	− 0,21	− 1,	+ 1,	− 2	− 6,45	− 5,53
0,	2,	0	− 3,39 x	− 10,56 x	1,	− 1,	− 2	− 6,44	− 5,58
0,	3,	0	− 5,66	− 0,75	0,	0,	− 2	− 0 x	0 x
− 1,	+ 4,	0	+ 5,40	+ 0,87	0,	1,	− 2	− 0,36	+ 4,33
1,	+ 2,	0	+ 0,26	− 0,12	− 1,	+ 2,	− 2	+ 0,34	− 2,81
0,	3,	0	+ 0,64 x	− 4,14 x	1,	0,	− 2	+ 0,10	− 1,43
0,	− 1,	− 1	− 15,96	+ 29,52	0,	1,	− 2	− 1,03 x	− 0,18 x
− 1,	0,	− 1	+ 12,16	− 22,81	0,	2,	− 2	− 0,02	+ 0,12
1,	− 2,	− 1	+ 3,72	− 6,72	− 1,	+ 3,	− 2	+ 0,18	− 0,14
0,	− 1,	− 1	− 12,05 x	− 6,29 x	1,	+ 1,	− 2	− 0,18	+ 0,01
0,	0,	− 1	− 3,80	− 0,13	0,	2,	− 2	− 0,18 x	− 0,29 x
− 1,	+ 1,	− 1	+ 1,76	+ 0,34	0,	3,	− 2	− 0,40	− 1,10
1,	− 1,	− 1	+ 1,99	− 0,12	− 1,	+ 4,	− 2	+ 0,71	+ 0,10
0,	0,	− 1	0 x	0 x	1,	+ 2,	− 2	− 0,15	+ 1,01
0,	1,	− 1	− 0,08	− 0,05	0,	3,	− 2	− 0,70 x	− 0,41 x
− 1,	+ 2,	− 1	+ 0,05	0,00	0,	4,	− 2	+ 9,53	+ 0,79
1,	0,	− 1	+ 0,04	+ 0,03	− 1,	+ 5,	− 2	− 10,55	− 0,87
0,	1,	− 1	+ 0,14 x	− 0,04 x	1,	+ 3,	− 2	+ 1,06	+ 0,09
0,	2,	− 1	+ 1,82	− 0,32	0,	4,	− 2	− 0,80 x	+ 8,80 x
− 1,	+ 3,	− 1	− 1,49	+ 0,72	0,	5,	− 2	+ 4,18	+ 2,49
1,	+ 1,	− 1	− 0,30	− 0,22	− 1,	+ 6,	− 2	− 4,48	− 2,83
0,	2,	− 1	+ 0,41 x	+ 0,92 x	1,	+ 4,	− 2	+ 0,30	+ 0,34
0,	3,	− 1	+ 1,65	+ 13,25	0,	5,	− 2	− 2,40 x	+ 3,85 x

Digitized by Google

$$\int \left(\frac{dT}{dQ}\right) d\tau$$

γ	g′	g	cos	sin	γ	g′	g	cos	sin
0,	0,	0	− 17,39″	0,00″	− 1,	+ 4,	− 1	− 12,31″	+ 1,69″
1,	− 1,	0	+ 17,37	− 0,08	1,	+ 2,	− 1	+ 0,59	− 0,05
0,	1,	0	− 2,69	− 5,60	0,	3,	− 1	+ 1,28 x	+ 9,66 x
− 1,	+ 2,	0	+ 1,50	+ 1,61	0,	4,	− 1	+ 4,74	+ 1,86
1,	0,	0	+ 1,01	+ 4,19	− 1,	+ 5,	− 1	− 5,22	− 1,94
0,	1,	0	− 2,22 x	− 0,27 x	1,	+ 3,	− 1	+ 0,08	+ 0,05
0,	2,	0	+ 4,72	+ 15,98	0,	4,	− 1	− 1,46 x	+ 4,23 x
− 1,	+ 3,	0	− 4,63	− 14,58	0,	0,	− 2	− 11,11	+ 13,09
1,	+ 1,	0	− 0,11	− 1,38	− 1,	+ 1,	− 2	+ 5,55	− 6,59
0,	2,	0	− 10,06 x	+ 3,36 x	1,	− 1,	− 2	+ 5,53	− 6,49
0,	3,	0	− 0,72	+ 5,52	0,	0,	− 2	0 x	0 x
− 1,	+ 4,	0	+ 0,97	− 4,96	0,	1,	− 2	− 2,60	− 0,09
1,	+ 2,	0	− 0,23	− 0,70	− 1,	+ 2,	− 2	+ 1,87	+ 1,89
0,	3,	0	− 3,61 x	− 0,52 x	1,	0,	− 2	+ 0,96	− 1,58
0,	− 1,	− 1	− 29,32	− 15,87	0,	1,	− 2	+ 2,44 x	− 0,29 x
− 1,	0,	− 1	+ 22,80	+ 12,14	0,	2,	− 2	+ 24,18	+ 10,51
1,	− 2,	− 1	+ 6,54	+ 3,72	− 1,	+ 3,	− 2	− 21,53	− 9,02
0,	− 1,	− 1	+ 6,31 x	− 12,18 x	1,	+ 1,	− 2	− 2,66	− 1,38
0,	0,	− 1	+ 3,08	+ 0,38	0,	2,	− 2	− 5,81 x	+ 14,16 x
− 1,	+ 1,	− 1	− 1,81	− 0,41	0,	3,	− 2	+ 4,06	+ 8,84
1,	− 1,	− 1	− 1,43	+ 0,20	− 1,	+ 4,	− 2	− 3,28	− 8,68
0,	0,	− 1	0 x	0 x	1,	+ 2,	− 2	− 0,72	− 0,11
0,	1,	− 1	− 9,55	+ 45,77	0,	3,	− 2	− 6,29 x	+ 2,33 x
− 1,	+ 2,	− 1	+ 2,78	− 16,32	0,	4,	− 2	+ 0,59	− 7,18
1,	0,	− 1	+ 6,68	− 29,40	− 1,	+ 5,	− 2	− 0,62	+ 8,42
0,	1,	− 1	+ 9,80 x	+ 2,24 x	1,	+ 3,	− 2	+ 0,07	− 1,27
0,	2,	− 1	− 8,11	+ 4,17	0,	4,	− 2	+ 7,17 x	+ 0,64 x
− 1,	+ 3,	− 1	+ 6,45	− 2,53	0,	5,	− 2	+ 2,23	− 3,83
1,	+ 2,	− 1	+ 1,03	− 1,25	− 1,	+ 6,	− 2	− 2,54	+ 4,19
0,	2,	− 1	− 0,65 x	− 3,72 x	1,	+ 4,	− 2	+ 0,33	− 0,35
0,	3,	− 1	+ 11,78	− 1,58	0,	5,	− 2	+ 3,58 x	+ 2,18 x

Digitized by Google

U'

κ	i'	i	sin	cos	κ	i'	i	sin	cos
					0,	5,	− 2	+ 0,94	+ 1,09
0,	0,	0	....	− 1,08	− 1,	6,	− 2	− 0,48	− 0,62
1,	− 1,	0	+ 0,11	+ 0,82	1,	4,	− 2	− 0,45	− 0,34
0,	1,	0	− 4,02	− 16,84	0,	2,	− 3	− 7,00	+ 3,34
− 1,	2,	0	+ 1,97	+ 9,34	− 1,	3,	− 3	+ 1,81	− 3,95
1,	0,	0	+ 2,01	+ 9,39	1,	1,	− 3	+ 4,07	− 0,89
0,	2,	0	− 1,92	− 2,69	0,	3,	− 3	− 80,03	− 108,41
− 1,	3,	0	+ 0,98	+ 1,47	− 1,	4,	− 3	+ 39,12	+ 53,79
1,	1,	0	+ 0,87	+ 0,95	1,	2,	− 3	+ 40,16	+ 54,37
0,	− 1,	− 1	....	....	0,	4,	− 3	− 43,59	− 17,31
− 1,	0,	− 1	....	....	− 1,	5,	− 3	+ 22,15	+ 9,47
1,	− 2,	− 1	....	....	1,	3,	− 3	+ 20,19	+ 6,35
0,	0,	− 1	+ 13,97	+ 65,35	0,	5,	− 3	− 10,04	+ 1,99
− 1,	1,	− 1	− 11,55	− 54,30	− 1,	6,	− 3	+ 5,36	− 0,84
1,	− 1,	− 1	− 5,45	− 25,40	1,	4,	− 3	+ 4,08	− 1,39
0,	1,	− 1	− 217,36	− 1026,96	0,	6,	− 3	− 1,27	+ 1,30
− 1,	2,	− 1	+ 108,89	+ 511,51	− 1,	7,	− 3	+ 0,72	− 0,66
1,	0,	− 1	+ 108,81	+ 515,10	1,	5,	− 3	+ 0,42	− 0,60
0,	2,	− 1	+ 17,15	− 62,65	0,	7,	− 3	− 0,04	+ 0,28
− 1,	3,	− 1	− 6,93	+ 38,36	− 1,	8,	− 3	+ 0,03	− 0,15
1,	0,	− 1	− 13,17	+ 9,77	1,	6,	− 3	0,00	− 0,11
0,	3,	− 1	+ 5,33	− 6,48	0,	3,	− 4	+ 11,57	− 4,92
− 1,	4,	− 1	− 2,70	+ 3,96	− 1,	4,	− 4	− 4,60	+ 1,11
1,	2,	− 1	− 2,36	+ 1,60	1,	2,	− 4	− 6,17	+ 2,91
0,	4,	− 1	+ 0,59	− 0,99	0,	4,	− 4	+ 56,05	− 63,84
− 1,	5,	− 1	− 0,33	+ 0,57	− 1,	5,	− 4	− 28,01	+ 31,19
1,	3,	− 1	− 0,18	+ 0,33	1,	4,	− 4	− 27,88	+ 32,06
0,	0,	− 2	+ 0,72	+ 5,38	0,	5,	− 4	+ 7,05	− 35,92
− 1,	1,	− 2	− 1,03	− 5,10	− 1,	6,	− 4	− 3,91	+ 18,38
1,	− 1,	− 2	− 0,10	− 1,89	1,	4,	− 4	− 2,35	+ 16,63
0,	1,	− 2	− 29,32	− 115,63	0,	6,	− 4	− 3,48	− 8,82
− 1,	2,	− 2	+ 10,79	+ 59,30	− 1,	7,	− 4	+ 1,71	+ 4,63
1,	0,	− 2	+ 15,96	+ 57,39	1,	5,	− 4	+ 1,84	+ 3,70
0,	2,	− 2	− 183,01	+ 72,61	0,	7,	− 4	− 1,57	− 1,17
− 1,	3,	− 2	+ 91,11	− 34,55	− 1,	8,	− 4	+ 0,80	+ 0,66
1,	1,	− 2	+ 91,05	− 39,04	1,	6,	− 4	+ 0,71	+ 0,39
0,	3,	− 2	− 27,14	+ 44,20	0,	8,	− 4	− 0,33	0,00
− 1,	4,	− 2	+ 14,87	− 22,38	− 1,	9,	− 4	+ 0,18	+ 0,01
1,	2,	− 2	+ 9,68	− 20,67	1,	7,	− 4	+ 0,14	− 0,01
0,	4,	− 2	+ 0,73	+ 9,39	0,	9,	− 4	− 0,04	+ 0,03
− 1,	5,	− 2	− 0,10	− 5,00	− 1,	10,	− 4	+ 0,02	− 0,01
1,	3,	− 2	− 0,97	− 3,72	1,	8,	− 4	+ 0,02	− 0,01

$n'Z' \times \int T'_1 d\tau$

Γ	γ	g′	g	sin	cos
0,	0,	0,	0	. . . .	$+ 0{,}''05024$
0,	1,	−1,	0	$- 2{,}''444$	$- 0{,}03254$
0,	0,	0,	0	. . . .	$- 5{,}904\,\Gamma$
0,	1,	−1,	0	$- 0{,}00738\,\Gamma$	$+ 5{,}896\,\Gamma$
1,	0,	−1,	0	$+ 5{,}862$	$+ 0{,}04508$
1,	−1,	0,	0	$- 4{,}179$	$0{,}00000$
1,	1,	−2,	0	$- 1{,}678$	$- 0{,}03522$
1,	0,	−1,	0	$- 0{,}04186\,\gamma$	$- 1{,}874\,\gamma$
1,	0,	−1,	0	$+ 5{,}00\,n't$	$- 210{,}37\,n't$
1,	−1,	0,	0	$0\,n't$	$+ 24{,}04\,n't$
1,	1,	−2,	0	$- 13{,}84\,n't$	$+ 171{,}48\,n't$
1,	0,	−1,	0	$+ 110{,}81\,\gamma n't$	$+ 10{,}65\,\gamma n't$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . . .	. . . .
0,	0,	1,	0	$- 0{,}163$	$+ 1{,}251$
0,	−1,	2,	0	$+ 0{,}106$	$- 1{,}266$
0,	1,	0,	0	$+ 0{,}09083$	$- 0{,}00131$
0,	0,	1,	0	$+ 0{,}063\,\Gamma$	$- 0{,}866\,\Gamma$
0,	−1,	2,	0	$- 0{,}120\,\Gamma$	$+ 0{,}581\,\Gamma$
0,	1,	0,	0 {	$+ 0{,}04179\,\Gamma$	$+ 0{,}16678\,\Gamma$
				$+ 0{,}0128719\,\Gamma$	$+ 0{,}0208211\,\Gamma$
0,	0,	1,	0	$- 0{,}279\,\gamma\Gamma$	$- 0{,}153\,\gamma\Gamma$
1,	0,	0,	0	$+ 0{,}09280$	$- 0{,}04322$
1,	−1,	1,	0	$- 0{,}11106$	$+ 0{,}05040$
1,	1,	−1,	0	$+ 0{,}04238$	$- 0{,}00663$
1,	0,	0,	0	$- 0{,}04179\,\gamma$	$- 0{,}16678\,\gamma$
−1,	0,	2,	0	$- 0{,}708$	$+ 0{,}751$
−1,	−1,	3,	0	$+ 0{,}534$	$- 0{,}752$
−1,	1,	1,	0	$+ 0{,}119$	$- 0{,}009$
−1,	0,	2,	0	$+ 0{,}545\,\gamma$	$+ 0{,}239\,\gamma$
1,	0,	0,	0	$- 1287{,}19\,n't$	$- 2082{,}11\,n't$
1,	−1,	1,	0	$+ 642{,}93\,n't$	$+ 1039{,}40\,n't$
1,	1,	−1,	0	$+ 642{,}93\,n't$	$+ 1039{,}40\,n't$
−1,	0,	2,	0	$- 13\,n't$	$- 20\,n't$
−1,	−1,	3,	0	$+ 13\,n't$	$+ 17\,n't$
−1,	1,	1,	0	. . . .	$+ 3\,n't$
−1,	0,	2,	0	$- 13\,\gamma n't$	$+ 10\,\gamma n't$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . . .	. . . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . . .	. . . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . . .	. . . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . . .	. . . .
0,	0,	2,	0	$- 0{,}298$	$+ 0{,}664$
0,	−1,	3,	0	$- 0{,}041$	$- 0{,}052$

Γ	γ	g′	g	sin	cos
0,	1,	1,	0	$+ 0{,}''345$	$- 0{,}''632$
0,	0,	2,	0	$- 0{,}159\,\Gamma$	$- 0{,}026\,\Gamma$
0,	−1,	3,	0	$+ 0{,}170\,\Gamma$	$+ 0{,}002\,\Gamma$
0,	1,	1,	0	$- 0{,}020\,\Gamma$	$+ 0{,}011\,\Gamma$
0,	0,	2,	0	$+ 0{,}015\,\gamma\Gamma$	$+ 0{,}120\,\gamma\Gamma$
1,	0,	1,	0	$+ 0{,}024$	$- 0{,}007$
1,	−1,	2,	0	$- 0{,}022$	$+ 0{,}008$
1,	1,	0,	0	$0{,}000$	$0{,}000$
1,	0,	1,	0	$- 0{,}005\,\gamma$	$- 0{,}017\,\gamma$
1,	0,	3,	0	$- 0{,}243$	$+ 0{,}515$
−1,	−1,	4,	0	$- 0{,}027$	$- 0{,}076$
−1,	1,	2,	0	$+ 0{,}258$	$- 0{,}457$
−1,	0,	3,	0	$- 0{,}282\,\gamma$	$- 0{,}223\,\gamma$
1,	0,	1,	0	$- 190\,n't$	$- 89\,n't$
1,	−1,	2,	0	$+ 159\,n't$	$+ 64\,n't$
1,	1,	0,	0	$+ 21{,}50\,n't$	$+ 10{,}74\,n't$
1,	0,	1,	0	$- 40\,\gamma n't$	$+ 104\,\gamma n't$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . . .	. . . .
0,	0,	3,	0	$+ 0{,}008$	$+ 2{,}047$
0,	−1,	4,	0	$+ 0{,}007$	$+ 0{,}198$
0,	1,	2,	0	$- 0{,}019$	$- 2{,}233$
0,	0,	3,	0	$- 0{,}071\,\Gamma$	$0{,}000\,\Gamma$
0,	−1,	4,	0	$0{,}000\,\Gamma$	$0{,}000\,\Gamma$
0,	1,	2,	0	$+ 0{,}077\,\Gamma$	$- 0{,}001\,\Gamma$
0,	0,	3,	0	$- 0{,}001\,\gamma\Gamma$	$- 0{,}063\,\Gamma\gamma$
−1,	0,	4,	0	$- 0{,}174$	$- 0{,}068$
−1,	−1,	5,	0	$+ 0{,}258$	$+ 0{,}090$
−1,	1,	3,	0	$- 0{,}087$	$- 0{,}015$
−1,	0,	4,	0	$- 0{,}081\,\gamma$	$+ 0{,}252\,\gamma$
1,	0,	2,	0	$- 24\,n't$	$+ 3\,n't$
1,	−1,	3,	0	$+ 21\,n't$	$- 4\,n't$
1,	1,	1,	0	$+ 3\,n't$	$+ 1\,n't$
1,	0,	2,	0	$+ 4\,\gamma n't$	$+ 16\,\gamma n't$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . . .	. . . .
0,	0,	4,	0	$- 0{,}791$	$+ 0{,}122$
0,	−1,	5,	0	$+ 1{,}140$	$- 0{,}216$
0,	1,	3,	0	$- 0{,}351$	$+ 0{,}126$
0,	0,	4,	0	$- 0{,}005\,\Gamma$	$- 0{,}028$
0,	−1,	5,	0	$+ 0{,}007\,\Gamma$	$+ 0{,}039\,\Gamma$
0,	0,	4,	0	$- 0{,}038\,\Gamma\gamma$	$- 0{,}055\,\Gamma\gamma$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . . .	. . . .
0,	0,	−2,	−1	$- 1{,}173$	$+ 0{,}265$

Digitized by Google

Γ γ g′ g	sin	cos	Γ γ g′ g	sin	cos
0, −1, −1, −1	+ 1″,390	− 0″,311	0, 1, 0, −1	+ 0″,183	+ 0″,732
0, 1, −3, −1	− 0,222	+ 0,051	0, 0, 1, −1	+ 7,304 Γ	− 1,556 Γ
0, 0, −2, −1	+ 0,009 Γ	+ 0,040 Γ	0, −1, 2, −1	− 1,338 Γ	+ 0,303 Γ
0, −1, −1, −1	− 0,010 Γ	− 0,048 Γ	0, 1, 0, −1	− 5,944 Γ	+ 1,250 Γ
0, −0, −2, −1	+ 0,042 Γγ	− 0,009 Γγ	0, 0, 1, −1	+ 0,722 Γγ	+ 3,447 Γγ
. . . .	. . . .	. . . .	−1, 0, 2, −1	− 0,601	− 2,644
0, 0, −1, −1	− 0,330	+ 0,376	−1, −1, 3, −1	+ 0,005	− 0,011
0, −1, 0, −1	+ 0,412	− 0,313	−1, 1, 1, −1	+ 0,583	+ 2,650
0, 1, −2, −1	− 0,082	− 0,064	−1, 0, 2, −1	+ 1,980 γ	− 0,465 γ
0, −0, −1, −1	+ 0,004 Γ	+ 0,028 Γ	1, 0, 0, −1	+ 0,880	+ 4,290
0, −1, 0, −1	− 0,025 Γ	− 0,025 Γ	1, −1, 1, −1	− 0,175	− 0,957
0, 1, −2, −1	+ 0,023 Γ	− 0,005 Γ	1, 1, −1, −1	− 0,705	− 3,310
0, 0, −1, −1	+ 0,012 Γγ	− 0,035 Γγ	1, 0, 0, −1	− 1,779 γ	+ 0,408 γ
1, 0, −2, −1	− 0,210	+ 0,242	1, 0, 0, −1	+ 91 n′t	− 34 n′t
1, 1, −3, −1	− 0,046	− 0,026	1, −1, 1, −1	− 99 n′t	+ 68 n′t
1, −1, −1, −1	+ 0,255	− 0,209	1, 1, −1, −1	+ 4 n′t	− 31 n′t
1, 0, −2, −1	+ 0,141 γ	+ 0,221 γ	1, 0, 0, −1	0 γn′t	0 γn′t
−1, 0, 0, −1	+ 71 n′t	+ 66 n′t	−1, 0, 2, −1	+ 244 n′t	− 43 n′t
−1, −1, 1, −1	− 105 n′t	− 58 n′t	−1, −1, 3, −1	− 133 n′t	+ 93 n′t
−1, 1, −1, −1	+ 30 n′t	− 9 n′t	−1, 1, 1, −1	− 46 n′t	− 26 n′t
−1, 0, 0, −1	0 γn′t	0 γn′t	−1, 0, 2, −1	− 126 γn′t	+ 35 γn′t
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
0, 0, 0, −1	− 0,084	− 0,145	0, 0, 2, −1	− 0,880	− 0,137
0, −1, 1, −1	+ 0,465	− 0,222	0, −1, 3, −1	+ 0,555	+ 0,189
0, 1, −1, −1	− 0,380	+ 0,342	0, 1, 1, −1	+ 0,301	− 0,053
0, 0, 0, −1	+ 0,472 Γ	− 0,437 Γ	0, 0, 2, −1	+ 0,667 Γ	− 0,277 Γ
0, −1, 1, −1	− 0,131 Γ	+ 0,170 Γ	0, −1, 3, −1	− 0,323 Γ	+ 0,203 Γ
0, 1, −1, −1	− 0,328 Γ	+ 0,290 Γ	0, 1, 1, −1	− 0,285 Γ	+ 0,070 Γ
0, 0, 0, −1	+ 0,099 Γγ	+ 0,266 Γγ	0, 0, 2, −1	− 0,081 Γγ	+ 0,096 Γγ
1, 0, −1, −1	+ 0,014	+ 0,470	1, 0, 1, −1	+ 0,204	+ 0,238
1, −1, 0, −1	− 0,037	− 0,202	1, −1, 2, −1	− 0,178	− 0,149
1, 1, −2, −1	+ 0,023	− 0,264	1, 1, 0, −1	− 0,013	− 0,049
1, 0, −1, −1	− 0,086 γ	− 0,043 γ	1, 0, 1, −1	+ 0,014 γ	− 0,110 γ
−1, 0, 1, −1	− 0,319	+ 0,035	−1, 0, 3, −1	− 0,411	− 0,219
−1, −1, 2, −1	− 0,019	+ 0,023	−1, −1, 4, −1	+ 0,086	− 0,121
−1, 1, 0, −1	+ 0,349	− 0,044	−1, 1, 2, −1	+ 0,301	+ 0,290
−1, 0, 1, −1	+ 0,018 γ	− 0,278 γ	−1, 0, 3, −1	+ 0,332 γ	− 0,109 γ
−1, 0, 1, −1	+ 4198 n′t	+ 1513 n′t	1, 0, 1, −1	+ 3228 n′t	− 3079 n′t
−1, −1, 2, −1	+ 297 n′t	+ 98 n′t	1, −1, 2, −1	+ 221 n′t	− 222 n′t
−1, 1, 0, −1	− 4491 n′t	− 1611 n′t	1, 1, 0, −1	− 3449 n′t	+ 3299 n′t
−1, 0, 1, −1	− 1285 γn′t	+ 3586 γn′t	1, 0, 1, −1	+ 2635 γn′t	+ 2750 γn′t
. . . .	. . . .	. . . .	−1, 0, 3, −1	+ 26 n′t	− 27 n′t
0, 0, 1, −1	− 0,391	− 1,429	−1, −1, 4, −1	− 19 n′t	+ 31 n′t
0, −1, 2, −1	+ 0,200	+ 0,675	−1, 1, 2, −1	− 4 n′t	− 2 n′t

Digitized by Google

Γ γ g′ g	sin	cos	Γ γ g′ g	sin	cos
−1, 0, 3, −1	− 29″ γn′t	− 11″ γn′t	0, 1, −1, −2	− 0,062″	− 0,034″
. . . .	. . . .	. . . .	1, 0, −1, −2	− 0,133	− 0,093
0, 0, 3, −1	− 0,846	− 0,190	1, −1, 0, −2	+ 0,166	+ 0,115
0, −1, 4, −1	+ 0,332	− 0,032	1, 1, −2, −2	− 0,034	− 0,022
0, 1, 2, −1	+ 0,315	+ 0,262	1, 0, −1, −2	− 0,104 γ	+ 0,153 γ
0, 0, 3, −1	+ 0,015 Γ	− 0,103 Γ	−1, 0, 1, −2	+ 296 n′t	+ 91 n′t
0, −1, 4, −1	− 0,007 Γ	+ 0,057 Γ	−1, −1, 2, −2	+ 127 n′t	+ 68 n′t
0, 1, 2, −1	− 0,006 Γ	+ 0,051 Γ	−1, 1, 0, −2	− 424 n′t	− 148 n′t
0, 0, 3, −1	− 0,033 Γγ	+ 0,014 Γγ	−1, 0, 1, −2	− 153 γn′t	+ 409 γn′t
1, 0, 2, −1	+ 0,037	+ 0,007	. . . .	. . . .	. . . .
1, −1, 3, −1	− 0,035	− 0,002	0, 0, 1, −2	+ 0,094	− 0,160
1, 1, 1, −1	0,000	0,000	0, −1, 2, −2	+ 0,056	+ 0,174
1, 0, 2, −1	+ 0,001 γ	− 0,027 γ	0, 1, 0, −2	− 0,138	+ 0,004
−1, 0, 4, −1	− 2,675	− 0,867	0, 0, 1, −2	+ 0,409 Γ	+ 0,030 Γ
−1, −1, 5, −1	+ 2,844	+ 0,920	0, −1, 2, −2	+ 0,069 Γ	− 0,160 Γ
−1, 1, 3, −1	− 0,166	− 0,066	0, 1, 0, −2	− 0,476 Γ	+ 0,142 Γ
−1, 0, 4, −1	− 0,734 γ	+ 2,266 γ	0, 0, 1, −2	+ 0,127 Γγ	+ 0,347 Γγ
1, 0, 2, −1	+ 70 n′t	− 237 n′t	1, 0, 0, −2	− 0,091	+ 0,194
1, −1, 3, −1	+ 23 n′t	+ 161 n′t	1, −1, 1, −2	+ 0,181	+ 0,051
1, 1, 1, −1	− 44 n′t	+ 30 n′t	1, 1, −1, −2	− 0,080	− 0,232
1, 0, 2, −1	− 24 γn′t	+ 129 γn′t	1, 0, 0, −2	− 0,245 γ	+ 0,110 γ
. . . .	. . . .	. . . .	−1, 0, 2, −2	− 0,219	− 0,179
0, 0, 4, −1	− 11,300	+ 2,266	−1, −1, 3, −2	− 0,007	− 0,028
0, −1, 5, −1	+ 12,088	− 2,406	−1, 1, 1, −2	+ 0,238	+ 0,215
0, 1, 3, −1	− 0,796	+ 0,137	−1, 0, 2, −2	+ 0,066 γ	− 0,173 γ
0, 0, 4, −1	− 0,078 Γ	− 0,390 Γ	−1, 0, 2, −2	− 113 n′t	+ 785 n′t
0, −1, 5, −1	+ 0,083 Γ	+ 0,417 Γ	−1, −1, 3, −2	+ 135 n′t	− 853 n′t
0, 1, 3, −1	− 0,005 Γ	− 0,028 Γ	−1, 1, 1, −2	− 14 n′t	+ 76 n′t
0, 0, 4, −1	− 0,333 Γγ	+ 0,065 Γγ	−1, 0, 2, −2	+ 698 γn′t	+ 120 γn′t
−1, 0, 5, −1	− 0,058	+ 0,005	. . . .	. . . .	. . . .
−1, −1, 6, −1	− 0,012	− 0,015	0, 0, 2, −2	+ 2,441	− 1,138
−1, 1, 4, −1	+ 0,072	+ 0,013	0, −1, 3, −2	+ 0,125	+ 0,025
−1, 0, 5, −1	0,000 γ	0,000 γ	0, 1, 1, −2	− 2,543	+ 1,115
1, 0, 3, −1	− 12 n′t	− 27 n′t	0, 0, 2, −2	+ 2,266 Γ	+ 5,103 Γ
1, −1, 4, −1	+ 19 n′t	+ 31 n′t	0, −1, 3, −2	− 0,287 Γ	− 0,711 Γ
1, 1, 2, −1	− 4 n′t	− 2 n′t	0, 1, 1, −2	− 1,956 Γ	− 4,370 Γ
1, 0, 3, −1	− 23 γn′t	+ 21 γn′t	0, 0, 2, −2	− 2,750 Γγ	+ 1,256 Γγ
. . . .	. . . .	. . . .	1, 0, 1, −2	− 3,680	+ 1,611
0, 0, 5, −1	− 0,207	+ 0,142	1, −1, 2, −2	+ 0,252	− 0,075
0, −1, 6, −1	− 0,072	− 0,036	1, 1, 0, −2	+ 3,427	− 1,526
0, 1, 4, −1	+ 0,290	− 0,108	1, 0, 1, −2	− 1,090 γ	− 2,375 γ
. . . .	. . . .	. . . .	−1, 0, 3, −2	+ 1,090	− 0,524
0, 0, 0, −2	− 0,262	− 0,208	−1, −1, 4, −2	− 0,238	+ 0,095
0, −1, 1, −2	+ 0,324	+ 0,224	−1, 1, 2, −2	− 0,829	+ 0,412

Digitized by Google

Γ γ g′ g	sin	cos	Γ γ g′ g	sin	cos
−1, 0, 3, −2	+ 0″,241 γ	+ 0″,452 γ	1, 0, 3, −2	+ 0″,043 γ	− 0″,015 γ
1, 0, 1, −2	+214 n′t	−223 n′t	−1, 0, 5, −2	+ 0,15201	− 1,50263
1, −1, 2, −2	+117 n′t	− 84 n′t	−1, −1, 6, −2	− 0,06783	+ 0,71933
1, 1, 0, −2	−322 n′t	+314 n′t	−1, 1, 4, −2	− 0,08292	+ 0,77401
1, 0, 1, −2	+297 γn′t	+321 γn′t	−1, 0, 5, −2	+ 0,03187 γ	+ 0,01220 γ
−1, 0, 3, −2	+ 76 n′t	+221 n′t	1, 0, 3, −2	+232 n′t	+ 31 n′t
−1, −1, 4, −2	− 91 n′t	−238 n′t	1, −1, 4, −2	−253 n′t	− 24 n′t
−1, 1, 2, −2	+ 15 n′t	+ 17 n′t	1, 1, 2, −2	+ 20 n′t	− 9 n′t
−1, 0, 3, −2	+210 γn′t	− 78 γn′t	1, 0, 3, −2	+ 24 γn′t	−224 γn′t
. . . .	. . . .	. . . .	−1, 0, 5, −2	+ 6,89 n′t	+ 1,43 n′t
0, 0, 3, −2	− 0,080	− 1,566	−1, −1, 6, −2	− 7,56 n′t	− 0,99 n′t
0, −1, 4, −2	− 0,090	+ 0,027	−1, 1, 4, −2	+ 0,67 n′t	− 0,44 n′t
0, 1, 2, −2	+ 0,224	+ 1,508	−1, 0, 5, −2	+ 1,07 γn′t	− 7,07 γn′t
0, 0, 3, −2	+ 0,152 Γ	+ 0,739 Γ	. . . .	. . . .	. . . .
0, −1, 4, −2	− 0,438 Γ	− 0,209 Γ	0, 0, 5, −2	− 2,52049	− 5,83215
0, 1, 2, −2	+ 0,296 Γ	− 0,462 Γ	0, −1, 6, −2	+ 1,26750	+ 2,91824
0, 0, 3, −2	− 0,261 Γγ	− 0,577 Γγ	0, 1, 4, −2	+ 1,24773	+ 2,90355
1, 0, 2, −2	− 0,275	+ 0,285	0, 0, 5, −2	+ 0,21565 Γ	− 0,09305 Γ
1, −1, 3, −2	+ 0,123	− 0,250	0, −1, 6, −2	− 0,11135 Γ	+ 0,04848 Γ
1, 1, 1, −2	+ 0,112	− 0,027	0, 1, 4, −2	− 0,10309 Γ	+ 0,04398 Γ
1, 0, 2, −2	+ 0,147 γ	− 0,059 γ	0, 0, 5, −2	− 0,00276 Γγ	− 0,00667 Γγ
−1, 0, 4, −2	+ 0,134	− 0,563	1, 0, 4, −2	+ 0,00218	+ 0,00574
−1, −1, 5, −2	− 0,00517	+ 0,00841	1, −1, 5, −2	− 0,00173	− 0,00641
−1, 1, 3, −2	− 0,110	+ 0,548	1, 1, 3, −2	− 0,00067	+ 0,00074
−1, 0, 4, −2	+ 0,414 γ	+ 0,094 γ	1, 0, 4, −2	+ 0,00613 γ	− 0,00122 γ
1, 0, 2, −2	+651 n′t	+453 n′t	−1, 0, 6, −2	− 0,05833	− 0,10251
1, −1, 3, −2	−705 n′t	−501 n′t	−1, −1, 7, −2	+ 0,05148	+ 0,07202
1, 1, 1, −2	+ 62 n′t	+ 46 n′t	−1, 1, 5, −2	+ 0,00786	+ 0,01938
1, 0, 2, −2	+420 γn′t	−570 γn′t	−1, 0, 6, −2	− 0,03850 γ	+ 0,00338 γ
−1, 0, 4, −2	+ 33 n′t	+ 30 n′t	1, 0, 4, −2	+ 41,57 n′t	− 16,45 n′t
−1, −1, 5, −2	− 38,12 n′t	− 30,24 n′t	1, −1, 5, −2	− 44,08 n′t	+ 20,60 n′t
−1, 1, 3, −2	+ 5 n′t	− 1 n′t	1, 1, 3, −2	+ 2,51 n′t	− 4,15 n′t
−1, 0, 4, −2	+ 28 γn′t	− 35 γn′t	1, 0, 4, −2	− 18,14 γn′t	− 40,62 γn′t
. . . .	. . . .	. . . .	−1, 0, 6, −2	+ 0,93 n′t	− 0,34 n′t
0, 0, 4, −2	− 0,026	− 0,736	−1, −1, 7, −2	− 0,98 n′t	+ 0,44 n′t
0, −1, 5, −2	+ 0,02046	+ 0,15387	−1, 1, 5, −2	+ 0,04 n′t	− 0,10 n′t
0, 1, 3, −2	− 0,016	+ 0,564	−1, 0, 6, −2	− 0,39 γn′t	− 0,94 γn′t
0, 0, 4, −2	+ 0,200 Γ	− 0,019 Γ	. . . .	. . . .	. . . .
0, −1, 5, −2	− 0,08205 Γ	− 0,01863 Γ	0, 0, 6, −2	− 0,467	− 0,309
0, 1, 3, −2	− 0,099 Γ	+ 0,046 Γ	0, −1, 7, −2	+ 0,398	+ 0,236
0, 0, 4, −2	+ 0,024 Γγ	− 0,016 Γγ	0, 1, 5, −2	+ 0,05009	+ 0,03488
1, 0, 3, −2	− 0,020	+ 0,053	0, 0, 6, −2	+ 0,007 Γ	− 0,012 Γ
1, −1, 4, −2	+ 0,002	− 0,062	0, −1, 7, −2	− 0,002 Γ	+ 0,009 Γ
1, 1, 2, −2	+ 0,017	+ 0,004	0, 1, 5, −2	− 0,00194 Γ	+ 0,00213 Γ

Digitized by Google

Γ γ g′ g	sin	cos	Γ γ g′ g	sin	cos
0, 0, 6, −2	− 0″,007Γγ	− 0″,003Γγ	. . . .	. . . .	. . . .
1, 0, 5, −2	+ 0,00353	− 0,00009	0, 0, 3, −3	+ 0″,645	+ 0″,817
1, −1, 6, −2	− 0,00204	− 0,00029	0, −1, 4, −3	− 0,245	− 0,337
1, 1, 4, −2	− 0,00151	+ 0,00037	0, 1, 2, −3	− 0,380	− 0,453
1, 0, 5, −2	+ 0,00065 γ	− 0,00047 γ	0, 0, 3, −3	− 0,779Γ	+ 0,635Γ
−1, 0, 7, −2	− 0,016	− 0,011	0, −1, 4, −3	+ 1,357Γ	− 0,996Γ
−1, −1, 8, −2	+ 0,015	+ 0,008	0, 1, 2, −3	− 0,554Γ	+ 0,352Γ
−1, 1, 6, −2	+ 0,001	+ 0,002	0, 0, 3, −3	+ 1,042Γγ	+ 1,500Γγ
−1, 0, 7, −2	+ 0,007 γ	+ 0,013 γ	1, 0, 2, −3	− 0,552	− 0,758
1, 0, 5, −2	+ 4,37 n′t	− 5,53 n′t	1, −1, 3, −3	+ 0,613	+ 0,889
1, −1, 6, −2	− 4,26 n′t	+ 6,32 n′t	1, 1, 1, −3	− 0,060	− 0,087
1, 1, 4, −2	− 0,14 n′t	− 0,74 n′t	1, 0, 2, −3	− 0,753 γ	+ 0,516 γ
1, 0, 5, −2	− 5,85 γn′t	− 4,11 γn′t	−1, 0, 4, −3	− 0,233	− 0,401
0, 0, −1, −2	− 0,297	− 0,627	−1, −1, 5, −3	− 0,358	− 0,518
0, −1, 0, −2	+ 0,366	+ 0,778	−1, 1, 3, −3	+ 0,572	+ 0,893
0, 1, −2, −2	− 0,073	− 0,156	−1, 0, 4, −3	+ 1,089 γ	− 0,725 γ
0, 0, −1, −2	− 0,022Γ	+ 0,011Γ	1, 0, 2, −3	+ 31 n′t	− 8 n′t
0, −1, 0, −2	+ 0,027Γ	− 0,012Γ	1, −1, 3, −3	− 38 n′t	+ 14 n′t
0, 1, −2, −2	− 0,004Γ	0,000Γ	1, 1, 1, −3	+ 7 n′t	− 6 n′t
0, 0, −1, −2	+ 0,012Γγ	+ 0,024Γγ	1, 0, 2, −3	+ 4 γn′t	− 27 γn′t
1, 0, −2, −2	0,000	+ 0,016	−1, 0, 4, −3	−156 n′t	+ 92 n′t
1, −1, −1, −2	0,000	− 0,025	−1, −1, 5, −3	+177 n′t	−113 n′t
1, 1, −3, −2	− 0,002	+ 0,004	−1, 1, 3, −3	− 21 n′t	+ 20 n′t
1, 0, −2, −2	+ 0,019 γ	− 0,014 γ	−1, 0, 4, −3	+103 γn′t	+162 γn′t
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
0, 0, 2, −3	+ 0,288	− 0,161	0, 0, 4, −3	+ 0,703	+ 0,144
0, −1, 3, −3	− 0,001	+ 0,036	0, −1, 5, −3	− 0,375	+ 0,012
0, 1, 1, −3	− 0,306	+ 0,145	0, 1, 3, −3	− 0,322	− 0,183
0, 0, 2, −3	+ 0,268Γ	+ 0,533Γ	0, 0, 4, −3	− 0,195Γ	+ 0,167Γ
0, −1, 3, −3	− 0,011Γ	+ 0,102Γ	0, −1, 5, −3	+ 0,341Γ	− 0,474Γ
0, 1, 1, −3	− 0,286Γ	− 0,627Γ	0, 1, 3, −3	− 0,118Γ	+ 0,260Γ
0, 0, 2, −3	− 0,538Γγ	+ 0,230Γγ	0, 0, 4, −3	+ 0,619Γγ	+ 0,415Γγ
1, 0, 1, −3	− 0,367	+ 0,163	1, 0, 3, −3	− 0,280	− 0,146
1, −1, 2, −3	− 0,121	+ 0,053	1, −1, 4, −3	+ 0,318	+ 0,152
1, 1, 0, −3	+ 0,491	− 0,224	1, 1, 2, −3	− 0,015	− 0,004
1, 0, 1, −3	− 0,222 γ	− 0,455 γ	1, 0, 3, −3	− 0,140 γ	+ 0,284 γ
−1, 0, 3, −3	+ 0,152	− 0,119	−1, 0, 5, −3	− 0,238	− 0,163
−1, −1, 4, −3	+ 0,052	+ 0,056	−1, −1, 6, −3	− 0,348	− 0,096
−1, 1, 2, −3	− 0,202	+ 0,078	−1, 1, 4, −3	+ 0,559	+ 0,242
−1, 0, 3, −3	+ 0,038 γ	+ 0,172 γ	−1, 0, 5, −3	+ 0,294 γ	− 0,654 γ
−1, 0, 3, −3	−464 n′t	+ 34 n′t	1, 0, 3, −3	−176 n′t	+430 n′t
−1, −1, 4, −3	+549 n′t	− 40 n′t	1, −1, 4, −3	+209 n′t	−510 n′t
−1, 1, 2, −3	− 88 n′t	+ 7 n′t	1, 1, 2, −3	− 34 n′t	+ 81 n′t
−1, 0, 3, −3	+ 38 γn′t	+481 γn′t	1, 0, 3, −3	+448 γn′t	+179 γn′t

Digitized by Google

Γ γ g' g	sin	cos	Γ γ g' g	sin	cos
−1, 0, 5, −3	− 22 n't	+ 36 n't	0, −1, 8, −3	− 0″,014 Γ	− 0″,002 Γ
−1, −1, 6, −3	+ 23 n't	− 43 n't	0, 1, 6, −3	− 0,005 Γ	− 0,002 Γ
−1, 1, 4, −3	− 1 n't	+ 7 n't	0, 0, 7, −3	− 0,011 Γγ	− 0,004 Γγ
−1, 0, 5, −3	+ 40 γn't	+ 22 γn't	−1, 0, 8, −3	+ 0,005	− 0,022
0, 0, 5, −3	+ 0,539	− 0,118	−1, −1, 9, −3	0,000	+ 0,022
0, −1, 6, −3	− 0,348	+ 0,204	−1, 1, 7, −3	− 0,004	− 0,002
0, 1, 4, −3	− 0,162	− 0,068	−1, 0, 8, −3	− 0,018 γ	0,000 γ
0, 0, 5, −3	− 0,031 Γ	− 0,002 Γ	1, 0, 6, −3	+ 8 n't	+ 4 n't
0, −1, 6, −3	+ 0,028 Γ	− 0,107 Γ	1, −1, 7, −3	− 8 n't	− 3 n't
0, 1, 4, −3	+ 0,007 Γ	+ 0,092 Γ	1, 1, 5, −3	0 n't	0 n't
0, 0, 5, −3	+ 0,170 Γγ	+ 0,016 Γγ	1, 0, 6, −3	+ 4 γn't	− 8 γn't
1, 0, 4, −3	− 0,057	+ 0,001	. . . .	. . . .	. . . .
1, −1, 5, −3	+ 0,063	− 0,004	0, 0, 8, −3	− 0,018	− 0,093
1, 1, 3, −3	− 0,008	+ 0,001	0, −1, 9, −3	+ 0,034	+ 0,086
1, 0, 4, −3	+ 0,007 γ	+ 0,058 γ	0, 1, 7, −3	− 0,016	+ 0,004
−1, 0, 6, −3	+ 2,729	− 0,259	. . . .	. . . .	. . . .
−1, −1, 7, −3	+ 0,137	− 0,012	−1, 0, 4, −4	− 78 n't	−257 n't
−1, 1, 5, −3	− 2,884	+ 0,267	−1, −1, 5, −4	+ 96 n't	+309 n't
−1, 0, 6, −3	+ 0,215 γ	+ 2,240 γ	−1, 1, 3, −4	− 20 n't	− 54 n't
1, 0, 4, −3	+ 13 n't	+181 n't	−1, 0, 4, −4	−289 γn't	+ 89 γn't
1, −1, 5, −3	− 22 n't	−209 n't	. . . .	. . . .	. . . .
1, 1, 3, −3	+ 9 n't	+ 28 n't	0, 0, 4, −4	− 0,422	+ 0,498
1, 0, 4, −3	+191 γn't	− 19 γn't	0, −1, 5, −4	+ 0,302	− 0,327
. . . .	. . . .	. . . .	0, 1, 3, −4	+ 0,129	− 0,195
0, 0, 6, −3	+ 9,424	− 6,632	0, 0, 4, −4	− 0,323 Γ	− 0,303 Γ
0, −1, 7, −3	+ 0,648	− 0,483	0, −1, 5, −4	+ 0,608 Γ	+ 0,524 Γ
0, 1, 5, −3	− 10,068	+ 7,110	0, 1, 3, −4	− 0,261 Γ	− 0,204 Γ
0, 0, 6, −3	+ 0,228 Γ	+ 0,326 Γ	0, 0, 4, −4	− 0,590 Γγ	+ 0,706 Γγ
0, −1, 7, −3	+ 0,017 Γ	+ 0,022 Γ	1, 0, 3, −4	+ 0,321	− 0,356
0, 1, 5, −3	− 0,245 Γ	− 0,347 Γ	1, −1, 4, −4	− 0,406	+ 0,453
0, 0, 6, −3	− 0,277 Γγ	+ 0,195 Γγ	1, 1, 2, −4	+ 0,068	− 0,078
−1, 0, 7, −3	+ 0,123	− 0,087	1, 0, 3, −4	− 0,427 γ	− 0,381 γ
−1, −1, 8, −3	− 0,050	+ 0,084	−1, 0, 5, −4	+ 0,142	− 0,190
−1, 1, 6, −3	− 0,032	− 0,004	−1, −1, 6, −4	+ 0,074	− 0,099
−1, 0, 7, −3	− 0,060 γ	+ 0,052 γ	−1, 1, 4, −4	− 0,207	+ 0,300
1, 0, 5, −3	+ 22 n't	+ 36 n't	−1, 0, 5, −4	+ 0,329 γ	+ 0,218 γ
1, −1, 6, −3	− 29 n't	− 39 n't	1, 0, 3, −4	+ 13 n't	+ 29 n't
1, 1, 4, −3	+ 7 n't	+ 3 n't	1, −1, 4, −4	− 18 n't	− 35 n't
1, 0, 5, −3	+ 38 γn't	− 26 γn't	1, 1, 2, −4	+ 1 n't	+ 6 n't
. . . .	. . . .	. . . .	1, 0, 3, −4	+ 31 γn't	− 5 γn't
0, 0, 7, −3	+ 0,269	− 0,579	−1, 0, 5, −4	− 89 n't	− 95 n't
0, −1, 8, −3	− 0,002	+ 0,419	−1, −1, 6, −4	+109 n't	+112 n't
0, 1, 6, −3	− 0,125	+ 0,060	−1, 1, 4, −4	− 20 n't	− 17 n't
0, 0, 7, −3	+ 0,021 Γ	+ 0,009 Γ	−1, 0, 5, −4	−105 γn't	+102 γn't

Digitized by Google

Γ γ g′ g	sin	cos	Γ γ g′ g	sin	cos
. . . .	. . . . ″ . . .	. . . . ″	0, 0, 7, −4	− 0″,049 Γ	+ 0″,052 Γ
0, 0, 5, −4	− 0,007	+ 0,446	0, −1, 8, −4	+ 0,053 Γ	− 0,055 Γ
0, −1, 6, −4	− 0,043	− 0,351	0, 1, 6, −4	− 0,004 Γ	+ 0,005 Γ
0, 1, 4, −4	+ 0,057	− 0,127	0, 0, 7, −4	+ 0,045 Γγ	+ 0,045 Γγ
0, 0, 5, −4	− 0,124 Γ	− 0,038 Γ	−1, 0, 8, −4	+ 0,099	+ 0,102
0, −1, 6, −4	+ 0,292 Γ	+ 0,070 Γ	−1, −1, 9, −4	− 0,112	− 0,107
0, 1, 4, −4	− 0,122 Γ	− 0,030 Γ	−1, 1, 7, −4	+ 0,013	+ 0,006
0, 0, 5, −4	− 0,082 Γγ	+ 0,393 Γγ	−1, 0, 8, −4	+ 0,095 γ	− 0,098 γ
1, 0, 4, −4	+ 0,055	− 0,204	1, 0, 6, −4	− 26 n′t	+ 25 n′t
1, −1, 5, −4	− 0,059	+ 0,241	1, −1, 7, −4	+ 29 n′t	− 31 n′t
1, 1, 3, −4	− 0,005	− 0,022	1, 1, 5, −4	− 3 n′t	+ 6 n′t
1, 0, 4, −4	− 0,221 γ	− 0,055 γ	1, 0, 6, −4	+ 30 γn′t	+ 28 γn′t
−1, 0, 6, −4	+ 0,249	− 0,185	. . . .	. . . .	. . . .
−1, −1, 7, −4	+ 0,062	− 0,033	0, 0, 8, −4	+ 0,601	+ 0,168
−1, 1, 5, −4	− 0,317	+ 0,212	0, −1, 9, −4	− 0,638	− 0,159
−1, 0, 6, −4	+ 0,223 γ	+ 0,261 γ	0, 1, 7, −4	+ 0,037	− 0,010
1, 0, 4, −4	−264 n′t	− 45 n′t	0, 0, 8, −4	− 0,006 Γ	+ 0,020 Γ
1, −1, 5, −4	+328 n′t	+ 57 n′t	0, −1, 9, −4	+ 0,006 Γ	− 0,023 Γ
1, 1, 3, −4	− 60 n′t	− 10 n′t	0, 1, 7, −4	0,000 Γ	+ 0,003 Γ
1, 0, 4, −4	− 49 γn′t	+299 γn′t	0, 0, 8, −4	+ 0,020 Γγ	+ 0,005 Γγ
. . . .	. . . .	. . . .	−1, 0, 9, −4	+ 0,026	+ 0,008
0, 0, 6, −4	+ 0,694	− 0,398	−1, −1, 10, −4	− 0,02873	− 0,00686
0, −1, 7, −4	+ 0,269	− 0,220	−1, 1, 8, −4	0,000	0,000
0, 1, 5, −4	− 0,953	+ 0,630	−1, 0, 9, −4	+ 0,006 γ	− 0,026 γ
0, 0, 6, −4	− 0,013 Γ	+ 0,029 Γ	1, 0, 7, −4	− 2 n′t	+ 8 n′t
0, −1, 7, −4	+ 0,050 Γ	− 0,014 Γ	1, −1, 8, −4	+ 2 n′t	− 9 n′t
0, 1, 5, −4	− 0,059 Γ	− 0,023 Γ	1, 1, 6, −4	0 n′t	+ 1 n′t
0, 0, 6, −4	− 0,009 Γγ	+ 0,100 Γγ	1, 0, 7, −4	+ 8 γn′t	+ 2 γn′t
1, 0, 5, −4	− 0,008	− 0,033	−1, 0, 9, −4	0 n′t	0 n′t
1, −1, 6, −4	+ 0,011	+ 0,038	−1, −1, 10, −4	+ 0,07 n′t	− 0,25 n′t
1, 1, 4, −4	− 0,001	− 0,002	−1, 1, 8, −4	0 n′t	0 n′t
1, 0, 5, −4	− 0,036 γ	+ 0,010 γ	−1, 0, 9, −4	0 γn′t	0 γn′t
−1, 0, 7, −4	+ 0,137	+ 0,419	. . . .	. . . .	. . . .
−1, −1, 8, −4	− 0,164	− 0,526	0, 0, 9, −4	+ 0,113	− 0,026
−1, 1, 6, −4	+ 0,030	+ 0,110	0, −1, 10, −4	− 0,12049	+ 0,03575
−1, 0, 7, −4	+ 0,485 γ	− 0,146 γ	0, 1, 8, −4	+ 0,005	− 0,009
1, 0, 5, −4	−125 n′t	+ 37 n′t	0, −1, 10, −4	− 0,00123 Γ	− 0,00416 Γ
1, −1, 6, −4	+149 n′t	− 48 n′t	−1, 0, 10, −4	+ 0,00417	− 0,00099
1, 1, 4, −4	− 24 n′t	+ 11 n′t	−1, −1, 11, −4	− 0,00441	+ 0,00140
1, 0, 5, −4	+ 45 γn′t	+140 γn′t	−1, 1, 9, −4	+ 0,00023	− 0,00040
. . . .	. . . .	. . . .	−1, 0, 10, −4	− 0,00123 γ	− 0,00416 γ
0, 0, 7, −4	+ 1,492	+ 1,403	1, 0, 8, −4	+ 1 n′t	+ 2 n′t
0, −1, 8, −4	− 1,607	− 1,551	1, −1, 9, −4	− 1 n′t	− 2 n′t
0, 1, 6, −4	+ 0,139	+ 0,142	1, 0, 8, −4	+ 1 γn′t	0 γn′t

Digitized by Google

Γ γ g' g	sin	cos	Γ γ g' g	sin	cos
. . . .	. . . .	. . . .	0, 1, 9, −4	+ 0″,00007 Γ	0″,00000 Γ
0, 0, 10, −4	+ 0″,01329	− 0″,01247	0, 0, 10, −4	+ 0,00044 Γγ	− 0,00046 Γγ
0, −1, 11, −4	− 0,01331	+ 0,01455	1, 0, 9, −4	+ 0,15 n′t	+ 0,20 n′t
0, 1, 9, −4	− 0,00002	− 0,00194	1, −1, 10, −4	− 0,19 n′t	− 0,18 n′t
0, 0, 10, −4	+ 0,00043 Γ	+ 0,00046 Γ	1, 1, 8, −4	+ 0,04 n′t	+ 0,01 n′t
0, −1, 11, −4	− 0,00049 Γ	− 0,00046 Γ	1, 0, 9, −4	+ 0,18 xn′t	− 0,19 xn′t

Tafel XXVII.

$$\frac{1}{n'}\left(\frac{dT_1}{dg'}\right) n'(z')$$

γ g' g	sin	cos	γ g' g	sin	cos
0, 0, 0			0, −2, −1	− 3″,646	+ 0″,849
0, 0, 0		− 0″,11032	−1, −1, −1	+ 5,557	− 1,246
1, −1, 0	+ 0″,326	− 0,04710	1, −3, −1	+ 0,445	− 0,103
0, 0, 0	. . . .	− 111,15 n′t	0, −1, −1	− 2,273	+ 1,747
1, −1, 0	− 28,25 n′t	+ 343,52 n′t	−1, 0, −1	+ 3,191	− 2,611
. . . .	. . . .	. . . .	1, −2, −1	+ 0,221	− 0,260
0, 1, 0	− 0,285	− 1,125	0, −1, −1	− 50 n′t	− 18 n′t
−1, 2, 0	− 0,019	+ 0,013	−1, 0, −1	− 105 n′t	− 58 n′t
1, 0, 0	+ 0,96163	− 0,36844	1, −2, −1	+ 30 n′t	− 9 n′t
0, 1, 0	− 20 n′t	− 22 n′t	0, 0, −1	− 0,899	+ 1,256
−1, 2, 0	+ 682 n′t	+ 1089 n′t	−1, 1, −1	+ 1,480	− 1,784
1, 0, 0	+ 642,48 n′t	+ 1044,30 n′t	1, −1, −1	+ 0,045	− 0,050
0, 2, 0	− 1,324	+ 2,206	0, 0, −1	− 3586 n′t	− 1285 n′t
−1, 3, 0	+ 0,119	− 0,099	−1, 1, −1	+ 594 n′t	+ 196 n′t
1, 1, 0	+ 2,135	− 3,779	1, −1, −1	0 n′t	0 n′t
0, 2, 0	− 104 n′t	− 35 n′t	0, 1, −1	− 0,189	+ 0,188
−1, 3, 0	+ 329 n′t	+ 143 n′t	−1, 2, −1	+ 0,229	− 0,589
1, 1, 0	+ 9 n′t	+ 15 n′t	1, 0, −1	+ 0,112	+ 0,230
0, 3, 0	+ 0,353	+ 3,748	0, 1, −1	− 70 n′t	− 252 n′t
−1, 4, 0	− 0,007	− 0,198	−1, 2, −1	− 498 n′t	+ 347 n′t
1, 2, 0	− 0,239	− 6,743	1, 0, −1	+ 50 n′t	− 5 n′t
0, 3, 0	− 33 n′t	+ 7 n′t	0, 2, −1	+ 0,026	− 0,400
−1, 4, 0	+ 67 n′t	− 10 n′t	−1, 3, −1	+ 0,470	− 0,056
1, 2, 0	− 3 n′t	− 1 n′t	1, 1, −1	+ 0,774	+ 0,662
0, 4, 0	+ 1,105	− 0,237	0, 2, −1	− 2717 n′t	+ 2548 n′t
−1, 5, 0	0,000	0,000	−1, 3, −1	+ 366 n′t	− 320 n′t
1, 3, 0	− 0,701	+ 0,252	1, 1, −1	+ 8 n′t	+ 4 n′t

Digitized by Google

γ g′ g	sin	cos	γ g′ g	sin	cos
0, 3, −1	+ 2″,571	+ 0″,216	1, 3, −2	− 0″,294	+ 1″,628
−1, 4, −1	+ 0,024	− 0,086	0, 4, −2	+ 720 n′t	+ 89 n′t
1, 2, −1	+ 0,564	+ 0,695	−1, 5, −2	−1088,54 n′t	− 124,94 n′t
0, 3, −1	− 296 n′t	− 12 n′t	1, 3, −2	− 33 n′t	+ 31 n′t
−1, 4, −1	+ 69 n′t	+ 483 n′t	0, 5, −2	− 0,08223	− 0,05631
1, 2, −1	+ 44 n′t	− 30 n′t	−1, 6, −2	+ 1,43663	+ 3,09421
0, 4, −1	+ 9,657	− 1,911	1, 4, −2	+ 1,24769	+ 2,90338
−1, 5, −1	+ 0,002	− 0,054	0, 5, −2	+ 177,98 n′t	− 73,56 n′t
1, 3, −1	− 1,516	+ 0,288	−1, 6, −2	− 242,26 n′t	+ 104,12 n′t
0, 4, −1	− 63 n′t	− 69 n′t	1, 4, −2	− 8,32 n′t	+ 13,17 n′t
−1, 5, −1	+ 76 n′t	+ 124 n′t	0, 6, −2	− 0,270	− 0,151
1, 3, −1	+ 8 n′t	− 4 n′t	−1, 7, −2	+ 0,803	+ 0,468
0, 5, −1	0,000	0,000	1, 5, −2	− 0,00522	− 0,00379
−1, 6, −1	− 0,072	− 0,036	0, 6, −2	+ 21 n′t	− 29 n′t
1, 4, −1	+ 0,290	− 0,108	−1, 7, −2	− 26 n′t	+ 38 n′t
0, −1, −2	− 1,320	− 2,760	1, 5, −2	+ 0,58 n′t	+ 3,14 n′t
−1, 0, −2	+ 1,835	+ 3,791	0, 2, −3	+ 0,337	− 0,400
1, −2, −2	+ 0,226	+ 0,460	−1, 3, −3	− 0,475	+ 0,557
0, 0, −2	− 2,169	− 1,614	1, 1, −3	− 0,055	+ 0,068
−1, 1, −2	+ 2,834	+ 2,054	0, 2, −3	−1444 n′t	+ 116 n′t
1, −1, −2	+ 0,356	+ 0,210	−1, 3, −3	+2196 n′t	− 160 n′t
0, 0, −2	− 409 n′t	− 153 n′t	1, 2, −3	+ 176 n′t	− 14 n′t
−1, 1, −2	+ 254 n′t	+ 136 n′t	0, 3, −3	+ 0,186	− 0,024
1, −1, −2	0 n′t	0 n′t	−1, 4, −3	− 0,120	+ 0,254
0, 1, −2	− 0,761	− 0,584	1, 2, −3	+ 0,002	+ 0,052
−1, 2, −2	+ 1,101	+ 0,854	0, 3, −3	− 594 n′t	+ 420 n′t
1, 0, −2	+ 0,117	+ 0,059	−1, 4, −3	+ 771 n′t	− 523 n′t
0, 1, −2	− 240 n′t	+1396 n′t	1, 2, −3	+ 63 n′t	− 60 n′t
−1, 2, −2	+ 405 n′t	−2559 n′t	0, 4, −3	+ 0,645	− 0,141
1, 0, −2	+ 14 n′t	− 76 n′t	−1, 5, −3	− 1,088	+ 0,382
0, 2, −2	− 0,193	− 0,163	1, 3, −3	− 0,010	+ 0,001
−1, 3, −2	+ 0,343	+ 0,263	0, 4, −3	− 647 n′t	+1544 n′t
1, 1, −2	− 0,005	+ 0,005	−1, 5, −3	+ 984 n′t	−2298 n′t
0, 2, −2	− 87 n′t	+ 927 n′t	1, 3, −3	+ 71 n′t	− 190 n′t
−1, 3, −2	− 133 n′t	−1122 n′t	0, 5, −3	− 2,259	− 0,031
1, 1, −2	− 30 n′t	− 34 n′t	−1, 6, −3	− 0,165	+ 0,496
0, 3, −2	+ 0,316	+ 1,426	1, 4, −3	+ 0,026	− 0,058
−1, 4, −2	+ 0,090	− 0,263	0, 5, −3	+ 69 n′t	+ 782 n′t
1, 2, −2	− 0,251	+ 0,253	−1, 6, −3	− 99 n′t	−1074 n′t
0, 3, −2	+1280 n′t	+ 952 n′t	1, 4, −3	− 28 n′t	− 84 n′t
−1, 4, −2	−2306 n′t	−1654 n′t	0, 6, −3	− 8,139	+ 5,465
1, 2, −2	− 62 n′t	− 46 n′t	−1, 7, −3	+ 1,119	− 0,560
0, 4, −2	+ 0,067	− 0,104	1, 5, −3	+ 0,034	+ 0,003
−1, 5, −2	+ 0,10416	+ 0,82952	0, 6, −3	+ 130 n′t	+ 203 n′t

γ	g′	g	sin	cos	γ	g′	g	sin	cos
− 1,	7,	− 3	− 174 n′t	− 250 n′t	− 1,	7,	− 4	− 0,254″	− 2,146″
1,	5,	− 3	− 30 n′t	− 14 n′t	1,	5,	− 4	− 0,054	− 0,059
0,	7,	− 3	− 0,643″	− 0,300″	0,	6,	− 4	− 700 n′t	+ 225 n′t
− 1,	8,	− 3	− 0,020	+ 1,372	− 1,	7,	− 4	+ 894 n′t	− 288 n′t
1,	6,	− 3	+ 0,131	− 0,060	1,	5,	− 4	+ 96 n′t	− 44 n′t
0,	7,	− 3	+ 47 n′t	+ 22 n′t	0,	7,	− 4	+ 3,041	+ 2,889
− 1,	8,	− 3	− 57 n′t	− 26 n′t	− 1,	8,	− 4	− 5,459	− 5,105
1,	6,	− 3	0 n′t	0 n′t	1,	6,	− 4	− 0,170	− 0,136
0,	8,	− 3	− 0,140	− 0,204	0,	7,	− 4	− 171 n′t	+ 178 n′t
− 1,	9,	− 3	+ 0,140	+ 0,364	− 1,	8,	− 4	+ 206 n′t	− 220 n′t
1,	7,	− 3	+ 0,021	− 0,006	1,	6,	− 4	+ 16 n′t	− 31 n′t
0,	8,	− 3	+ 9 n′t	− 1 n′t	0,	8,	− 4	+ 1,821	+ 0,450
− 1,	9,	− 3	− 11 n′t	+ 2 n′t	− 1,	9,	− 4	− 2,738	− 0,651
1,	7,	− 3	0 n′t	0 n′t	1,	7,	− 4	− 0,087	+ 0,025
0,	3,	− 4	− 356 n′t	− 1156 n′t	0,	8,	− 4	− 17 n′t	+ 61 n′t
− 1,	4,	− 4	+ 480 n′t	+ 1545 n′t	− 1,	9,	− 4	+ 20 n′t	− 74 n′t
1,	2,	− 4	+ 60 n′t	+ 162 n′t	1,	7,	− 4	− 1 n′t	− 8 n′t
0,	4,	− 4	+ 0,029	− 0,033	0,	9,	− 4	+ 0,466	− 0,131
− 1,	5,	− 4	− 0,071	+ 0,118	− 1,	10,	− 4	− 0,63155	+ 0,18823
1,	3,	− 4	− 0,002	+ 0,002	1,	8,	− 4	− 0,021	+ 0,028
0,	4,	− 4	− 495 n′t	− 432 n′t	0,	9,	− 4	+ 3 n′t	+ 12 n′t
− 1,	5,	− 4	+ 582 n′t	+ 532 n′t	− 1,	10,	− 4	− 4,01 n′t	− 15,11 n′t
1,	3,	− 4	+ 80 n′t	+ 68 n′t	1,	8,	− 4	− 1 n′t	− 1 n′t
0,	5,	− 4	+ 0,077	+ 0,483	0,	10,	− 4	+ 0,06366	− 0,06685
− 1,	6,	− 4	− 0,363	− 0,655	− 1,	11,	− 4	− 0,07986	+ 0,08731
1,	4,	− 4	− 0,041	− 0,060	1,	9,	− 4	+ 0,00006	+ 0,00778
0,	5,	− 4	− 1196 n′t	− 196 n′t	0,	10,	− 4	+ 1,73 n′t	+ 1,77 n′t
− 1,	6,	− 4	+ 1640 n′t	+ 285 n′t	− 1,	11,	− 4	− 2,00 n′t	− 2,00 n′t
1,	4,	− 4	+ 180 n′t	+ 30 n′t	1,	9,	− 4	− 0,32 n′t	− 0,08 n′t
0,	6,	− 4	− 0,363	+ 1,681					

Digitized by Google

$$\frac{1}{n'}\left\{V - T_1 + U - \left(\frac{dS}{dt}\right)\right\} l(r') + \frac{1}{n'}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{dS}{dt}\right) - \frac{1}{2}\,T_1 - 2U\right\} S'$$

γ g' g	sin	cos	γ g' g	sin	cos
			0, 1, −1	+ 0,109″	+ 1,020″
			−1, 2, −1	+ 0,385	+ 1,468
0, 0, 0	....	+ 0,10751″	1, 0, −1	− 0,452	− 2,332
1, −1, 0	− 1,615″	− 0,08524	0, 1, −1	− 525 n't	+ 251 n't
0, 0, 0	....	+ 147,19 n't	−1, 2, −1	+ 534 n't	− 165 n't
1, −1, 0	+ 1,93 n't	− 203,58 n't	1, 0, −1	+ 39 n't	− 150 n't
0, 1, 0	− 0,484	+ 0,913	0, 2, −1	− 0,483	− 0,186
−1, 2, 0	+ 0,236	− 0,249	−1, 3, −1	+ 0,050	+ 0,304
1, 0, 0	+ 0,33996	− 0,64272	1, 1, −1	+ 0,527	+ 0,059
0, 1, 0	+ 23 n't	+ 20 n't	0, 2, −1	+ 2375 n't	− 2298 n't
−1, 2, 0	+ 857 n't	+ 1369 n't	−1, 3, −1	− 1988 n't	+ 1855 n't
1, 0, 0	− 861,12 n't	− 1396,51 n't	1, 1, −1	− 263 n't	+ 245 n't
0, 2, 0	− 0,372	+ 0,599	0, 3, −1	− 2,000	− 0,673
−1, 3, 0	+ 0,069	− 0,096	−1, 4, −1	+ 0,322	+ 0,117
1, 1, 0	+ 0,531	− 0,873	1, 2, −1	+ 1,574	+ 0,550
0, 2, 0	− 140 n't	− 56 n't	0, 3, −1	+ 220 n't	− 491 n't
−1, 3, 0	+ 296 n't	+ 98 n't	−1, 4, −1	− 179 n't	+ 576 n't
1, 1, 0	− 83 n't	− 56 n't	1, 2, −1	− 4 n't	+ 1 n't
0, 3, 0	− 0,154	− 0,194	0, 4, −1	+ 0,310	+ 0,026
−1, 4, 0	+ 0,014	+ 0,025	−1, 5, −1	− 0,016	− 0,035
1, 2, 0	+ 0,087	+ 0,243	1, 3, −1	− 0,271	+ 0,002
0, 3, 0	− 25 n't	+ 8 n't	0, 4, −1	− 23 n't	− 58 n't
−1, 4, 0	+ 38 n't	− 15 n't	−1, 5, −1	+ 36 n't	+ 75 n't
1, 2, 0	− 9 n't	+ 1 n't	1, 3, −1	+ 2 n't	− 2 n't
0, 4, 0	− 0,037	− 0,086	0, −1, −2	+ 0,053	+ 0,086
−1, 5, 0	+ 0,039	− 0,007	−1, 0, −2	− 0,034	− 0,117
1, 3, 0	0,000	0,000	1, −2, −2	− 0,002	− 0,017
0, −2, −1	+ 0,137	− 0,020	0, 0, −2	− 0,434	− 0,300
−1, −1, −1	− 0,165	+ 0,023	−1, 1, −2	+ 0,494	+ 0,361
1, −3, −1	0,000	0,000	1, −1, −2	+ 0,108	+ 0,069
0, −1, −1	− 0,397	+ 0,490	0, 0, −2	− 225 n't	− 68 n't
−1, 0, −1	+ 0,566	− 0,600	−1, 1, −2	+ 135 n't	+ 21 n't
1, −2, −1	+ 0,040	− 0,085	1, −1, −2	+ 29 n't	− 27 n't
0, −1, −1	+ 53 n't	+ 24 n't	0, 1, −2	− 0,167	− 0,251
−1, 0, −1	+ 19 n't	+ 58 n't	−1, 2, −2	+ 0,249	+ 0,323
1, −2, −1	− 42 n't	− 70 n't	1, 0, −2	− 0,039	+ 0,062
0, 0, −1	− 0,603	+ 0,290	0, 1, −2	+ 179 n't	− 1184 n't
−1, 1, −1	+ 0,582	− 0,310	−1, 2, −2	− 259 n't	+ 1807 n't
1, −1, −1	+ 0,148	− 0,130	1, 0, −2	+ 3 n't	− 9 n't
0, 0, −1	− 3138 n't	− 1128 n't	0, 2, −2	− 0,187	+ 0,020
−1, 1, −1	+ 2634 n't	+ 965 n't	−1, 3, −2	− 1,372	+ 0,673
1, −1, −1	+ 339 n't	+ 119 n't	1, 1, −2	+ 1,273	− 0,607

Digitized by Google

γ	g'	g	sin	cos	γ	g'	g	sin	cos
0,	2,	— 2	+ 15 n't	— 591 n't	1,	3,	— 3	+ 48″ n't	— 109″ n't
— 1,	3,	— 2	+ 138 n't	+ 617 n't	0,	5,	— 3	— 1,972	+ 0,342
1,	1,	— 2	— 3 n't	+ 37 n't	— 1,	6,	— 3	+ 1,678	— 0,269
0,	3,	— 2	+ 0,182	+ 0,007	1,	4,	— 3	+ 0,246	— 0,044
— 1,	4,	— 2	— 0,312	— 0,060	0,	5,	— 3	+ 65 n't	+ 455 n't
1,	2,	— 2	+ 0,071	+ 0,107	— 1,	6,	— 3	— 87 n't	— 569 n't
0,	3,	— 2	+ 870 n't	+ 620 n't	1,	4,	— 3	— 27 n't	— 46 n't
— 1,	4,	— 2	— 1392 n't	— 981 n't	0,	6,	— 3	— 0,040	+ 0,041
1,	2,	— 2	+ 12 n't	+ 6 n't	— 1,	7,	— 3	+ 0,060	— 0,079
0,	4,	— 2	— 0,021	— 0,094	1,	5,	— 3	— 0,009	— 0,054
— 1,	5,	— 2	+ 0,09423	— 0,89018	0,	6,	— 3	+ 89 n't	+ 94 n't
1,	3,	— 2	— 0,121	+ 0,976	— 1,	7,	— 3	— 102 n't	— 111 n't
0,	4,	— 2	+ 444 n't	+ 8 n't	1,	5,	— 3	— 3 n't	+ 1 n't
— 1,	5,	— 2	— 596,73 n't	— 26,22 n't	0,	7,	— 3	+ 0,002	+ 0,008
1,	3,	— 2	+ 7 n't	+ 6 n't	— 1,	8,	— 3	— 0,010	+ 0,002
0,	5,	— 2	+ 0,04134	+ 0,07910	1,	6,	— 3	— 0,002	— 0,007
— 1,	6,	— 2	— 0,00387	+ 0,02331	0,	7,	— 3	+ 26 n't	+ 6 n't
1,	4,	— 2	— 0,06148	— 0,12802	— 1,	8,	— 3	— 28 n't	— 6 n't
0,	5,	— 2	+ 90,98 n't	— 54,20 n't	1,	6,	— 3	0 n't	0 n't
— 1,	6,	— 2	— 113,38 n't	+ 70,23 n't	0,	8,	— 3	+ 4 n't	— 2 n't
1,	4,	— 2	+ 1,93 n't	+ 8,19 n't	— 1,	9,	— 3	— 4 n't	+ 2 n't
0,	6,	— 2	+ 0,005	+ 0,004	1,	7,	— 3	0 n't	0 n't
— 1,	7,	— 2	— 0,008	— 0,006	0,	3,	— 4	+ 222 n't	+ 789 n't
1,	5,	— 2	+ 0,00490	+ 0,00366	— 1,	4,	— 4	— 269 n't	— 963 n't
0,	6,	— 2	+ 3 n't	— 5 n't	1,	2,	— 4	+ 47 n't	— 145 n't
— 1,	7,	— 2	— 5 n't	+ 7 n't	0,	4,	— 4	— 0,674	+ 0,755
1,	5,	— 2	+ 1,24 n't	+ 1,24 n't	— 1,	5,	— 4	+ 0,617	— 0,686
0,	2,	— 3	— 0,178	— 0,035	1,	3,	— 4	+ 0,229	— 0,216
— 1,	3,	— 3	— 0,054	+ 0,204	0,	4,	— 4	+ 327 n't	+ 465 n't
1,	1,	— 3	+ 0,234	— 0,069	— 1,	5,	— 4	— 432 n't	— 504 n't
0,	2,	— 3	+ 1052 n't	— 77 n't	1,	3,	— 4	— 59 n't	— 51 n't
— 1,	3,	— 3	— 1422 n't	+ 93 n't	0,	5,	— 4	— 0,254	+ 0,182
1,	1,	— 3	— 127 n't	+ 10 n't	— 1,	6,	— 4	+ 0,372	— 0,165
0,	3,	— 3	+ 1,485	+ 1,976	1,	4,	— 4	+ 0,053	— 0,034
— 1,	4,	— 3	— 1,404	— 1,839	0,	5,	— 4	— 807 n't	— 137 n't
1,	2,	— 3	— 0,380	— 0,491	— 1,	6,	— 4	+ 991 n't	+ 197 n't
0,	3,	— 3	+ 432 n't	— 237 n't	1,	4,	— 4	+ 157 n't	+ 17 n't
— 1,	4,	— 3	— 542 n't	+ 367 n't	0,	6,	— 4	— 0,335	— 0,522
1,	2,	— 3	— 51 n't	+ 41 n't	— 1,	7,	— 4	+ 0,441	+ 0,884
0,	4,	— 3	+ 0,496	+ 0,419	1,	5,	— 4	— 0,013	— 0,045
— 1,	5,	— 3	— 0,290	— 0,471	0,	6,	— 4	— 410 n't	+ 150 n't
1,	3,	— 3	— 0,219	— 0,046	— 1,	7,	— 4	+ 475 n't	— 188 n't
0,	4,	— 3	— 359 n't	+ 850 n't	1,	5,	— 4	+ 55 n't	— 35 n't
— 1,	5,	— 3	+ 503 n't	— 1176 n't	0,	7,	— 4	— 0,078	— 0,056

Digitized by Google

γ	g′	g	sin	cos	γ	g′	g	sin	cos
− 1,	8,	− 4	+ 0″,102	+ 0″,072	− 1,	10,	− 4	+ 0″,00015	+ 0″,00019
1,	6,	− 4	− 0,004	− 0,025	1,	8,	− 4	0,000	0,000
0,	7,	− 4	− 74 $n't$	+ 101 $n't$	0,	9,	− 4	+ 3 $n't$	+ 5 $n't$
− 1,	8,	− 4	+ 84 $n't$	− 119 $n't$	− 1,	10,	− 4	− 3,15 $n't$	− 6,09 $n't$
1,	6,	− 4	+ 4 $n't$	− 18 $n't$	1,	8,	− 4	0 $n't$	0 $n't$
0,	8,	− 4	− 0,016	+ 0,001	0,	10,	− 4	+ 0,00073	− 0,00163
− 1,	9,	− 4	+ 0,011	− 0,001	− 1,	11,	− 4	− 0,00086	+ 0,00206
1,	7,	− 4	− 0,003	0,000	1,	9,	− 4	+ 0,00013	+ 0,00016
0,	8,	− 4	− 2 $n't$	+ 29 $n't$	0,	10,	− 4	+ 0,94 $n't$	+ 0,57 $n't$
− 1,	9,	− 4	+ 1 $n't$	− 32 $n't$	− 1,	11,	− 4	− 0,92 $n't$	− 0,59 $n't$
1,	7,	− 4	− 2 $n't$	− 3 $n't$	1,	9,	− 4	− 0,23 $n't$	+ 0,04 $u't$
0,	9,	− 4	+ 0,002	− 0,002					

Tafel XXIX.

$$\frac{1}{n'}\left(\frac{dT_{\prime}}{dg}\right) n(z)$$

γ	g′	g	sin	cos	γ	g′	g	sin	cos
					0,	3,	0	− 6 $n't$	+ 10 $n't$
					− 1,	4,	0	+ 9 $n't$	− 10 $n't$
0,	0,	0	. . . .	− 0″,01145	1,	2,	0	0 $n't$	0 $n't$
1,	− 1,	0	+ 0″,120	− 0,00154	0,	4,	0	+ 0″,924	− 0″,198
0,	0,	0	. . . .	0,000	− 1,	5,	0	− 0,953	+ 0,180
1,	− 1,	0	− 23,55 $n't$	+ 27,10 $n't$	1,	3,	0	− 0,293	+ 0,109
0,	1,	0	− 0,271	− 0,418	0,	− 2,	− 1	− 1,526	+ 0,356
− 1,	2,	0	+ 0,003	+ 0,705	− 1,	− 1,	− 1	+ 1,742	− 0,391
1,	0,	0	+ 0,30745	− 0,09655	1,	− 3,	− 1	+ 0,279	− 0,065
0,	1,	0	+ 1256 $n't$	+ 718 $n't$	0,	− 1,	− 1	− 0,650	+ 0,428
− 1,	2,	0	− 104 $n't$	− 58 $n't$	− 1,	0,	− 1	+ 0,692	− 0,551
1,	0,	0	− 1576,41 $n't$	− 906,60 $n't$	1,	− 2,	− 1	+ 0,117	+ 0,005
0,	2,	0	− 0,305	+ 0,640	0,	− 1,	− 1	− 15 $n't$	+ 9 $n't$
− 1,	3,	0	+ 0,047	− 0,035	− 1,	0,	− 1	+ 19 $n't$	− 11 $n't$
1,	1,	0	+ 0,400	− 0,739	1,	− 2,	− 1	+ 1 $n't$	0 $n't$
0,	2,	0	+ 5 $n't$	+ 50 $n't$	0,	0,	− 1	− 0,378	+ 0,434
− 1,	3,	0	+ 55 $n't$	− 25 $n't$	− 1,	1,	− 1	+ 0,345	− 0,449
1,	1,	0	− 19 $n't$	− 22 $n't$	1,	− 1,	− 1	+ 0,133	− 0,135
0,	3,	0	+ 0,034	+ 1,531	0,	0,	− 1	0 $n't$	0 $n't$
− 1,	4,	0	− 0,005	− 0,166	− 1,	1,	− 1	+ 7 $n't$	+ 4 $n't$
1,	2,	0	− 0,015	− 1,870	1,	− 1,	− 1	+ 4 $n't$	+ 2 $n't$

Digitized by Google

γ g′ g	sin	cos	γ g′ g	sin	cos
0, 1, −1	− 0″,215	− 0″,801	1, 2, −2	− 99″ n′t	− 10″ n′t
−1, 2, −1	+ 0,254	+ 0,988	0, 4, −2	− 0,047	+ 0,641
1, 0, −1	+ 0,016	+ 0,085	−1, 5, −2	+ 0,11307	− 0,71963
0, 1, −1	+ 286 n′t	+ 171 n′t	1, 3, −2	− 0,042	− 0,098
−1, 2, −1	− 88 n′t	− 68 n′t	0, 4, −2	+ 203 n′t	− 82 n′t
1, 0, −1	− 298 n′t	− 169 n′t	−1, 5, −2	− 223,84 n′t	+ 84,56 n′t
0, 2, −1	+ 0,093	+ 0,096	1, 3, −2	− 27 n′t	+ 20 n′t
−1, 3, −1	− 0,210	− 0,239	0, 5, −2	+ 0,00012	+ 0,00868
1, 1, −1	+ 0,078	+ 0,103	−1, 6, −2	+ 0,00003	− 0,00302
0, 2, −1	+ 184 n′t	− 506 n′t	1, 4, −2	− 0,00205	+ 0,01529
−1, 3, −1	− 217 n′t	+ 620 n′t	0, 5, −2	+ 34,28 n′t	− 38,50 n′t
1, 1, −1	− 23 n′t	+ 55 n′t	−1, 6, −2	− 36,04 n′t	+ 41,41 n′t
0, 3, −1	− 0,117	− 0,183	1, 4, −2	− 2,45 n′t	+ 6,70 n′t
−1, 4, −1	− 0,080	+ 0,013	0, 6, −2	0,000	0,000
1, 2, −1	+ 0,377	+ 0,204	−1, 7, −2	0,000	0,000
0, 3, −1	− 30 n′t	− 166 n′t	1, 5, −2	− 0,00023	− 0,00009
−1, 4, −1	+ 37 n′t	+ 189 n′t	0, 6, −2	0 n′t	0 n′t
1, 2, −1	+ 15 n′t	+ 7 n′t	−1, 7, −2	0 n′t	0 n′t
0, 4, −1	+ 4,026	− 0,667	1, 5, −2	+ 0,34 n′t	+ 1,20 n′t
−1, 5, −1	− 5,042	+ 0,870	0, 1, −3	+ 202 n′t	− 268 n′t
1, 3, −1	− 0,333	+ 0,013	−1, 2, −3	− 77 n′t	+ 78 n′t
0, 4, −1	− 22 n′t	− 25 n′t	1, 0, −3	− 198 n′t	+ 278 n′t
−1, 5, −1	+ 25 n′t	+ 27 n′t	0, 2, −3	− 481 n′t	− 238 n′t
1, 3, −1	0 n′t	0 n′t	−1, 3, −3	+ 593 n′t	+ 283 n′t
0, 0, −2	0 n′t	0 n′t	1, 1, −3	+ 52 n′t	+ 25 n′t
−1, 1, −2	+ 33 n′t	− 32 n′t	0, 3, −3	+ 0,468	+ 0,660
1, −1, −2	− 1 n′t	− 12 n′t	−1, 4, −3	− 0,067	− 0,038
0, 1, −2	− 0,206	− 0,152	1, 2, −3	− 0,558	− 0,848
−1, 2, −2	+ 0,235	+ 0,169	0, 3, −3	− 129 n′t	− 10 n′t
1, 0, −2	+ 0,041	+ 0,028	−1, 4, −3	+ 146 n′t	+ 26 n′t
0, 1, −2	+ 854 n′t	− 1171 n′t	1, 2, −3	0 n′t	− 11 n′t
−1, 2, −2	− 70 n′t	+ 97 n′t	0, 4, −3	− 0,144	− 0,173
1, 0, −2	− 1070 n′t	+ 1465 n′t	−1, 5, −3	− 0,135	+ 0,090
0, 2, −2	− 0,183	+ 0,018	1, 3, −3	+ 0,347	+ 0,167
−1, 3, −2	− 0,093	+ 0,102	0, 4, −3	+ 32 n′t	+ 439 n′t
1, 1, −2	+ 0,345	− 0,131	−1, 5, −3	− 27 n′t	− 523 n′t
0, 2, −2	+ 45 n′t	− 31 n′t	1, 3, −3	− 12 n′t	− 102 n′t
−1, 3, −2	+ 6 n′t	− 21 n′t	0, 5, −3	− 0,017	− 0,056
1, 1, −2	− 6 n′t	+ 15 n′t	−1, 6, −3	− 0,166	+ 0,126
0, 3, −2	+ 0,155	+ 0,397	1, 4, −3	+ 0,070	+ 0,033
−1, 4, −2	− 0,067	+ 0,064	0, 5, −3	+ 126 n′t	+ 180 n′t
1, 2, −2	− 0,136	− 0,557	−1, 6, −3	− 134 n′t	− 196 n′t
0, 3, −2	+ 549 n′t	+ 57 n′t	1, 4, −3	− 30 n′t	− 27 n′t
−1, 4, −2	− 625 n′t	− 65 n′t	0, 6, −3	− 3,361	+ 2,367

Digitized by Google

γ	g′	g	sin	cos	γ	g′	g	sin	cos
− 1,	7,	− 3	+ 0″,270	− 0″,190	1,	6,	− 4	− 0″,115	− 0″,118
1,	5,	− 3	+ 4,215	− 2,976	0,	7,	− 4	− 17 *n′t*	+ 62 *n′t*
0,	6,	− 3	+ 55 *n′t*	+ 28 *n′t*	− 1,	8,	− 4	+ 18 *n′t*	− 64 *n′t*
− 1,	7,	− 3	− 58 *n′t*	− 29 *n′t*	1,	6,	− 4	+ 1 *n′t*	− 12 *n′t*
1,	5,	− 3	− 10 *n′t*	− 2 *n′t*	0,	8,	− 4	+ 0,500	+ 0,123
0,	7,	− 3	− 0,134	− 0,041	− 1,	9,	− 4	− 0,535	− 0,133
− 1,	8,	− 3	− 0,001	+ 0,176	1,	7,	− 4	− 0,040	+ 0,029
1,	6,	− 3	+ 0,052	− 0,025	0,	8,	− 4	+ 3 *n′t*	+ 16 *n′t*
0,	7,	− 3	+ 13 *n′t*	− 1 *n′t*	− 1.	9,	− 4	− 4 *n′t*	− 16 *n′t*
− 1,	8,	− 3	− 14 *n′t*	+ 1 *n′t*	1,	7,	− 4	− 1 *n′t*	− 2 *n′t*
1,	6,	− 3	− 2 *n′t*	0 *n′t*	0,	9,	− 4	+ 0,093	− 0,026
0,	3,	− 4	+ 0,100	+ 0,140	− 1,	10,	− 4	− 0,10155	+ 0,03036
− 1,	4,	− 4	− 0,025	− 0,051	1,	8,	− 4	0,000	0,000
1,	2,	− 4	− 0,103	− 0,142	0,	9,	− 4	+ 2 *n′t*	+ 2 *n′t*
0,	3,	− 4	+ 112 *n′t*	− 533 *n′t*	− 1,	10,	− 4	− 2,25 *n′t*	− 2,32 *n′t*
− 1,	4,	− 4	− 134 *n′t*	+ 616 *n′t*	1,	8,	− 4	0 *n′t*	0 *n′t*
1,	2,	− 4	− 19 *n′t*	+ 99 *n′t*	0,	10,	− 4	+ 0,01064	− 0,01117
0,	4,	− 4	+ 0,005	− 0,106	− 1,	11,	− 4	− 0,01113	+ 0,01217
− 1,	5,	− 4	− 0,124	+ 0,160	1,	9,	− 4	+ 0,00001	+ 0,00169
1,	3,	− 4	+ 0,116	− 0,019	0,	10,	− 4	+ 0,52 *n′t*	+ 0,20 *n′t*
0,	4,	− 4	− 27 *n′t*	− 170 *n′t*	− 1,	11,	− 4	− 0,52 *n′t*	− 0,17 *n′t*
− 1,	5,	− 4	+ 17 *n′t*	+ 190 *n′t*	1,	9,	− 4	− 0,09 *n′t*	+ 0,01 *n′t*
1,	3,	− 4	+ 9 *n′t*	+ 18 *n′t*	0,	6,	− 5	− 0,194	− 0,019
0,	5,	− 4	+ 0,067	+ 0,177	− 1,	7,	− 5	+ 0,183	− 0,074
− 1,	6,	− 4	− 0,089	− 0,260	1,	5,	− 5	+ 0,077	+ 0,111
1,	3,	− 4	+ 0,006	+ 0,032	0,	7,	− 5	− 0,238	+ 0,195
0,	5,	− 4	− 360 *n′t*	+ 82 *n′t*	− 1,	8,	− 5	+ 0,283	− 0,233
− 1,	6,	− 4	+ 387 *n′t*	− 84 *n′t*	1,	6,	− 5	+ 0,027	− 0,032
1,	3,	− 4	+ 87 *n′t*	− 25 *n′t*	0,	8,	− 5	− 0,831	+ 1,410
0,	6,	− 4	− 0,872	+ 0,057	− 1,	9,	− 5	+ 0,959	− 1,600
− 1,	7,	− 4	+ 0,206	− 0,194	1,	7,	− 5	+ 0,145	− 0,247
1,	5,	− 4	+ 0,989	+ 0,136	0,	9,	− 5	− 0,029	+ 0,622
0,	6,	− 4	− 136 *n′t*	+ 143 *n′t*	− 1,	10,	− 5	+ 0,029	− 0,680
− 1,	7,	− 4	+ 145 *n′t*	− 151 *n′t*	1,	8,	− 5	− 0,017	− 0,094
1,	5,	− 4	+ 26 *n′t*	− 33 *n′t*	0,	10,	− 5	+ 0,065	+ 0,133
0,	7,	− 4	+ 1,116	+ 1,054	− 1,	11,	− 5	− 0,071	− 0,141
− 1,	8,	− 4	− 1,386	− 1,305	1,	9,	− 5	− 0,015	− 0,015

Digitized by Google

$\frac{1}{n'} V'_1 l(r')$

γ g' g	sin	cos
0, 0, 0	....	+ 0",01168
1, −1, 0	− 0,459	− 0,00337
0, 0, 0	....	0 n't
1, −1, 0	+ 27,82 n't	− 37,28 n't
0, 1, 0	− 0,170	+ 0,398
−1, 2, 0	+ 0,101	− 0,291
1, 0, 0	+ 0,10100	− 0,19025
0, 1, 0	−1729 n't	− 993 n't
−1, 2, 0	+ 817 n't	+ 474 n't
1, 0, 0	+1483,17 n't	+ 851,42 n't
0, 2, 0	− 0,098	+ 0,059
−1, 3, 0	+ 0,003	+ 0,030
1, 1, 0	+ 0,084	− 0,116
0, 2, 0	− 154 n't	− 30 n't
−1, 3, 0	+ 137 n't	+ 2 n't
1, 1, 0	+ 4 n't	+ 4 n't
0, 3, 0	− 14 n't	+ 9 n't
−1, 4, 0	+ 14 n't	− 13 n't
1, 2, 0	0 n't	0 n't
0, −1, −1	− 0,074	+ 0,070
−1, 0, −1	+ 0,084	− 0,076
1, −2, −1	+ 0,016	− 0,017
0, −1, −1	+ 32 n't	− 4 n't
−1, 0, −1	− 34 n't	+ 37 n't
1, −2, −1	− 8 n't	− 33 n't
0, 0, −1	− 0,015	+ 0,209
−1, 1, −1	+ 0,050	− 0,172
1, −1, −1	+ 0,034	− 0,123
0, 0, −1	0 n't	0 n't
−1, 1, −1	+ 100 n't	+ 115 n't
1, −1, −1	− 105 n't	− 118 n't
0, 1, −1	+ 0,176	+ 0,946
−1, 2, −1	− 0,155	− 0,838
1, 0, −1	− 0,084	− 0,435
0, 1, −1	− 183 n't	− 141 n't
−1, 2, −1	+ 119 n't	+ 58 n't
1, 0, −1	+ 131 n't	+ 115 n't
0, 2, −1	− 0,329	− 0,366
−1, 3, −1	+ 0,277	+ 0,298
1, 1, −1	+ 0,156	+ 0,182
0, 2, −1	+ 92" n't	− 308" n't
−1, 3, −1	− 121 n't	+ 392 n't
1, 1, −1	− 3 n't	+ 12 n't
0, 3, −1	− 0,184	− 0,059
−1, 4, −1	+ 0,080	+ 0,013
1, 2, −1	+ 0,178	+ 0,060
0, 3, −1	− 40 n't	− 107 n't
−1, 4, −1	+ 47 n't	+ 116 n't
1, 2, −1	+ 7 n't	+ 5 n't
0, 4, −1	+ 0,111	− 0,108
−1, 5, −1	− 0,101	+ 0,093
1, 3, −1	− 0,055	+ 0,049
0, 4, −1	− 20 n't	− 15 n't
−1, 5, −1	+ 25 n't	+ 15 n't
1, 3, −1	+ 2 n't	− 2 n't
0, 0, −2	0 n't	0 n't
−1, 1, −2	+ 18 n't	− 45 n't
1, −1, −2	+ 28 n't	− 15 n't
0, 1, −2	− 0,108	− 0,168
−1, 2, −2	+ 0,103	+ 0,089
1, 0, −2	+ 0,050	+ 0,121
0, 1, −2	+ 1177 n't	− 1608 n't
−1, 2, −2	− 558 n't	+ 757 n't
1, 0, −2	− 1008 n't	+ 1382 n't
0, 2, −2	− 0,272	+ 0,103
−1, 3, −2	+ 0,029	− 0,006
1, 1, −2	+ 0,317	− 0,126
0, 2, −2	+ 51 n't	− 164 n't
−1, 3, −2	− 11 n't	+ 152 n't
1, 1, −2	− 3 n't	+ 9 n't
0, 3, −2	+ 0,099	+ 0,088
−1, 4, −2	− 0,045	− 0,012
1, 2, −2	− 0,079	− 0,089
0, 3, −2	+ 308 n't	+ 32 n't
−1, 4, −2	− 360 n't	− 42 n't
1, 2, −2	− 45 n't	− 5 n't
0, 4, −2	+ 0,076	− 0,845
−1, 5, −2	− 0,08580	+ 0,68718
1, 3, −2	− 0,029	+ 0,398
0, 4, −2	+ 115 n't	− 71 n't
−1, 5, −2	− 127,71 n't	+ 67,64 n't
1, 3, −2	− 12 n't	+ 13 n't

Digitized by Google

γ g′ g	sin	cos	γ g′ g	cos	sin
0, 5, — 2	— ″0,00694	— ″0,00815	1, 6, — 3	″0 *n′t*	″0 *n′t*
— 1, 6, — 2	+ 0,00581	+ 0,00229	0, 3, — 4	+ 0,080	+ 0,107
1, 4, — 2	+ 0,00665	— 0,02221	— 1, 4, — 4	— 0,038	— 0,046
0, 5, — 2	+ 14,61 *n′t*	— 30,81 *n′t*	1, 2, — 4	— 0,073	— 0,089
— 1, 6, — 2	— 17,93 *n′t*	+ 31,87 *n′t*	0, 3, — 4	— 65 *n′t*	+ 300 *n′t*
1, 4, — 2	— 0,06 *n′t*	+ 4,22 *n′t*	— 1, 4, — 4	+ 82 *n′t*	— 355 *n′t*
0, 6, — 2	0,000	0,000	1, 2, — 4	+ 10 *n′t*	— 45 *n′t*
— 1, 7, — 2	0,000	0,000	0, 4, — 4	— 0,366	+ 0,355
1, 5, — 2	— 0,00007	— 0,00006	— 1, 5, — 4	+ 0,363	— 0,361
0, 6, — 2	0 *n′t*	0 *n′t*	1, 3, — 4	+ 0,137	— 0,109
— 1, 7, — 2	0 *n′t*	0 *n′t*	0, 4, — 4	+ 62 *n′t*	+ 143 *n′t*
1, 5, — 2	+ 0,58 *n′t*	+ 0,63 *n′t*	— 1, 5, — 4	— 77 *n′t*	— 159 *n′t*
0, 1, — 3	+ 99 *n′t*	— 139 *n′t*	1, 3, — 4	— 15 *n′t*	— 18 *n′t*
— 1, 2, — 3	— 42 *n′t*	+ 65 *n′t*	0, 5, — 4	— 0,063	+ 0,224
1, 0, — 3	— 79 *n′t*	+ 128 *n′t*	— 1, 6, — 4	+ 0,035	— 0,202
0, 2, — 3	+ 296 *n′t*	+ 125 *n′t*	1, 4, — 4	+ 0,019	— 0,122
— 1, 3, — 3	— 372 *n′t*	— 169 *n′t*	0, 5, — 4	— 205 *n′t*	+ 70 *n′t*
1, 1, — 3	— 12 *n′t*	— 4 *n′t*	— 1, 6, — 4	+ 215 *n′t*	— 57 *n′t*
0, 3, — 3	+ 0,630	+ 0,906	1, 4, — 4	+ 27 *n′t*	— 25 *n′t*
— 1, 4, — 3	— 0,265	— 0,383	0, 6, — 4	— 0,193	— 0,935
1, 2, — 3	— 0,572	— 0,824	— 1, 7, — 4	+ 0,062	+ 0,534
0, 3, — 3	+ 147 *n′t*	— 53 *n′t*	1, 5, — 4	+ 0,191	+ 0,697
— 1, 4, — 3	— 164 *n′t*	+ 74 *n′t*	0, 6, — 4	— 70 *n′t*	+ 85 *n′t*
1, 2, — 3	— 5 *n′t*	+ 7 *n′t*	— 1, 7, — 4	+ 75 *n′t*	— 91 *n′t*
0, 4, — 3	— 0,119	— 0,042	1, 5, — 4	+ 12 *n′t*	— 20 *n′t*
— 1, 5, — 3	— 0,008	— 0,024	0, 7, — 4	— 0,045	— 0,055
1, 3, — 3	+ 0,273	+ 0,130	— 1, 8, — 4	+ 0,051	+ 0,068
0, 4, — 3	+ 30 *n′t*	+ 249 *n′t*	1, 6, — 4	0,000	0,000
— 1, 5, — 3	— 22 *n′t*	— 275 *n′t*	0, 7, — 4	— 5 *n′t*	+ 37 *n′t*
1, 3, — 3	— 10 *n′t*	— 55 *n′t*	— 1, 8, — 4	+ 4 *n′t*	— 39 *n′t*
0, 5, — 3	— 0,070	+ 0,004	1, 6, — 4	— 1 *n′t*	— 6 *n′t*
— 1, 6, — 3	+ 0,109	— 0,006	0, 8, — 4	+ 5 *n′t*	+ 9 *n′t*
1, 4, — 3	— 0,029	+ 0,011	— 1, 9, — 4	— 2 *n′t*	— 6 *n′t*
0, 5, — 3	+ 82 *n′t*	+ 99 *n′t*	1, 7, — 4	— 1 *n′t*	— 1 *n′t*
— 1, 6, — 3	— 87 *n′t*	— 106 *n′t*	0, 9, — 4	0,000	0,000
1, 4, — 3	— 17 *n′t*	— 15 *n′t*	— 1, 10, — 4	— 0,00034	+ 0,00030
0, 6, — 3	+ 0,078	— 0,077	1, 8, — 4	0,000	0,000
— 1, 7, — 3	— 0,037	+ 0,037	0, 9, — 4	+ 2 *n′t*	+ 1 *n′t*
1, 5, — 3	— 0,066	+ 0,066	— 1, 10, — 4	— 1,72 *n′t*	— 0,96 *n′t*
0, 6, — 3	+ 37 *n′t*	+ 11 *n′t*	1, 8, — 4	0 *n′t*	0 *n′t*
— 1, 7, — 3	— 40 *n′t*	— 12 *n′t*	0, 10, — 4	+ 0,00005	— 0,00026
1, 5, — 3	— 6 *n′t*	0 *n′t*	— 1, 11, — 4	— 0,00002	+ 0,00035
0, 7, — 3	+ 8 *n′t*	— 3 *n′t*	1, 9, — 4	+ 0,00003	+ 0,00002
— 1, 8, — 3	— 9 *n′t*	+ 3 *n′t*	0, 10, — 4	+ 0,37 *n′t*	+ 0,04 *n′t*

Digitized by Google

γ	g'	g	sin	cos	γ	g'	g	sin	cos
— 1,	11,	— 4	— $0\overset{''}{,}35\, n't$	+ $0\overset{''}{,}01\, n't$	— 1,	8,	— 5	— $0\overset{''}{,}146$	+ $0\overset{''}{,}079$
1,	9,	— 4	— 0,10 $n't$	+ 0,05 $n't$	1,	6,	— 5	0,000	0,000
0,	6,	— 5	— 0,026	— 0,080	0,	8,	— 5	+ 0,018	— 0,043
— 1,	7,	— 5	+ 0,014	+ 0,043	— 1,	9,	— 5	— 0,021	+ 0,051
1,	5,	— 5	+ 0,020	+ 0,057	1,	7,	— 5	0,000	0,000
0,	7,	— 5	+ 0,112	— 0,065					

Tafel XXXI.

$$-\int\left\{\left(\frac{dT}{dP}\right)(p'+p)+\left(\frac{dT}{dQ}\right)(q'+q)\right\}d\tau$$

γ	g'	g	cos	sin	γ	g'	g	cos	sin
0,	0,	0	— $0\overset{''}{,}08\, n't$	. . . .	0,	3,	— 1	+ 14 $xn't$	— 2 $xn't$
1,	— 1,	0	+ 0,08 $n't$	+ $0\overset{''}{,}01\, n't$	. . .	. . .	. . .	. . . .	. . . .
. . .	. . .	. . .	. . . .	. . . .	0,	4,	— 2	— 13 $n't$	— 1 $n't$
1,	0,	0	— 0,09 $n't$	+ 2,28 $n't$	— 1,	5,	— 2	+ 13,46 $n't$	+ 0,97 $n't$
. . .	. . .	. . .	. . . .	. . . .	1,	3,	— 2	— 1 $n't$	0 $n't$
0,	2,	— 1	— 2 $n't$	+ 1 $n't$	0,	4,	— 2	+ 1 $xn't$	— 11 $xn't$
— 1,	3,	— 1	+ 2 $n't$	— 1 $n't$	. . .	. . .	. . .	. . . .	. . . .
0,	2,	— 1	— 1 $xn't$	— 1 $xn't$	0,	5,	— 2	— 5,37 $n't$	— 3,13 $n't$
. . .	. . .	. . .	. . . .	. . . .	— 1,	6,	— 2	+ 5,80 $n't$	+ 3,56 $n't$
0,	3,	— 1	— 2 $n't$	— 17 $n't$	1,	4,	— 2	— 0,40 $n't$	— 0,42 $n't$
— 1,	4,	— 1	+ 2 $n't$	+ 18 $n't$	0,	5,	— 2	+ 3,00 $xn't$	— 4,97 $xn't$

Digitized by Google

$$\frac{1}{n'}\left(\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}\right)\int T_1 d\tau =$$

γ g' g	sin	cos	γ g' g	sin	cos
0, 0, 0	....	0″,000	1, 1, 0	+ 40″ xn't	− 104″ xn't
1, −1, 0	− 5″,857	− 0,04544	0, 3, 0	+ 0,087	+ 0,015
2, −2, 0	+ 1,639	− 0,00532	−1, 4, 0	+ 0,174	+ 0,068
3, −3, 0	+ 0,037	+ 0,05090	−2, 5, 0	− 0,258	− 0,090
1, −1, 0	+ 0,04186 x	+ 1,874 x	3, 0, 0	+ 0,00054	+ 0,00018
2, −2, 0	+ 0,03024 x	− 0,013 x	−1, 4, 0	+ 0,081 x	− 0,252 x
3, −3, 0	− 0,00099 x	0,000 x	3, 0, 0	+ 0,00018 x	+ 0,00063 x
0, 0, 0	....	− 24,04 n't	0, 3, 0	− 21 n't	+ 4 n't
1, −1, 0	+ 4,03 n't	+ 195,64 n't	1, 2, 0	+ 16 n't	− 7 n't
2, −2, 0	+ 13,12 n't	− 170,36 n't	2, 1, 0	+ 7 n't	+ 3 n't
3, −3, 0	+ 0,90 n't	− 1,15 n't	3, 0, 0	+ 3,09 n't	+ 6,63 n't
1, −1, 0	− 110,81 xn't	− 10,65 xn't	1, 2, 0	− 16 xn't	+ 4 xn't
2, −2, 0	− 0,68 xn't	− 0,60 xn't	0, −1, −1	− 0,255	+ 0,209
0, 1, 0	− 0,008	− 0,041	1, −2, −1	+ 0,210	− 0,242
−1, 2, 0	+ 0,708	− 0,751	2, −3, −1	+ 0,046	+ 0,026
−2, 3, 0	− 0,534	+ 0,752	1, −2, −1	− 0,141	− 0,221
1, 0, 0	+ 0,08321	+ 0,04322	0, −1, −1	− 30 n't	+ 9 n't
2, −1, 0	− 0,371	+ 0,007	−1, 0, −1	+ 165 n't	+ 18 n't
3, −2, 0	+ 0,118	+ 0,002	−2, 1, −1	− 131 n't	− 26 n't
−1, 2, 0	− 0,545 x	− 0,239 x	−2, 1, −1	+ 72 xn't	− 200 xn't
1, 0, 0	+ 0,04179 x	+ 0,16678 x	0, 0, −1	− 0,312	+ 0,246
2, −1, 0	0,000 x	+ 0,104 x	−1, 1, −1	+ 0,289	− 0,130
0, 1, 0	− 644 n't	−1043 n't	−2, 2, −1	+ 0,051	+ 0,085
−1, 2, 0	+ 11 n't	+ 19 n't	1, −1, −1	− 0,014	− 0,470
−2, 3, 0	− 13 n't	− 17 n't	2, −2, −1	− 0,023	+ 0,264
1, 0, 0	+1287,91 n't	+2080,46 n't	−1, 1, −1	− 0,018	+ 0,278
2, −1, 0	− 643 n't	−1028 n't	−2, 2, −1	− 0 112	+ 0,024
3, −2, 0	+ 1 n't	− 12 n't	1, −1, −1	+ 0,086	+ 0,043
−1, 2, 0	+ 13 xn't	− 10 xn't	0, 0, −1	+4491 n't	+1611 n't
2, −1, 0	− 6 xn't	− 1 xn't	−1, 1, −1	−4198 n't	−1513 n't
0, 2, 0	− 0,236	+ 0,449	−2, 2, −1	− 297 n't	+ 98 n't
−1, 3, 0	+ 0,243	− 0,515	−1, 1, −1	+1285 xn't	−3586 xn't
−2, 4, 0	+ 0,027	+ 0,076	0, 1, −1	− 0,408	− 1,693
1, 1, 0	− 0,018	+ 0,004	−1, 2, −1	+ 0,601	+ 2,644
2, 0, 0	+ 0,00800	+ 0,00240	−2, 3, −1	− 0,005	+ 0,011
−1, 3, 0	+ 0,282 x	+ 0,223 x	1, 0, −1	− 0,890	− 4,290
1, 1, 0	+ 0,005 x	+ 0,017 x	2, −1, −1	+ 0,705	+ 3,310
2, 0, 0	+ 0,00236 x	+ 0,00936 x	−1, 2, −1	− 1,980 x	+ 0,465 x
0, 2, 0	− 160 n't	− 64 n't	1, 0, −1	+ 1,779 x	− 0,408 x
1, 1, 0	+ 154 n't	+ 31 n't	0, 1, −1	+ 145 n't	− 42 n't
2, 0, 0	+ 50,70 n't	+ 106,02 n't	−1, 2, −1	− 244 n't	+ 43 n't
3, −1, 0	− 45 n't	− 73 n't	−2, 3, −1	+ 133 n't	− 93 n't

Digitized by Google

γ, g′, g	sin	cos	γ, g′, g	sin	cos
1, 0, −1	− 26 n′t	+ 56 n′t	0, 0, −2	− 0,″166	− 0,″115
2, −1, −1	− 4 n′t	+ 31 n′t	1, −1, −2	+ 0,133	+ 0,093
−1, 2, −1	+ 126 xn′t	− 35 xn′t	2, −2, −2	+ 0,034	+ 0,022
0, 2, −1	− 0,123	− 0,141	1, −1, −2	+ 0,104	− 0,153
−1, 3, −1	+ 0,439	+ 0,219	0, 0, −2	+ 424 n′t	+ 148 n′t
−2, 4, −1	+ 0,062	+ 0,169	−1, 1, −2	− 296 n′t	− 91 n′t
−3, 5, −1	− 0,192	− 0,065	−2, 2, −2	− 127 n′t	− 68 n′t
1, 1, −1	− 0,204	− 0,223	−1, 1, −2	+ 153 xn′t	− 409 xn′t
2, 0, −1	− 0,035	− 0,191	0, 1, −2	− 0,419	− 0,266
3, −1, −1	+ 0,050	+ 0,230	−1, 2, −2	+ 0,267	+ 0,155
−1, 3, −1	− 0,332 x	+ 0,109 x	−2, 3, −2	− 0,053	+ 0,056
−2, 4, −1	+ 0,040 x	− 0,128 x	1, 0, −2	+ 0,091	− 0,194
1, 1, −1	− 0,014 x	+ 0,110 x	2, −1, −2	+ 0,080	+ 0,232
2, 0, −1	+ 0,100 x	− 0,024 x	−1, 2, −2	− 0,066 x	+ 0,173 x
0, 2, −1	− 217 n′t	+ 224 n′t	−2, 3, −2	− 0,012 x	− 0,024 x
−1, 3, −1	− 26 n′t	+ 27 n′t	1, 0, −2	+ 0,245 x	− 0,110 x
−2, 4, −1	+ 19 n′t	− 31 n′t	0, 1, −2	+ 14 n′t	− 76 n′t
1, 1, −1	− 3228 n′t	+ 3079 n′t	−1, 2, −2	+ 113 n′t	− 785 n′t
2, 0, −1	+ 3449 n′t	− 3299 n′t	−2, 3, −2	− 135 n′t	+ 853 n′t
−1, 3, −1	+ 29 xn′t	+ 11 xn′t	−1, 2, −2	− 698 xn′t	− 120 xn′t
1, 1, −1	− 2635 xn′t	− 2750 xn′t	0, 2, −2	+ 0,577	− 0,337
0, 3, −1	+ 0,201	+ 0,068	−1, 3, −2	− 1,090	+ 0,524
−1, 4, −1	+ 2,675	+ 0,867	−2, 4, −2	+ 0,238	− 0,095
−2, 5, −1	− 2,844	− 0,920	−3, 5, −2	− 0,00019	+ 0,00480
1, 2, −1	− 0,037	− 0,007	1, 1, −2	+ 3,680	− 1,611
−1, 4, −1	+ 0,734 x	− 2,266 x	2, 0, −2	− 3,427	+ 1,526
1, 2, −1	− 0,001 x	+ 0,027 x	−1, 3, −2	− 0,241	− 0,452
0, 3, −1	− 23 n′t	− 161 n′t	1, 1, −2	+ 1,090	+ 2,375
1, 2, −1	− 82 n′t	+ 249 n′t	0, 2, −2	− 132 n′t	+ 67 n′t
2, 1, −1	− 136 n′t	+ 146 n′t	−1, 3, −2	− 66 n′t	− 214 n′t
3, 0, −1	+ 240 n′t	− 235 n′t	−2, 4, −2	+ 91 n′t	+ 238 n′t
1, 2, −1	+ 24 xn′t	− 129 xn′t	−3, 5, −2	+ 2,70 n′t	+ 2,15 n′t
2, 1, −1	− 148 xn′t	− 156 xn′t	1, 1, −2	− 214 n′t	+ 223 n′t
0, 4, −1	− 0,072	− 0,013	2, 0, −2	+ 322 n′t	− 314 n′t
−1, 5, −1	+ 0,058	− 0,005	−1, 3, −2	− 210 xn′t	+ 78 xn′t
−2, 6, −1	+ 0,012	+ 0,015	1, 1, −2	− 297 xn′t	− 321 xn′t
0, 4, −1	− 19 n′t	− 31 n′t	0, 3, −2	− 0,013	− 0,298
1, 3, −1	+ 12 n′t	+ 27 n′t	−1, 4, −2	− 0,129	+ 0,520
2, 2, −1	+ 4 n′t	+ 2 n′t	−2, 5, −2	− 0,00347	+ 0,07723
1, 3, −1	+ 23 xn′t	− 21 xn′t	−3, 6, −2	+ 0,005	− 0,052
0, −1, −2	0,000	+ 0,025	1, 2, −2	+ 0,275	− 0,287
1, −2, −2	0,000	− 0,016	2, 1, −2	+ 0,092	− 0,061
2, −3, −2	+ 0,002	− 0,014	3, 0, −2	− 0,240	+ 0,105
1, −2, −2	− 0,019 x	+ 0,014 x	−1, 4, −2	− 0,414 x	− 0,094 x

Digitized by Google

γ g′ g	sin	cos	γ g′ g	sin	cos
−2, 5, −2	− 0″,00200 x	− 0″,00072 x	1, 4, −2	+ 18″,14 $xn't$	+ 40″,62 $xn't$
1, 2, −2	− 0,147 x	+ 0,059 x	2, 3, −2	− 1,36 $xn't$	+ 12,56 $xn't$
2, 1, −2	+ 0,060 x	+ 0,132 x	3, 2, −2	− 1,44 $xn't$	+ 1,98 $xn't$
0, 3, −2	+ 700 $n't$	+ 502 $n't$	0, 6, −2	+ 0,001	− 0,002
−1, 4, −2	− 33 $n't$	− 30 $n't$	−1, 7, −2	+ 0,016	+ 0,011
−2, 5, −2	+ 37,76 $n't$	+ 30,16 $n't$	−2, 8, −2	− 0,015	− 0,008
1, 2, −2	− 651 $n't$	− 453 $n't$	1, 5, −2	− 0,00344	+ 0,00027
2, 1, −2	− 62 $n't$	− 46 $n't$	−1, 7, −2	+ 0,007 x	− 0,013 x
−1, 4, −2	− 28 $xn't$	+ 35 $xn't$	1, 5, −2	− 0,00065 x	+ 0,00047 x
−2, 5, −2	− 0,08 $xn't$	+ 0,40 $xn't$	0, 6, −2	+ 4 $n't$	− 6 $n't$
1, 2, −2	− 420 $xn't$	+ 570 $xn't$	1, 5, −2	− 1,89 $n't$	+ 4,37 $n't$
0, 4, −2	+ 0,081	− 0,712	1, 5, −2	+ 5,85 $nx't$	+ 4,11 $xn't$
−1, 5, −2	− 0,15255	+ 1,50155	0, 2, −3	+ 0,323	− 0,131
−2, 6, −2	+ 0,068	− 0,719	−1, 3, −3	− 0,160	+ 0,107
1, 3, −2	+ 0,022	− 0,061	−2, 4, −3	− 0,052	− 0,056
2, 2, −2	− 0,017	− 0,004	1, 1, −3	+ 0,367	− 0,163
−1, 5, −2	− 0,03187 x	− 0,01220 x	2, 0, −3	− 0,491	+ 0,224
1, 3, −2	− 0,043 x	+ 0,015 x	−1, 3, −3	− 0,038 x	− 0,172 x
0, 4, −2	+ 252 $n't$	+ 24 $n't$	1, 1, −3	+ 0,222 x	+ 0,455 x
−1, 5, −2	− 6,27 $n't$	− 1,72 $n't$	0, 2, −3	+ 88 $n't$	− 7 $n't$
−2, 6, −2	+ 8 $n't$	+ 1 $n't$	−1, 3, −3	+ 464 $n't$	− 34 $n't$
1, 3, −2	− 192 $n't$	− 3 $n't$	−2, 4, −3	− 549 $n't$	+ 40 $n't$
2, 2, −2	− 56 $n't$	− 15 $n't$	−1, 3, −3	− 38 $xn't$	− 481 $xn't$
−1, 5, −2	− 1,07 $xn't$	+ 7,07 $xn't$	0, 3, −3	− 1,185	− 1,782
1, 3, −2	− 24 $xn't$	+ 224 $xn't$	−1, 4, −3	+ 0,233	+ 0,401
2, 2, −2	− 24 $xn't$	+ 32 $xn't$	−2, 5, −3	+ 0,358	+ 0,518
0, 5, −2	− 0,00614	− 0,01297	1, 2, −3	+ 0,552	+ 0,758
−1, 6, −2	+ 0,05833	+ 0,10251	2, 1, −3	+ 0,060	+ 0,087
−2, 7, −2	− 0,05060	− 0,07142	−1, 4, −3	− 1,089 x	+ 0,725 x
−3, 8, −2	− 0,00084	− 0,00044	1, 2, −3	+ 0,753 x	− 0,516 x
1, 4, −2	− 0,00111	− 0,01311	0, 3, −3	+ 59 $n't$	− 34 $n't$
2, 3, −2	+ 0,00179	− 0,00370	−1, 4, −3	+ 156 $n't$	− 92 $n't$
3, 2, −2	− 0,00120	− 0,00030	−2, 5, −3	− 177 $n't$	+ 113 $n't$
−1, 6, −2	+ 0,03850 x	− 0,03338 x	1, 2, −3	− 31 $n't$	+ 8 $n't$
−2, 7, −2	+ 0,00040 x	− 0,00072 x	2, 1, −3	− 7 $n't$	+ 6 $n't$
1, 4, −2	− 0,00613 x	+ 0,00122 x	−1, 4, −3	− 103 $xn't$	− 162 $xn't$
2, 3, −2	− 0,00240 x	+ 0,00084 x	1, 2, −3	− 4 $xn't$	+ 27 $xn't$
0, 5, −2	+ 44,04 $n't$	− 20,50 $n't$	0, 4, −3	− 0,877	− 0,394
−1, 6, −2	− 0,87 $n't$	+ 0,25 $n't$	−1, 5, −3	+ 0,398	+ 0,151
−2, 7, −2	+ 0,98 $n't$	− 0,44 $n't$	−2, 6, −3	+ 0,196	+ 0,108
1, 4, −2	− 27,41 $n't$	+ 17,81 $n't$	−3, 7, −3	− 0,010	0,000
2, 3, −2	− 12,99 $n't$	+ 4,19 $n't$	1, 3, −3	+ 0,272	+ 0,134
3, 2, −2	− 3,65 $n't$	− 1,01 $n't$	2, 2, −3	+ 0,015	+ 0,004
−1, 6, −2	+ 0,39 $xn't$	+ 0,94 $xn't$	−1, 5, −3	− 0,294 x	+ 0,654 x

Digitized by Google

γ g′ g	sin	cos	γ g′ g	sin	cos
	″	″		″	″
−2, 6, −3	− 0,012 x	− 0,124 x	2, 2, −4	− 0,068	+ 0,078
1, 3, −3	+ 0,140 x	− 0,284 x	−1, 5, −4	− 0,329 x	− 0,218 x
0, 4, −3	− 208 n′t	+ 503 n′t	1, 3, −4	+ 0,427 x	+ 0,381 x
−1, 5, −3	+ 22 n′t	− 36 n′t	0, 4, −4	+ 38 n′t	+ 52 n′t
−2, 6, −3	− 23 n′t	+ 43 n′t	−1, 5, −4	+ 89 n′t	+ 95 n′t
1, 3, −3	+ 176 n′t	− 430 n′t	−2, 6, −4	− 109 n′t	− 112 n′t
2, 2, −3	+ 34 n′t	− 81 n′t	1, 3, −4	− 13 n′t	− 29 n′t
−1, 5, −3	− 40 xn′t	− 22 xn′t	2, 2, −4	− 1 n′t	− 6 n′t
1, 3, −3	− 448 xn′t	− 179 xn′t	−1, 5, −4	+ 105 xn′t	− 102 xn′t
0, 5, −3	+ 2,821	− 0,263	1, 3, −4	− 31 xn′t	+ 5 xn′t
−1, 6, −3	− 2,729	+ 0,259	0, 5, −4	+ 0,376	− 0,453
−2, 7, −3	− 0,137	+ 0,012	−1, 6, −4	− 0,249	+ 0,185
1, 4, −3	+ 0,057	− 0,001	−2, 7, −4	− 0,062	+ 0,033
2, 3, −3	+ 0,008	− 0,001	1, 4, −4	− 0,055	+ 0,204
−1, 6, −3	− 0,215 x	− 2,240 x	2, 3, −4	+ 0,005	+ 0,022
1, 4, −3	− 0,007 x	− 0,058 x	−1, 6, −4	− 0,223 x	− 0,261 x
0, 5, −3	+ 22 n′t	+ 209 n′t	1, 4, −4	+ 0,221 x	+ 0,055 x
1, 4, −3	− 13 n′t	− 181 n′t	0, 5, −4	− 328 n′t	− 57 n′t
2, 3, −3	− 9 n′t	− 28 n′t	1, 4, −4	+ 264 n′t	+ 45 n′t
1, 4, −3	− 191 xn′t	+ 19 xn′t	2, 3, −4	+ 60 n′t	+ 10 n′t
0, 6, −3	+ 0,032	+ 0,004	1, 4, −4	+ 49 xn′t	− 299 xn′t
−1, 7, −3	− 0,123	+ 0,087	0, 6, −4	− 0,041	− 0,148
−2, 8, −3	+ 0,050	− 0,084	−1, 7, −4	− 0,137	− 0,419
1, 5, −3	+ 0,040	− 0,003	−2, 8, −4	+ 0,164	+ 0,526
−1, 7, −3	+ 0,060 x	− 0,052	1, 5, −4	+ 0,008	+ 0,033
0, 6, −3	+ 29 n′t	+ 39 n′t	2, 4, −4	+ 0,001	+ 0,002
1, 5, −3	− 22 n′t	− 36 n′t	−1, 7, −4	− 0,485 x	+ 0,146 x
2, 4, −3	− 7 n′t	− 3 n′t	1, 5, −4	+ 0,036 x	− 0,010 x
1, 5, −3	− 38 xn′t	+ 26 xn′t	0, 6, −4	− 149 n′t	+ 48 n′t
0, 7, −3	+ 0,004	+ 0,002	1, 5, −4	+ 125 n′t	− 37 n′t
−1, 8, −3	− 0,005	+ 0,022	2, 4, −4	+ 24 n′t	− 11 n′t
−2, 9, −3	0,000	− 0,022	1, 5, −4	− 45 xn′t	− 140 xn′t
−1, 8, −3	+ 0,018 x	0,000 x	0, 7, −4	− 0,013	− 0,006
0, 7, −3	+ 8 n′t	+ 3 n′t	−1, 8, −4	− 0,099	− 0,102
1, 6, −3	− 8 n′t	− 4 n′t	−2, 9, −4	+ 0,112	+ 0,107
1, 6, −3	− 4 xn′t	+ 8 xn′t	−3, 10, −4	+ 0,00200	+ 0,00045
0, 3, −4	+ 20 n′t	+ 54 n′t	−1, 8, −4	− 0,095 x	+ 0,098 x
−1, 4, −4	+ 78 n′t	+ 257 n′t	0, 7, −4	− 29 n′t	+ 31 n′t
−2, 5, −4	− 96 n′t	− 309 n′t	1, 6, −4	+ 26 n′t	− 25 n′t
−1, 4, −4	+ 289 xn′t	− 89 xn′t	2, 5, −4	+ 3 n′t	− 6 n′t
0, 4, −4	+ 0,613	− 0,753	1, 6, −4	− 30 xn′t	− 28 xn′t
−1, 5, −4	− 0,142	+ 0,190	−1, 9, −4	− 0,026	− 0,008
−2, 6, −4	− 0,074	+ 0,099	−2, 10, −4	+ 0,02847	+ 0,00690
1, 3, −4	− 0,321	+ 0,356	−1, 9, −4	− 0,006 x	+ 0,026 x

γ g′ g	sin	cos	γ g′ g	sin	cos
− 2, 10, − 4	+ 0,00008 *x*	+ 0,00024 *x*	0, 9, − 4	+ 1 *n′t*	+ 2 *n′t*
0, 8, − 4	− 2 *n′t*	+ 9 *n′t*	1, 8, − 4	− 1 *n′t*	− 2 *n′t*
− 2, 10, − 4	− 0,07 *n′t*	+ 0,25 *n′t*	1, 8, − 4	− 1 *xnt*	0 *xnt*
1, 7, − 4	+ 2 *n′t*	− 8 *n′t*	0, 10, − 4	+ 0,19 *n′t*	+ 0,18 *n′t*
1, 7, − 4	− 8 *xn′t*	− 2 *xn′t*	1, 9, − 4	− 0,15 *n′t*	− 0,20 *n′t*
− 1, 10, − 4	− 0,00417	+ 0,00099	2, 8, − 4	− 0,04 *n′t*	− 0,01 *n′t*
− 1, 10, − 4	+ 0,00123 *x*	+ 0,00416 *x*	1, 9, − 4	− 0,18 *xn′t*	+ 0,19 *xn′t*

Tafel XXXIII.

$$\frac{1}{n'}\left(\frac{dT'_1}{d\gamma}\right) n'(\zeta') =$$

γ g′ g	sin	cos	γ g′ g	sin	cos
0, 0, 0	. . . .	0,000	3, −2, 0	+ 1 *n′t*	−12 *n′t*
1, −1, 0	+ 2,440	+ 0,02915	0, 2, 0	− 0,236	+ 0,449
2, −2, 0	+ 1,684	+ 0,10652	−1, 3, 0	+ 0,041	+ 0,052
3, −3, 0	+ 0,037	+ 0,05298	−2, 4, 0	+ 0,027	+ 0,076
1, −1, 0	+ 0,00738 *x*	− 5,896 *x*	1, 1, 0	− 0,343	+ 0,631
2, −2, 0	− 0,00672 *x*	− 0,032 *x*	2, 0, 0	− 0,01832	+ 0,00008
3, −3, 0	+ 0,00063 *x*	0,000 *x*	−1, 3, 0	− 0,170 *x*	− 0,002 *x*
0, 0, 0	. . . .	− 24,04 *n′t*	1, 1, 0	+ 0,020 *x*	− 0,011 *x*
1, −1, 0	+ 36,12 *n′t*	− 58,47 *n′t*	2, 0, 0 {	− 0,00236 *x*	− 0,00936 *x*
2, −2, 0	+ 13,84 *n′t*	− 171,48 *n′t*		− 0,0007220 *x*	− 0,0011680 *x*
3, −3, 0	+ 0,90 *n′t*	− 1,15 *n′t*	0, 2, 0	− 160 *n′t*	− 64 *n′t*
0, 1, 0	− 0,008	− 0,041	1, 1, 0	− 9 *n′t*	− 15 *n′t*
−1, 2, 0	− 0,094	+ 1,266	2, 0, 0	− 21,50 *n′t*	− 10,74 *n′t*
−2, 3, 0	− 0,534	+ 0,752	3, −1, 0	− 45 *n′t*	− 73 *n′t*
1, 0, 0	− 0,26684	+ 0,00131	0, 3, 0	+ 0,087	+ 0,015
2, −1, 0	+ 0,098	+ 0,007	−1, 4, 0	− 0,007	− 0,198
3, −2, 0	+ 0,118	+ 0,002	−2, 5, 0	− 0,258	− 0,090
−1, 2, 0	+ 0,120 *x*	− 0,561 *x*	1, 2, 0	+ 0,019	+ 2,233
1, 0, 0 {	− 0,04179 *x*	− 0,16678 *x*	3, 0, 0	− 0,00117	0,00000
	− 0,0128719 *x*	− 0,0208211 *x*	1, 2, 0	− 0,077 *x*	+ 0,001 *x*
2, −1, 0	0,000 *x*	− 0,332 *x*	3, 0, 0 {	− 0,00018 *x*	− 0,00063 *x*
0, 1, 0	− 644 *n′t*	− 1043 *n′t*		− 0,0000441 *x*	− 0,0000738 *x*
−1, 2, 0	− 9 *n′t*	− 4 *n′t*	0, 3, 0	− 21 *n′t*	+ 4 *n′t*
−2, 3, 0	− 13 *n′t*	− 17 *n′t*	1, 2, 0	− 2 *n′t*	− 1 *n′t*
1, 0, 0	0 *n′t*	− 1,65 *n′t*	2, 1, 0	− 3 *n′t*	− 1 *n′t*
2, −1, 0	− 641 *n′t*	− 1043 *n′t*	3, 0, 0	− 1,50 *n′t*	− 0,75 *n′t*

Digitized by Google

γ g' g	sin	cos	γ g' g	sin	cos
	″	″		″	″
−1, 5, 0	− 1,140	+ 0,216	2, 0, −1	+ 0,001	+ 0,009
1, 3, 0	+ 0,351	− 0,126	3, −1, −1	+ 0,050	+ 0,230
2, 2, 0	0,000	+ 0,128	−1, 3, −1	+ 0,323 x	− 0,203 x
−1, 5, 0	− 0,007 x	− 0,039 x	1, 1, −1	+ 0,285 x	− 0,070 x
−1, −1, −1	− 1,390	+ 0,311	2, 0, −1	+ 0,332 x	− 0,068 x
−1, −3, −1	+ 0,222	− 0,051	0, 2, −1	− 217 $n't$	+ 224 $n't$
−1, −1, −1	+ 0,010 x	+ 0,043 x	−2, 4, −1	+ 19 $n't$	− 31 $n't$
0, −1, −1	− 0,255	+ 0,209	2, 0, −1	+ 3449 $n't$	− 3299 $n't$
−1, 0, −1	− 0,412	+ 0,313	0, 3, −1	+ 0,201	+ 0,068
1, −2, −1	+ 0,082	+ 0,064	−1, 4, −1	− 0,332	+ 0,032
2, −3, −1	+ 0,046	+ 0,026	−2, 5, −1	− 3,520	− 0,784
−1, 0, −1	+ 0,025 x	+ 0,025 x	1, 2, −1	− 0,315	− 0,262
1, −2, −1	− 0,023 x	+ 0,005 x	−1, 4, −1	+ 0,007 x	− 0,057 x
0, −1, −1	− 30 $n't$	+ 9 $n't$	1, 2, −1	+ 0,006 x	− 0,051 x
−1, 0, −1	+ 59 $n't$	+ 21 $n't$	0, 3, −1	− 23 $n't$	− 161 $n't$
−2, 1, −1	+ 105 $n't$	+ 58 $n't$	1, 2, −1	− 3 $n't$	+ 3 $n't$
0, 0, −1	− 0,312	+ 0,246	2, 1, −1	+ 44 $n't$	− 30 $n't$
−1, 1, −1	− 0,465	+ 0,247	3, 0, −1	+ 240 $n't$	− 235 $n't$
−2, 2, −1	+ 0,007	− 0,059	0, 4, −1	− 0,072	− 0,013
1, −1, −1	+ 0,380	− 0,342	−1, 5, −1	− 12,088	+ 2,416
2, −2, −1	− 0,023	+ 0,264	−2, 6, −1	+ 0,012	+ 0,015
−1, 1, −1	+ 0,131 x	− 0,170 x	1, 3, −1	+ 0,796	− 0,137
−2, 2, −1	+ 0,076 x	− 0,016 x	−1, 5, −1	− 0,083 x	− 0,417 x
1, −1, −1	+ 0,328 x	− 0,290 x	1, 3, −1	+ 0,005 x	+ 0,028 x
0, 0, −1	+ 4491 $n't$	+ 1611 $n't$	0, 4, −1	− 19 $n't$	− 31 $n't$
−2, 2, −1	− 297 $n't$	− 98 $n't$	2, 2, −1	+ 4 $n't$	+ 2 $n't$
0, 1, −1	− 0,408	− 1,693	−1, 6, −1	+ 0,072	+ 0,036
−1, 2, −1	− 0,200	− 0,673	1, 4, −1	− 0,290	+ 0,108
−2, 3, −1	− 0,037	− 0,001	2, 3, −1	+ 0,044	− 0,008
1, 0, −1	− 0,203	− 0,732	0, −1, −2	0,000	+ 0,025
2, −1, −1	+ 0,725	+ 3,290	−1, 0, −2	− 0,366	− 0,778
−1, 2, −1	+ 1,338 x	− 0,303 x	−2, 1, −2	− 0,020	− 0,012
−2, 3, −1	+ 0,016 x	− 0,012 x	1, −2, −2	+ 0,073	+ 0,156
1, 0, −1	+ 5,944 x	− 1,250 x	2, −3, −2	+ 0,002	− 0,004
2, −1, −1	+ 0,016 x	− 0,012 x	−1, 0, −2	− 0,027 x	+ 0,012 x
0, 1, −1	+ 145 $n't$	− 42 $n't$	1, −2, −2	+ 0,004 x	0,000 x
−2, 3, −1	+ 133 $n't$	− 93 $n't$	0, 0, −2	− 0,166	− 0,115
1, 0, −1	+ 260 $n't$	+ 88 $n't$	−1, 1, −2	− 0,324	− 0,224
2, −1, −1	− 4 $n't$	+ 31 $n't$	1, −1, −2	+ 0,062	+ 0,034
0, 2, −1	− 0,123	− 0,141	2, −2, −2	+ 0,034	+ 0,022
−1, 3, −1	− 0,555	− 0,189	0, 0, −2	+ 424 $n't$	+ 148 $n't$
−2, 4, −1	− 0,106	+ 0,123	−2, 2, −2	− 127 $n't$	− 68 $n't$
−3, 5, −1	− 0,245	− 0,056	0, 1, −2	− 0,419	− 0,266
1, 1, −1	− 0,331	− 0,082	−1, 2, −2	− 0,008	− 0,198

Digitized by Google

γ g' g	sin	cos	γ g' g	sin	cos
−2, 3, −2	+ 0″,007	+ 0″,028	0, 4, −2	+ 252″ $n't$	+ 24″ $n't$
1, 0, −2	+ 0,138	− 0,004	−1, 5, −2	+ 2,48 $n't$	− 1,16 $n't$
2, −1, −2	+ 0,080	+ 0,232	−2, 6, −2	+ 8 $n't$	+ 1 $n't$
−1, 2, −2	− 0,069 x	+ 0,160 x	1, 3, −2	+ 10 $n't$	+ 7 $n't$
−2, 3, −2	+ 0,016 x	+ 0,040 x	2, 2, −2	− 20 $n't$	+ 9 $n't$
1, 0, −2	+ 0,476 x	− 0,142 x	0, 5, −2	− 0,00614	− 0,01297
0, 1, −2	+ 14 $n't$	− 76 $n't$	−1, 6, −2	− 1,26750	− 2,91824
−2, 3, −2	− 135 $n't$	+ 853 $n't$	−2, 7, −2	− 0,07376	− 0,08522
0, 2, −2	+ 0,577	− 0,337	−3, 8, −2	− 0,00021	− 0,00011
−1, 3, −2	− 0,125	− 0,025	1, 4, −2	− 1,24300	− 2,94608
−2, 4, −2	+ 0,238	− 0,095	2, 3, −2	+ 0,00155	− 0,03202
−3, 5, −2	+ 0,00035	− 0,00060	3, 2, −2	− 0,00201	− 0,00570
1, 1, −2	+ 2,543	− 1,115	−1, 6, −2	+ 0,11135 x	− 0,04848 x
2, 0, −2	− 3,427	+ 1,526	−2, 7, −2	+ 0,00012 x	− 0,00052 x
−1, 3, −2	+ 0,287	+ 0,711	1, 4, −2	+ 0,10309 x	− 0,04398 x
1, 1, −2	+ 1,956	+ 4,370	2, 3, −2	+ 0,00560 x	− 0,00256 x
0, 2, −2	− 132 $n't$	+ 67 $n't$	3, 2, −2	− 0,00098 x	+ 0,00180 x
−1, 3, −2	+ 40 $n't$	+ 28 $n't$	0, 5, −2	+ 44,04 $n't$	− 20,50 $n't$
−2, 4, −2	+ 91 $n't$	+ 238 $n't$	−1, 6, −2	+ 0,24 $n't$	− 0,36 $n't$
−3, 5, −2	+ 2,70 $n't$	+ 2,15 $n't$	−2, 7, −2	+ 0,98 $n't$	− 0,44 $n't$
2, 0, −2	+ 322 $n't$	− 314 $n't$	1, 4, −2	+ 3,54 $n't$	+ 0,34 $n't$
0, 3, −2	− 0,013	− 0,298	2, 3, −2	− 2,23 $n't$	+ 4,35 $n't$
−1, 4, −2	+ 0,091	− 0,038	3, 2, −2	− 1,40 $n't$	+ 0,64 $n't$
−2, 5, −2	+ 0,00393	− 0,01729	0, 6, −2	+ 0,001	− 0,002
−3, 6, −2	+ 0,005	− 0,050	−1, 7, −2	− 0,398	− 0,236
1, 2, −2	− 0,179	− 1,531	−2, 8, −2	− 0,015	− 0,008
2, 1, −2	+ 0,032	− 0,033	1, 5, −2	− 0,05063	− 0,03596
3, 0, −2	− 0,240	+ 0,105	2, 4, −2	− 0,066	− 0,164
−1, 4, −2	+ 0,438 x	+ 0,209 x	−1, 7, −2	+ 0,002 x	− 0,009 x
−2, 5, −2	+ 0,00480 x	+ 0,00104 x	1, 5, −2	+ 0,00194 x	− 0,00213 x
1, 2, −2	− 0,296 x	+ 0,462 x	0, 6, −2	+ 4 $n't$	− 6 $n't$
2, 1, −2	+ 0,112 x	+ 0,244 x	1, 5, −2	+ 0,62 $n't$	− 0,29 $n't$
0, 3, −2	+ 700 $n't$	+ 502 $n't$	0, 2, −3	+ 0,323	− 0,131
−1, 4, −2	+ 16 $n't$	0 $n't$	−1, 3, −3	− 0,031	− 0,084
−2, 5, −2	+ 38,12 $n't$	+ 30,24 $n't$	−2, 4, −3	− 0,036	− 0,036
1, 2, −2	0 $n't$	0 $n't$	1, 1, −3	+ 0,306	− 0,145
2, 1, −2	− 62 $n't$	− 46 $n't$	2, 0, −3	− 0,491	+ 0,224
0, 4, −2	+ 0,081	− 0,712	−1, 3, −3	+ 0,011 x	− 0,102 x
−1, 5, −2	− 0,02037	− 0,15369	−2, 4, −3	− 0,076 x	+ 0,056 x
−2, 6, −2	− 0,004	− 0,883	1, 1, −3	+ 0,286 x	+ 0,627 x
1, 3, −2	+ 0,022	− 0,595	0, 2, −3	+ 88 $n't$	− 7 $n't$
2, 2, −2	− 0,026	− 0,089	−2, 4, −3	− 549 $n't$	+ 40 $n't$
−1, 5, −2	+ 0,08205 x	+ 0,01863 x	0, 3, −3	− 1,185	− 1,782
1, 3, −2	+ 0,099 x	− 0,046 x	−1, 4, −3	+ 0,245	+ 0,337

Digitized by Google

γ g' g	sin	cos	γ g' g	sin	cos
−2, 5, −3	+ 0″,358	+ 0″,518	2, 5, −3	+ 0″,012 x	+ 0″,020 x
1, 2, −3	+ 0,380	+ 0,453	0, 7, −3	+ 8 $n't$	+ 3 $n't$
2, 1, −3	+ 0,060	+ 0,087	0, 8, −3	0,000	0,000
−1, 4, −3	− 1,357 x	+ 0,996 x	−1, 9, −3	− 0,034	− 0,086
−2, 5, −3	− 0,020 x	+ 0,024 x	1, 7, −3	+ 0,016	− 0,004
1, 2, −3	+ 0,554 x	− 0,352 x	0, 3, −4	+ 20 $n't$	+ 54 $n't$
0, 3, −3	+ 59 $n't$	− 34 $n't$	−2, 5, −4	− 96 $n't$	− 309 $n't$
−2, 5, −3	− 177 $n't$	+ 113 $n't$	0, 4, −4	+ 0,613	− 0,753
2, 1, −3	− 7 $n't$	+ 6 $n't$	−1, 5, −4	− 0,302	+ 0,327
0, 4, −3	− 0,877	− 0,394	−2, 6, −4	− 0,074	+ 0,099
−1, 5, −3	+ 0,415	− 0,015	1, 3, −4	− 0,129	+ 0,195
−2, 6, −3	+ 0,348	+ 0,096	2, 2, −4	− 0,068	+ 0,078
−3, 7, −3	− 0,010	0,000	−1, 5, −4	− 0,608 x	− 0,524 x
1, 3, −3	+ 0,290	+ 0,135	1, 3, −4	+ 0,261 x	+ 0,204 x
2, 2, −3	+ 0,015	+ 0,004	0, 4, −4	+ 38 $n't$	+ 52 $n't$
−1, 5, −3	− 0,341 x	+ 0,474 x	−2, 6, −4	− 109 $n't$	− 112 $n't$
1, 3, −3	+ 0,118 x	− 0,260 x	2, 2, −4	− 1 $n't$	− 6 $n't$
0, 4, −3	− 208 $n't$	+ 503 $n't$	0, 5, −4	+ 0,376	− 0,453
−2, 6, −3	− 23 $n't$	+ 43 $n't$	−1, 6, −4	+ 0,043	+ 0,351
2, 2, −3	+ 34 $n't$	− 81 $n't$	−2, 7, −4	− 0,062	+ 0,033
0, 5, −3	+ 2,821	− 0,263	1, 4, −4	− 0,057	+ 0,127
−1, 6, −3	+ 0,348	− 0,204	2, 3, −4	+ 0,005	+ 0,022
−2, 7, −3	− 0,173	+ 0,036	−1, 6, −4	− 0,292 x	− 0,070 x
1, 4, −3	+ 0,162	+ 0,068	1, 4, −4	+ 0,122 x	+ 0,030 x
2, 3, −3	+ 0,008	− 0,001	0, 5, −4	− 328 $n't$	− 57 $n't$
−1, 6, −3	− 0,028 x	+ 0,107 x	2, 3, −4	+ 60 $n't$	+ 10 $n't$
1, 4, −3	− 0,007 x	− 0,092 x	0, 6, −4	− 0,041	− 0,148
0, 5, −3	+ 22 $n't$	+ 209 $n't$	−1, 7, −4	− 0,269	+ 0,220
2, 3, −3	− 9 $n't$	− 28 $n't$	−2, 8, −4	+ 0,252	+ 0,614
0, 6, −3	+ 0,032	+ 0,004	1, 5, −4	+ 0,953	− 0,630
−1, 7, −3	− 0,648	+ 0,483	2, 4, −4	+ 0,001	+ 0,002
−2, 8, −3	+ 0,050	− 0,108	−1, 7, −4	− 0,050 x	+ 0,014 x
1, 5, −3	+ 10,228	− 7,122	1, 5, −4	+ 0,059 x	+ 0,023 x
−1, 7, −3	− 0,017 x	− 0,022 x	0, 6, −4	− 149 $n't$	+ 48 $n't$
1, 5, −3	+ 0,243 x	+ 0,347 x	2, 4, −4	+ 24 $n't$	− 11 $n't$
0, 6, −3	+ 29 $n't$	+ 39 $n't$	0, 7, −4	− 0,013	− 0,006
2, 4, −3	− 7 $n't$	− 3 $n't$	−1, 8, −4	+ 1,607	+ 1,551
0, 7, −3	+ 0,004	+ 0,002	−2, 9, −4	+ 0,148	+ 0,115
−1, 8, −3	+ 0,002	− 0,419	−3, 10, −4	+ 0,00200	+ 0,00045
−2, 9, −3	0,000	− 0,022	1, 6, −4	− 0,139	− 0,142
1, 6, −3	+ 0,125	− 0,060	−1, 8, −4	− 0,053 x	+ 0,055 x
2, 5, −3	+ 0,564	− 0,400	1, 6, −4	+ 0,004 x	− 0,005 x
−1, 8, −3	+ 0,014 x	+ 0,002 x	0, 7, −4	− 29 $n't$	+ 31 $n't$
1, 6, −3	+ 0,005 x	+ 0,002 x	2, 5, −4	+ 3 $n't$	− 6 $n't$

Digitized by Google

γ g' g	sin	cos	γ g' g	sin	cos
0, 8, −4	″ 0,000	″ 0,000	1, 8, −4	″ − 0,005	″ + 0,009
−1, 9, −4	+ 0,638	+ 0,159	−1, 10, −4	+ 0,00123 x	+ 0,00416 x
−2, 10, −4	+ 0,03549	+ 0,00486	0, 9, −4	+ 1 $n't$	+ 2 $n't$
1, 7, −4	− 0,037	+ 0,010	0, 10, −4	0,00000	0,00000
−1, 9, −4	− 0,006 x	+ 0,023 x	−1, 11, −4	+ 0,01331	− 0,01445
−2, 10, −4	+ 0,00008 x	+ 0,00024 x	1, 9, −4	+ 0,00002	+ 0,00194
1, 7, −4	0,000 x	− 0,003 x	2, 8, −4	− 0,00028	+ 0,00052
0, 8, −4	− 2 $n't$	+ 9 $n't$	−1, 11, −4	+ 0,00049 x	+ 0,00046 x
−2, 10, −4	− 0,07 $n't$	+ 0,25 $n't$	1, 9, −4	− 0,00007 x	0,00000 x
2, 6, −4	0 $n't$	− 1 $n't$	0, 10, −4	+ 0,19 $n't$	+ 0,18 $n't$
0, 9, −4	0,000	0,000	2, 8, −4	− 0,04 $n't$	− 0,01 $n't$
−1, 10, −4	+ 0,12049	− 0,03575			

Tafel XXXIV.

$$\frac{1}{n'} T_1' \left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right)$$

γ g' g	sin	cos	γ g' g	sin	cos
0, 0, 0	. . . .	″ 0,000	−1, 3, 0	″ − 0,221	″ + 0,112
1, −1, 0	″ − 4,022	− 0,04774	−2, 4, 0	+ 0,027	+ 0,076
2, −2, 0	+ 1,655	+ 0,02262	1, 1, 0	+ 0,003	− 0,023
3, −3, 0	+ 0,030	+ 0,04236	2, 0, 0	− 0,00058	+ 0,00036
0, 0, 0	. . . .	+ 24,04 $n't$	0, 2, 0	+ 160 $n't$	+ 64 $n't$
1, −1, 0	− 28,71 $n't$	+ 140,09 $n't$	1, 1, 0	− 86 $n't$	− 11 $n't$
2, −2, 0	+ 13,54 $n't$	− 171,14 $n't$	2, 0, 0	− 21,50 $n't$	− 10,74 $n't$
3, −3, 0	+ 0,72 $n't$	− 0,92 $n't$	3, −1, 0	− 36 $n't$	− 58 $n't$
0, 1, 0	− 0,271	− 0,112	0, 3, 0	− 0,088	− 0,078
−1, 2, 0	+ 0,820	− 0,424	−1, 4, 0	+ 0,252	+ 0,081
−2, 3, 0	− 0,534	+ 0,752	−2, 5, 0	− 0,258	− 0,090
1, 0, 0	− 0,02082	+ 0,01287	1, 2, 0	+ 0,001	+ 0,077
2, −1, 0	− 0,156	+ 0,007	3, 0, 0	− 0,00002	+ 0,00001
3, −2, 0	+ 0,094	+ 0,002	0, 3, 0	+ 21 $n't$	− 4 $n't$
0, 1, 0	+ 644 $n't$	+ 1043 $n't$	1, 2, 0	− 12 $n't$	+ 6 $n't$
−1, 2, 0	+ 15 $n't$	+ 14 $n't$	2, 1, 0	− 4 $n't$	− 2 $n't$
−2, 3, 0	− 13 $n't$	− 17 $n't$	3, 0, 0	− 1,20 $n't$	− 0,60 $n't$
1, 0, 0	0,000	+ 1,32 $n't$	0, 4, 0	− 0,038	− 0,055
2, −1, 0	− 644 $n't$	− 1035 $n't$	−1, 5, 0	+ 0,039	− 0,007
3, −2, 0	+ 1 $n't$	− 9 $n't$	0, −2, −1	+ 0,042	− 0,009
0, 2, 0	+ 0,251	− 0,329	−1, −1, −1	− 0,048	+ 0,010

Digitized by Google

γ g′ g	sin	cos	γ g′ g	sin	cos
0, −1, −1	+ 0″,267	− 0″,244	3, 0, −1	+ 192″ n′t	− 188″ n′t
−1, 0, −1	− 0,025	+ 0,015	0, 4, −1	− 0,261	+ 0,078
1, −2, −1	− 0,216	+ 0,164	−1, 5, −1	+ 0,417	− 0,083
2, −3, −1	+ 0,046	+ 0,026	−2, 6, −1	+ 0,012	+ 0,015
0, −1, −1	+ 30 n′t	− 9 n′t	1, 3, −1	+ 0,028	− 0,005
−1, 0, −1	− 118 n′t	− 42 n′t	0, 4, −1	+ 19 n′t	+ 31 n′t
−2, 1, −1	+ 205 n′t	+ 94 n′t	1, 3, −1	− 21 n′t	− 23 n′t
0, 0, −1	+ 0,411	+ 0,020	2, 2, −1	+ 4 n′t	+ 2 n′t
−1, 1, −1	− 0,096	+ 0,141	0, −1, −2	+ 0,012	− 0,001
−2, 2, −1	+ 0,015	− 0,041	−1, 0, −2	− 0,012	− 0,027
1, −1, −1	− 0,247	− 0,414	1, −2, −2	+ 0,014	+ 0,015
2, −2, −1	− 0,023	+ 0,264	2, −3, −2	+ 0,002	− 0,004
0, 0, −1	− 4491 n′t	− 1611 n′t	0, 0, −2	+ 0,166	+ 0,115
−1, 1, −1	+ 3586 n′t	+ 1285 n′t	1, −1, −2	− 0,153	− 0,104
−2, 2, −1	− 297 n′t	− 98 n′t	2, −2, −2	+ 0,034	+ 0,022
0, 1, −1	+ 1,130	+ 5,140	0, 0, −2	− 424 n′t	− 148 n′t
−1, 2, −1	− 0,162	− 0,642	−1, 1, −2	+ 409 n′t	+ 153 n′t
−2, 3, −1	+ 0,001	+ 0,019	−2, 2, −2	− 127 n′t	− 68 n′t
1, 0, −1	− 1,658	− 7,723	0, 1, −2	+ 0,546	+ 0,613
2, −1, −1	+ 0,699	+ 3,302	−1, 2, −2	− 0,357	− 0,123
0, 1, −1	− 145 n′t	+ 42 n′t	−2, 3, −2	− 0,001	+ 0,030
−1, 2, −1	+ 35 n′t	+ 126 n′t	1, 0, −2	− 0,252	− 0,721
−2, 3, −1	+ 133 n′t	− 93 n′t	2, −1, −2	+ 0,080	+ 0,232
1, 0, −1	− 130 n′t	− 44 n′t	0, 1, −2	− 14 n′t	+ 76 n′t
2, −1, −1	− 4 n′t	+ 31 n′t	−1, 2, −2	+ 120 n′t	− 698 n′t
0, 2, −1	+ 0,042	+ 0,237	−2, 3, −2	− 135 n′t	+ 853 n′t
−1, 3, −1	+ 0,094	− 0,009	0, 2, −2	− 3,327	+ 1,593
−2, 4, −1	− 0,022	+ 0,141	−1, 3, −2	− 0,259	+ 0,046
−3, 5, −1	− 0,156	− 0,052	−2, 4, −2	+ 0,238	− 0,095
1, 1, −1	+ 0,052	− 0,223	−3, 5, −2	+ 0,00028	− 0,00048
2, 0, −1	− 0,033	− 0,167	1, 1, −2	+ 6,745	− 3,046
3, −1, −1	+ 0,040	+ 0,184	2, 0, −2	− 3,427	+ 1,526
0, 2, −1	+ 217 n′t	− 224 n′t	0, 2, −2	+ 132 n′t	− 67 n′t
−1, 3, −1	− 11 n′t	+ 29 n′t	−1, 3, −2	− 98 n′t	− 224 n′t
−2, 4, −1	+ 19 n′t	− 31 n′t	−2, 4, −2	+ 91 n′t	+ 238 n′t
1, 1, −1	− 2750 n′t	+ 2635 n′t	−3, 5, −2	+ 2,16 n′t	+ 1,72 n′t
2, 0, −1	+ 3449 n′t	− 3299 n′t	1, 1, −2	− 321 n′t	+ 297 n′t
0, 3, −1	− 0,234	− 0,054	2, 0, −2	+ 322 n′t	− 314 n′t
−1, 4, −1	+ 2,323	+ 0,741	0, 3, −2	− 0,248	− 0,279
−2, 5, −1	− 2,844	− 0,920	−1, 4, −2	− 0,117	+ 0,046
1, 2, −1	− 0,024	− 0,005	−2, 5, −2	+ 0,00501	− 0,00701
0, 3, −1	+ 23 n′t	+ 161 n′t	−3, 6, −2	+ 0,004	− 0,041
1, 2, −1	− 123 n′t	− 30 n′t	1, 2, −2	+ 0,503	+ 0,453
2, 1, −1	− 34 n′t	+ 44 n′t	2, 1, −2	+ 0,076	− 0,059

Digitized by Google

Tafel XXXIV.

γ	g′	g	sin	cos	γ	g′	g	sin	cos
3,	0,	− 2	− 0″,192	+ 0″,084	0,	3,	− 3	+ 2″,227	+ 3″,282
0,	3,	− 2	− 700 *n′t*	− 502 *n′t*	− 1,	4,	− 3	− 1,721	− 2,446
− 1,	4,	− 2	− 41 *n′t*	− 28 *n′t*	− 2,	5,	− 3	+ 0,346	+ 0,508
− 2,	5,	− 2	+ 37,92 *n′t*	+ 30,20 *n′t*	1,	2,	− 3	− 0,868	− 1,307
1,	2,	− 2	+ 570 *n′t*	+ 420 *n′t*	2,	1,	− 3	+ 0,074	+ 0,079
2,	1,	− 2	− 62 *n′t*	− 46 *n′t*	0,	3,	− 3	− 59 *n′t*	+ 34 *n′t*
0,	4,	− 2	− 0,057	+ 0,696	− 1,	4,	− 3	+ 162 *n′t*	− 103 *n′t*
− 1,	5,	− 2	− 0,00625	+ 0,05054	− 2,	5,	− 3	− 177 *n′t*	+ 113 *n′t*
− 2,	6,	− 2	+ 0,068	− 0,719	1,	2,	− 3	+ 27 *n′t*	+ 4 *n′t*
1,	3,	− 2	− 0,034	− 0,041	2,	1,	− 3	− 7 *n′t*	+ 6 *n′t*
2,	2,	− 2	− 0,018	− 0,004	0,	4,	− 3	+ 1,496	+ 0,809
0,	4,	− 2	− 252 *n′t*	− 24 *n′t*	− 1,	5,	− 3	− 1,208	− 0,629
− 1,	5,	− 2	− 8,31 *n′t*	− 0,49 *n′t*	− 2,	6,	− 3	+ 0,410	+ 0,090
− 2,	6,	− 2	+ 8 *n′t*	+ 1 *n′t*	− 3,	7,	− 3	− 0,008	0,000
1,	3,	− 2	+ 204 *n′t*	+ 10 *n′t*	1,	3,	− 3	− 0,528	− 0,234
2,	2,	− 2	− 4 *n′t*	+ 21 *n′t*	2,	2,	− 3	+ 0,015	+ 0,004
0,	5,	− 2	+ 0,00338	+ 0,00630	0,	4,	− 3	+ 208 *n′t*	− 503 *n′t*
− 1,	6,	− 2	+ 0,08186	+ 0,14985	− 1,	5,	− 3	+ 22 *n′t*	− 40 *n′t*
− 2,	7,	− 2	− 0,05086	− 0,07176	− 2,	6,	− 3	− 23 *n′t*	+ 43 *n′t*
− 3,	8,	− 2	− 0,00042	− 0,00022	1,	3,	− 3	− 179 *n′t*	+ 448 *n′t*
1,	4,	− 2	− 0,04508	− 0,07700	2,	2,	− 3	+ 34 *n′t*	− 81 *n′t*
2,	3,	− 2	− 0,00019	− 0,00234	0,	5,	− 3	− 2,651	+ 0,279
3,	2,	− 2	− 0,00036	+ 0,00009	− 1,	6,	− 3	+ 2,133	− 0,243
0,	5,	− 2	− 44,04 *n′t*	+ 20,50 *n′t*	− 2,	7,	− 3	− 0,137	+ 0,012
− 1,	6,	− 2	− 1,06 *n′t*	+ 0,57 *n′t*	1,	4,	− 3	− 0,150	+ 0,014
− 2,	7,	− 2	+ 0,98 *n′t*	− 0,44 *n′t*	2,	3,	− 3	+ 0,008	− 0,001
1,	4,	− 2	+ 33,54 *n′t*	− 18,82 *n′t*	0,	5,	− 3	− 22 *n′t*	− 209 *n′t*
2,	3,	− 2	+ 2,93 *n′t*	+ 4,23 *n′t*	1,	4,	− 3	+ 19 *n′t*	+ 191 *n′t*
3,	2,	− 2	− 0,46 *n′t*	+ 0,96 *n′t*	2,	3,	− 3	− 9 *n′t*	− 28 *n′t*
0,	6,	− 2	− 0,008	− 0,001	0,	6,	− 3	− 0,309	+ 0,191
− 1,	7,	− 2	+ 0,022	+ 0,009	− 1,	7,	− 3	+ 0,074	+ 0,043
− 2,	8,	− 2	− 0,015	− 0,008	− 2,	8,	− 3	+ 0,050	− 0,084
1,	5,	− 2	− 0,00148	− 0,00093	1,	5,	− 3	+ 0,267	− 0,239
2,	4,	− 2	+ 0,001	0,000	0,	6,	− 3	− 29 *n′t*	− 39 *n′t*
0,	6,	− 2	− 4 *n′t*	+ 6 *n′t*	1,	5,	− 3	+ 26 *n′t*	+ 38 *n′t*
1,	5,	− 2	+ 2,87 *n′t*	− 5,27 *n′t*	2,	4,	− 3	− 7 *n′t*	− 3 *n′t*
0,	2,	− 3	− 0,861	+ 0,361	0,	7,	− 3	− 0,015	− 0,006
− 1,	3,	− 3	+ 0,290	− 0,003	− 1,	8,	− 3	− 0,002	+ 0,032
− 2,	4,	− 3	− 0,080	− 0,094	− 2,	9,	− 3	0,000	− 0,022
1,	1,	− 3	+ 1,082	− 0,508	1,	6,	− 3	+ 0,002	− 0,005
2,	0,	− 3	− 0,491	+ 0,224	2,	5,	− 3	+ 0,010	− 0,006
0,	2,	− 3	− 88 *n′t*	+ 7 *n′t*	0,	7,	− 3	− 8 *n′t*	− 3 *n′t*
− 1,	3,	− 3	+ 481 *n′t*	− 38 *n′t*	1,	6,	− 3	+ 8 *n′t*	+ 4 *n′t*
− 2,	4,	− 3	− 549 *n′t*	+ 40 *n′t*	0,	3,	− 4	− 20 *n′t*	− 54 *n′t*

Digitized by Google

γ	g′	g	sin	cos	γ	g′	g	sin	cos
− 1,	4,	− 4	+ 89″ n′t	+ 289″ n′t	2,	4,	− 4	+ 24″ n′t	− 11″ n′t
− 2,	5,	− 4	− 96 n′t	− 309 n′t	0,	7,	− 4	+ 0,058	+ 0,051
0,	4,	− 4	− 1,203	+ 1,459	− 1,	8,	− 4	− 0,153	− 0,148
− 1,	5,	− 4	+ 0,742	− 0,937	− 2,	9,	− 4	+ 0,112	+ 0,107
− 2,	6,	− 4	− 0,074	+ 0,099	− 3,	10,	− 4	+ 0,00160	+ 0,00036
1,	3,	− 4	+ 0,585	− 0,688	1,	6,	− 4	− 0,005	− 0,004
2,	2,	− 4	− 0,068	+ 0,078	0,	7,	− 4	+ 29 n′t	− 31 n′t
0,	4,	− 4	− 38 n′t	− 52 n′t	1,	6,	− 4	− 28 n′t	+ 30 n′t
− 1,	5,	− 4	+ 102 n′t	+ 105 n′t	2,	5,	− 4	+ 3 n′t	− 6 n′t
− 2,	6,	− 4	− 109 n′t	− 112 n′t	0,	8,	− 4	+ 0,020	+ 0,005
1,	3,	− 4	+ 5 n′t	+ 31 n′t	− 1,	9,	− 4	− 0,049	− 0,012
2,	2,	− 4	− 1 n′t	− 6 n′t	− 2,	10,	− 4	+ 0,02849	+ 0,00694
0,	5,	− 4	− 0,458	+ 0,846	1,	7,	− 4	− 0,003	0,000
− 1,	6,	− 4	+ 0,331	− 0,515	0,	8,	− 4	+ 2 n′t	− 9 n′t
− 2,	7,	− 4	− 0,062	+ 0,033	− 2,	10,	− 4	− 0,07 n′t	+ 0,25 n′t
1,	4,	− 4	+ 0,085	− 0,343	1,	7,	− 4	− 2 n′t	+ 8 n′t
2,	3,	− 4	+ 0,005	+ 0,022	0,	9,	− 4	0,000	0,000
0,	5,	− 4	+ 328 n′t	+ 57 n′t	− 1,	10,	− 4	− 0,00832	+ 0,00246
1,	4,	− 4	− 299 n′t	− 49 n′t	0,	9,	− 4	− 1 n′t	− 2 n′t
2,	3,	− 4	+ 60 n′t	+ 10 n′t	− 1,	10,	− 4	0,00 n′t	0,00 n′t
0,	6,	− 4	+ 0,032	+ 0,248	1,	8,	− 4	0 n′t	+ 1 n′t
− 1,	7,	− 4	− 0,160	− 0,535	0,	10,	− 4	+ 0,00044	− 0,00046
− 2,	8,	− 4	+ 0,164	+ 0,526	− 1,	11,	− 4	− 0,00046	+ 0,00049
1,	5,	− 4	+ 0,013	− 0,095	1,	9,	− 4	0,00000	+ 0,00007
2,	4,	− 4	+ 0,001	+ 0,002	0,	10,	− 4	− 0,19 n′t	− 0,18 n′t
0,	6,	− 4	+ 149 n′t	− 48 n′t	1,	9,	− 4	+ 0,19 n′t	+ 0,18 n′t
1,	5;	− 4	− 140 n′t	+ 45 n′t	2,	8,	− 4	− 0,04 n′t	− 0,01 n′t

Digitized by Google

$$\frac{1}{n'}\left(\frac{dS'}{dt}\right)\left(\frac{d(\zeta')}{d\tau}\right)$$

γ g′ g	sin	cos	γ g′ g	sin	cos
0, 0, 0	. . . .	− 0″,00423	−1, 3, −1	+ 0″,042	+ 0″,127
1, −1, 0	− 0,615	+ 0,01594	−2, 4, −1	− 0,012	− 0,006
2, −2, 0	+ 0,002	+ 0,00574	1, 1, −1	− 0,035	+ 0,006
3, −3, 0	0,000	− 0,00021	2, 0, −1	+ 0,004	+ 0,016
0, 0, 0	. . . .	0 n′t	−1, 3, −1	+ 4 n′t	− 4 n′t
1, −1, 0	+ 21,61 n′t	− 7,87 n′t	1, 1, −1	+ 920 n′t	− 886 n′t
2, −2, 0	+ 0,06 n′t	− 0,06 n′t	0, 3, −1	− 0,027	+ 0,015
0, 1, 0	− 0,052	+ 0,022	−1, 4, −1	− 0,744	− 0,252
−1, 2, 0	− 0,058	+ 0,198	1, 2, −1	− 0,008	− 0,001
1, 0, 0	+ 0,06042	+ 0,01736	1, 2, −1	+ 34 n′t	+ 13 n′t
2, −1, 0	− 0,018	+ 0,001	2, 1, −1	+ 24 n′t	− 26 n′t
−1, 2, 0	− 3 n′t	+ 1 n′t	0, 4, −1	+ 0,112	− 0,023
1, 0, 0	+ 4,86 n′t	− 3,02 n′t	−1, 5, −1	+ 0,084	+ 0,028
2, −1, 0	+ 1 n′t	0 n′t	1, 3, −1	+ 2 n′t	+ 10 n′t
0, 2, 0	+ 0,001	− 0,068	0, −1, −2	0,000	− 0,007
−1, 3, 0	+ 0,067	− 0,099	1, −2, −2	+ 0,016	− 0,010
1, 1, 0	− 0,005	+ 0,003	0, 0, −2	0,000	0,000
2, 0, 0	+ 0,00170	+ 0,00040	1, −1, −2	+ 0,046	+ 0,033
1, 1, 0	+ 16 n′t	− 16 n′t	−1, 1, −2	− 142 n′t	− 63 n′t
2, 0, 0	+ 0,12 n′t	− 0,08 n′t	0, 1, −2	− 0,195	− 0,190
0, 3, 0	0,000	+ 0,014	−1, 2, −2	+ 0,072	+ 0,177
−1, 4, 0	− 0,093	− 0,024	−2, 3, −2	− 0,012	+ 0,006
3, 0, 0	+ 0,00009	0,00000	1, 0, −2	+ 0,151	+ 0,038
1, 2, 0	+ 2 n′t	− 1 n′t	−1, 2, −2	− 29 n′t	+ 231 n′t
2, 1, 0	+ 2 n′t	0 n′t	0. 2, −2	+ 0,909	− 0,413
0, 4, 0	+ 0,001	− 0,062	−1, 3, −2	− 0,139	+ 0,076
0, −2, −1	− 0,006	+ 0,001	−2, 4, −2	0,000	− 0,002
0, −1, −1	− 0,008	+ 0,003	−3, 5, −2	0,00000	− 0,00006
1, −2, −1	+ 0,080	− 0,042	1, 1, −2	− 0,800	+ 0,361
−1, 0, −1	+ 135 n′t	+ 49 n′t	−1, 3, −2	+ 29 n′t	+ 46 n′t
−2, 1, −1	− 18 n′t	− 6 n′t	1, 1, −2	+ 98 n′t	− 115 n′t
0, 0, −1	− 0,013	+ 0,107	0, 3, −2	+ 0,114	+ 0,103
−1, 1, −1	+ 0,090	− 0,085	−1, 4, −2	− 0,033	+ 0,118
−2, 2, −1	+ 0,004	− 0,002	−2, 5, −2	− 0,00018	+ 0,00018
1, −1, −1	− 0,021	− 0,050	1, 2, −2	− 0,026	− 0,034
−1, 1, −1	− 1202 n′t	− 424 n′t	2, 1, −2	− 0,024	+ 0,010
0, 1, −1	− 0,225	− 1,159	−1, 4, −2	+ 8 n′t	+ 1 n′t
−1, 2, −1	+ 0,113	+ 0,681	−2, 5, −2	0,00 n′t	− 0,02 n′t
1, 0, −1	+ 0,122	+ 0,574	1, 2, −2	− 205 n′t	− 127 n′t
−1, 2, −1	− 8 n′t	− 37 n′t	0, 4, −2	− 0,041	− 0,033
1, 0, −1	− 103 n′t	+ 99 n′t	−1, 5, −2	− 0,00832	+ 0,03669
0, 2, −1	+ 0,018	− 0,032	1, 3, −2	0,000	− 0,023

Digitized by Google

γ	g'	g	sin	cos	γ	g'	g	sin	cos
− 1,	5,	− 2	+ 1″,16 $n't$	− 0″,52 $n't$	− 1,	6,	− 3	− 0″,781	+ 0″,064
1,	3,	− 2	− 50 $n't$	+ 10 $n't$	1,	4,	− 3	+ 0,013	+ 0,002
2,	2,	− 2	− 4 $n't$	− 2 $n't$	1,	4,	− 3	− 12 $n't$	− 46 $n't$
0,	5,	− 2	+ 0,00132	− 0,00082	0,	6,	− 3	+ 0,092	− 0,067
− 1,	6,	− 2	− 0,01264	+ 0,00756	− 1,	7,	− 3	− 0,010	− 0,022
− 2,	7,	− 2	− 0,00006	− 0,00002	1,	5,	− 3	− 10 $n't$	− 4 $n't$
1,	4,	− 2	− 0,00029	− 0,00114	0,	7,	− 3	− 0,001	− 0,001
2,	3,	− 2	0,00000	− 0,00066	− 1,	8,	− 3	− 0,004	− 0,006
− 1,	6,	− 2	+ 0,08 $n't$	− 0,15 $n't$	1,	6,	− 3	0 $n't$	+ 1 $n't$
1,	4,	− 2	− 6,65 $n't$	+ 7,03 $n't$	− 1,	4,	− 4	− 27 $n't$	− 74 $n't$
2,	3,	− 2	− 1,36 $n't$	+ 0,24 $n't$	0,	4,	− 4	+ 0,138	− 0,163
3,	2,	− 2	− 0,27 $n't$	− 0,18 $n't$	− 1,	5,	− 4	− 0,063	+ 0,070
0,	6,	− 2	0,000	− 0,003	1,	3,	− 4	− 0,093	+ 0,104
− 1,	7,	− 2	− 0,001	+ 0,003	− 1,	5,	− 4	− 27 $n't$	− 24 $n't$
1,	5,	− 2	− 0,00006	− 0,00001	1,	3,	− 4	− 14 $n't$	− 10 $n't$
1,	5,	− 2	− 0,09 $n't$	+ 1,33 $n't$	0,	5,	− 4	+ 0,018	− 0,021
0,	2,	− 3	+ 0,163	− 0,083	− 1,	6,	− 4	− 0,118	+ 0,022
− 1,	3,	− 3	− 0,082	− 0,016	1,	4,	− 4	+ 0,001	+ 0,042
1,	1,	− 3	− 0,141	+ 0,079	1,	4,	− 4	+ 89 $n't$	+ 18 $n't$
− 1,	3,	− 3	− 156 $n't$	+ 9 $n't$	0,	6,	− 4	0,000	− 0,009
0,	3,	− 3	− 0,304	− 0,429	− 1,	7,	− 4	+ 0,048	+ 0,151
− 1,	4,	− 3	+ 0,205	+ 0,322	1,	5,	− 4	+ 0,002	+ 0,004
1,	2,	− 3	+ 0,157	+ 0,223	1,	5,	− 4	+ 33 $n't$	− 14 $n't$
− 1,	4,	− 3	− 36 $n't$	+ 30 $n't$	0,	7,	− 4	− 0,015	− 0,012
1,	2,	− 3	− 18 $n't$	+ 24 $n't$	− 1,	8,	− 4	+ 0,028	+ 0,018
0,	4,	− 3	− 0,115	− 0,044	1,	6,	− 4	+ 4 $n't$	− 7 $n't$
− 1,	5,	− 3	+ 0,265	+ 0,068	0,	8,	− 4	− 0,006	− 0,001
− 2,	6,	− 3	− 0,022	0,000	− 1,	9,	− 4	+ 0,003	+ 0,001
1,	3,	− 3	+ 0,049	+ 0,016	1,	7,	− 4	0 $n't$	− 2 $n't$
− 1,	5,	− 3	− 2 $n't$	+ 10 $n't$	0,	9,	− 4	− 0,004	+ 0,001
1,	3,	− 3	+ 64 $n't$	− 143 $n't$	− 1,	10,	− 4	+ 0,00048	− 0,00057
0,	5,	− 3	− 0,029	− 0,005	0,	10,	− 4	− 0,00002	+ 0,00010

Digitized by Google

$n'\zeta'$

γ g′ g	sin	cos	γ g′ g	sin	cos
0, 0, 0	. . . .	+ 0″,273 x	−1, 3, 0	+208 $n't$	+ 80 $n't$
1, −1, 0	+ 1″,636	− 0,08178	1, 1, 0	− 30 $n't$	+ 23 $n't$
2, −2, 0	+ 1,048	+ 0,03155	2, 0, 0	− 9,18 n'^2t^2	+ 14,98 n'^2t^2
3, −3, 0	+ 0,010	+ 0,01386	3, −1, 0	− 36 $n't$	− 58 $n't$
1, −1, 0	+ 0,04935 x	− 4,023 x	0, 2, 0	− 94 $xn't$	+242 $xn't$
2, −2, 0	+ 0,00588 x	− 0,012 x	1, 1, 0	− 40 $xn't$	+104 $xn't$
3, −3, 0	− 0,00004 x	0,000 x	0, 3, 0	− 0,005	− 1,687
0, 0, 0	. . . .	− 2,39 n'^2t^2	−1, 4, 0	+ 0,008	− 0,083
1, −1, 0	+ 9,96 $n't$	+ 129,48 $n't$	−2, 5, 0	− 0,065	− 0,023
2, −2, 0	− 2,21 $n't$	− 89,77 $n't$	1, 2, 0	+ 0,067	+ 2,134
3, −3, 0	+ 0,16 $n't$	− 0,28 $n't$	3, 0, 0	− 0,00035 $n't$	− 0,00030 $n't$
1, −1, 0	− 110,81 $xn't$	− 10,65 $xn't$	0, 3, 0	+ 1,179 x	− 0,110 x
2, −2, 0	− 0,17 $xn't$	− 0,08 $xn't$	−1, 4, 0	+ 0,020 x	− 0,063 x
.0, 1, 0	+ 2,134	− 1,937	1, 2, 0	+ 0,039 x	− 0,001 x
−1, 2, 0	+ 0,029	+ 0,305	3, 0, 0	− 2,46 $xn't$	+ 1,47 $xn't$
−2, 3, 0	− 0,222	+ 0,313	0, 3, 0	− 28 $n't$	0 $n't$
1, 0, 0	− 0,98174 $n't$	− 1,09816 $n't$	−1, 4, 0	+ 26 $n't$	− 6 $n't$
2, −1, 0	− 0,031	+ 0,015	1, 2, 9	+ 4 $n't$	+ 7 $n't$
3, −2, 0	+ 0,047	+ 0,001	3, 0, 0	− 0,37 n'^2t^2	+ 0,62 n'^2t^2
0, 1, 0	− 0,371 x	+ 0,873 x	0, 3, 0	+ 7 $xn't$	+ 30 $xn't$
−1, 2, 0	− 0,213 x	− 0,400 x	1, 2, 0	+ 8 $xn't$	− 2 $xn't$
1, 0, 0	−2082,11 $xn't$	+1287,19 $xn't$	0, 4, 0	+ 0,126	− 0,008
2, −1, 0	0,000 x	− 0,114 x	−1, 5, 0	− 0,226	+ 0,042
0, 1, 0	− 305 $n't$	− 461 $n't$	1, 3, 0	+ 0,117	− 0,042
−1, 2, 0	+ 768 $n't$	+1230 $n't$	2, 2, 0	+ 0,001	+ 0,014
−2, 3, 0	− 3 $n't$	− 6 $n't$	0, 4, 0	− 0,080 x	− 0,262 x
1, 0, 0	− 176,67 n'^2t^2	+ 110,18 n'^2t^2	−1, 5, 0	− 0,001 x	− 0,008 x
2, −1, 0	− 805 $n't$	−1292 $n't$	0, −2, −1	+ 0,933	− 0,218
3, −2, 0	+ 1 $n't$	− 5 $n't$	−1, −1, −1	− 1,152	+ 0,262
0, 1, 0	−1562 $xn't$	+ 963 $xn't$	−2, 0, −1	− 0,031	+ 0,011
−1, 2, 0	+ 7 $xn't$	− 5 $xn't$	1, −3, −1	+ 0,122	− 0,028
2, −1, 0	+ 3 $xn't$	+ 1 $xn't$	0, −2, −1	− 0,184 x	− 0,778 x
0, 2, 0	+ 1,379	− 2,618	−1, −1, −1	− 0,003 x	− 0,014 x
−1, 3, 0	+ 0,208	− 0,232	0, −1, −1	+ 1,027	− 0,896
−2, 4, 0	+ 0,009	+ 0,023	−1, 0, −1	− 1,351	+ 1,170
1, 1, 0	− 2,310	+ 4,031	−2, 1, −1	− 0,020	+ 0,020
2, 0, 0	− 0,01314 $n't$	− 0,01282 $n't$	1, −2, −1	+ 0,149	− 0,138
0, 2, 0	+ 1,785 x	+ 1,022 x	2, −3, −1	+ 0,011	+ 0,006
−1, 3, 0	+ 0,037 x	+ 0,074 x	0, −1, −1	− 0,727 x	− 0,873 x
1, 1, 0	− 0,025 x	− 0,006 x	−1, 0, −1	− 0,010 x	− 0,010 x
2, 0, 0	− 58,40 $xn't$	+ 36,10 $xn't$	1, −2, −1	− 0,037 x	− 0,048 x
0, 2, 0	− 140 $n't$	− 74 $n't$	0, −1, −1	+ 21 $n't$	+ 30 $n't$

Digitized by Google

γ g' g	sin	cos	γ g' g	sin	cos
−1, 0, −1	− 4 n't	+ 3 n't	0, 2, −1	+ 1,488 x	− 1,409 x
−2, 1, −1	− 71 n't	− 42 n't	−1, 3, −1	− 0,017 x	− 0,181 x
1, −2, −1	− 3 n't	− 18 n't	−2, 4, −1	+ 0,013 x	− 0,042 x
0, −1, −1	− 6 xn't	− 12 xn't	1, 1, −1	+ 0,170 x	+ 0,039 x
−2, 1, −1	− 24 xn't	+ 67 xn't	2, 0, −1	+ 0,087 x	− 0,019 x
0, 0, −1	+ 0,839	− 0,934	0, 2, −1	− 4111 n't	+ 4002 n't
−1, 1, −1	− 1,237	+ 1,263	−1, 3, −1	− 3143 n't	+ 2891 n't
−2, 2, −1	− 0,053	+ 0,030	−2, 4, −1	+ 15 n't	− 17 n't
1, −1, −1	+ 0,206	− 0,184	1, 1, −1	− 482 n't	+ 490 n't
2, −2, −1	− 0,006	+ 0,073	2, 0, −1	+ 1737 n't	− 1662 n't
0, 0, −1	− 0,803 x	− 0,772 x	0, 2, −1	− 1213 xn't	− 1380 xn't
−1, 1, −1	− 0,060 x	− 0,067 x	−1, 3, −1	+ 56 xn't	+ 21 xn't
−2, 2, −1	+ 0,037 x	− 0,008 x	1, 1, −1	− 1777 xn't	− 1854 xn't
1, −1, −1	+ 0,119 x	− 0,071 x	0, 3, −1	+ 4,016	+ 4,019
0, 0, −1	− 1159 n't	− 412 n't	−1, 4, −1	+ 0,239	+ 0,130
−1, 1, −1	− 172 n't	− 57 n't	−2, 5, −1	− 1,547	− 0,430
−2, 2, −1	+ 768 n't	+ 254 n't	1, 2, −1	+ 3,845	+ 2,022
1, −1, −1	+ 97 n't	+ 34 n't	0, 3, −1	− 0,693 x	− 1,712 x
0, 0, −1	− 1 xn't	+ 5 xn't	−1, 4, −1	+ 0,489 x	− 1,532 x
−1, 1, −1	− 866 xn't	+ 2418 xn't	1, 2, −1	+ 0,005 x	− 0,051 x
0, 1, −1	+ 0,615	+ 1,081	0, 3, −1	+ 975 n't	+ 878 n't
−1, 2, −1	− 1,483	− 3,107	−1, 4, −1	− 73 n't	+ 698 n't
−2, 3, −1	− 0,006	− 0,007	1, 2, −1	+ 578 n't	+ 556 n't
1, 0, −1	+ 0,002	− 0,176	2, 1, −1	+ 18 n't	− 6 n't
2, −1, −1	+ 0,257	+ 1,186	3, 0, −1	+ 77 n't	− 76 n't
0, 1, −1	− 0,658 x	− 0,147 x	0, 3, −1	− 1440 xn't	+ 215 xn't
−1, 2, −1	+ 1,330 x	− 0,330 x	1, 2, −1	+ 50 xn't	− 267 xn't
−2, 3, −1	+ 0,016 x	+ 0,012 x	2, 1, −1	− 50 xn't	− 53 xn't
1, 0, −1	+ 3,110 x	− 0,668 x	0, 4, −1	+ 3,265	− 0,632
2, −1, −1	+ 0,002 x	− 0,002 x	−1, 5, −1	− 4,951	+ 0,942
0, 1, −1	− 101 n't	+ 113 n't	−2, 6, −1	+ 0,004	+ 0,006
−1, 2, −1	+ 268 n't	− 915 n't	1, 3, −1	+ 1,841	− 0,281
−2, 3, −1	+ 279 n't	− 192 n't	2, 2, −1	+ 0,062	+ 0,035
1, 0, −1	+ 125 n't	− 33 n't	0, 4, −1	− 1,226 x	− 6,353 x
2, −1, −1	0 n't	+ 12 n't	−1, 5, −1	− 0,033 x	− 0,166 x
0, 1, −1	+ 43 xn't	− 255 xn't	1, 3, −1	− 0,010 x	− 0,054 x
−1, 2, −1	− 261 xn't	+ 73 xn't	0, 4, −1	− 1 n't	− 35 n't
0, 2, −1	+ 1,570	+ 2,432	−1, 5, −1	+ 45 n't	+ 79 n't
−1, 3, −1	+ 0,243	+ 0,349	1, 3, −1	+ 19 n't	+ 36 n't
−2, 4, −1	− 0,062	+ 0,106	2, 2, −1	+ 10 n't	+ 6 n't
−3, 5, −1	− 0,068	− 0,019	0, 4, −1	− 114 xn't	+ 75 xn't
1, 1, −1	+ 0,496	+ 0,503	1, 3, −1	− 46 xn't	+ 41 xn't
2, 0, −1	− 0,004	+ 0,004	0, −1, −2	+ 0,235	+ 0,469
3, −1, −1	+ 0,012	+ 0,053	−1, 0, −2	− 0,289	− 0,585

γ g′ g	sin	cos	γ g′ g	sin	cos
−2, 1, −2	− 0″,009	− 0″,007	−3, 5, −2	+ 45 n′t	+ 50 n′t
1, −2, −2	+ 0,040	+ 0,083	1, 1, −2	− 13 n′t	+ 15 n′t
0, 1, −2	+ 0,440 x	− 0,212 x	2, 0, −2	+ 81 n′t	− 79 n′t
−1, 0, −2	+ 0,006 x	− 0,002 x	0, 2, −2	− 147 xn′t	− 91 xn′t
1, −2, −2	− 0,002	+ 0,002 x	−1, 3, −2	+ 107 xn′t	− 40 xn′t
0, 0, −2	+ 0,569	+ 0,431	1, 1, −2	− 75 xn′t	− 81 xn′t
−1, 1, −2	− 0,757	− 0,553	0, 3, −2	+ 0,036	+ 0,706
1, −1, −2	+ 0,123	+ 0,077	−1, 4, −2	+ 0,449	− 0,170
2, −2, −2	+ 0,007	+ 0,005	−2, 5, −2	− 0,067	− 0,146
0, 0, −2	+ 0,420 x	− 0,574 x	−3, 6, −2	+ 0,004	− 0,040
1, −1, −2	+ 0,017 x	− 0,026 x	1, 2, −2	− 0,179	− 0,606
0, 0, −2	− 46 n′t	− 9 n′t	2, 1, −2	− 0,008	− 0,002
−1, 1, −2	− 16 n′t	− 16 n′t	3, 0, −2	− 0,039	+ 0,017
−2, 2, −2	+ 53 n′t	+ 32 n′t	0, 3, −2	− 0,320 x	+ 0,154 x
1, −1, −2	+ 5 n′t	− 5 n′t	−1, 4, −2	− 0,025 x	− 0,119 x
0, 0, −2	− 2 xn′t	0 xn′t	−2, 5, −2	+ 0,040 x	+ 0,005 x
−1, 1, −2	− 39 xn′t	+ 103 xn′t	1, 2, −2	− 0,148 x	+ 0,181 x
0, 1, −2	+ 0,427	+ 0,217	2, 1, −2	+ 0,022 x	+ 0,047 x
−1, 2, −2	− 0,576	− 0,361	0, 3, −2	− 2211 n′t	− 1576 n′t
−2, 3, −2	+ 0,006	− 0,030	−1, 4, −2	+ 3871 n′t	+ 2773 n′t
1, 0, −2	+ 0,082	+ 0,082	−2, 5, −2	+ 897 n′t	+ 1106 n′t
2, −1, −2	+ 0,018	+ 0,049	1, 2, −2	− 362 n′t	− 263 n′t
0, 1, −2	+ 0,243 x	− 0,353 x	2, 1, −2	− 19 n′t	− 15 n′t
−1, 2, −2	+ 0,048 x	− 0,113 x	0, 3, −2	− 1183 xn′t	+ 1627 xn′t
−2, 3, −2	− 0,001 x	+ 0,004 x	−1, 4, −2	+ 29 xn′t	− 36 xn′t
1, 0, −2	+ 0,145 x	− 0,051 x	−2, 5, −2	− 1 xn′t	+ 6 xn′t
0, 1, −2	+ 10 n′t	− 46 n′t	1, 2, −2	− 142 xn′t	+ 192 xn′t
−1, 2, −2	− 86 n′t	+ 520 n′t	0, 4, −2	+ 0,352	− 0,309
−2, 3, −2	+ 86 n′t	− 537 n′t	−1, 5, −2	+ 7,567	− 19,177
1, 0, −2	+ 3 n′t	− 17 n′t	−2, 6, −2	+ 0,067	− 0,906
0, 1, −2	− 25 xn′t	− 10 xn′t	1, 3, −2	− 0,221	+ 1,029
−1, 2, −2	+ 235 xn′t	+ 41 xn′t	2, 2, −2	− 0,010	− 0,002
0, 2, −2	− 0,512	+ 0,428	0, 4, −2	+ 1,318 x	+ 0,208 x
−1, 3, −2	+ 1,109	− 0,709	−1, 5, −2	+ 1,141 x	+ 0,183 x
−2, 4, −2	− 0,309	+ 0,127	1, 3, −2	+ 0,028 x	+ 0,016 x
−3, 5, −2	− 0,009	+ 0,053	0, 4, −2	− 3025 n′t	− 312 n′t
1, 1, −2	+ 0,710	− 0,307	−1, 5, −2	− 44225 n′t	− 3625 n′t
2, 0, −2	− 0,862	+ 0,384	−2, 6, −2	+ 6 n′t	+ 4 n′t
0, 2, −2	− 0,064 x	− 0,455 x	1, 3, −2	− 213 n′t	+ 3 n′t
−1, 3, −2	− 0,023 x	− 0,132 x	2, 2, −2	− 18 n′t	0 n′t
1, 1, −2	+ 0,768 x	+ 1,701 x	0, 4, −2	− 138 xn′t	+ 1595 xn′t
0, 2, −2	− 33 n′t	− 83 n′t	−1, 5, −2	− 32 xn′t	+ 212 xn′t
−1, 3, −2	+ 24 n′t	+ 367 n′t	1, 3, −2	− 12 xn′t	+ 115 xn′t
−2, 4, −2	− 64 n′t	− 271 n′t	2, 2, −2	− 4 xn′t	+ 5 xn′t

Digitized by Google

γ g′ g	sin	cos	γ g′ g	sin	cos
0, 5, −2	− 40″,645	− 182″,189	−2, 4, −3	+ 0″,011 x	− 0″,008 x
−1, 6, −2	+ 0,10459	+ 0,08119	1, 1, −3	+ 0,079 x	+ 0,167 x
−2, 7, −2	− 0,03165	− 0,04428	0, 2, −3	+ 72 n′t	− 8 n′t
−3, 8, −2	− 0,00014	− 0,00006	−1, 3, −3	−266 n′t	+ 22 n′t
1, 4, −2	+ 0,00781	− 0,02717	−2, 4, −3	+198 n′t	− 13 n′t
2, 3, −2	− 0,00168	+ 0,01011	1, 1, −3	+ 8 n′t	0 n′t
3, 2, −2	− 0,00056	− 0,00076	0, 2, −3	− 5 xn′t	− 48 xn′t
0, 5, −2	+ 2,89762 x	+ 0,19997 x	−1, 3, −3	+ 9 xn′t	+ 108 xn′t
−1, 6, −2	+ 0,14492 x	− 0,07918 x	0, 3, −3	− 0,220	− 0,133
−2, 7, −2	+ 0,00013 x	− 0,00030 x	−1, 4, −3	+ 0,229	+ 0,143
1, 4, −2	+ 0,10073 x	− 0,04442 x	−2, 5, −3	− 0,174	− 0,264
2, 3, −2	+ 0,00083 x	− 0,00044 x	1, 2, −3	+ 0,196	+ 0,284
3, 2, −2	− 0,00017 x	+ 0,00023 x	2, 1, −3	+ 0,012	+ 0,017
0, 5, −2	−292481 n′t	+138808 n′t	0, 3, −3	− 0,055 x	+ 0,127 x
−1, 6, −2	− 343,54 n′t	+ 168,23 n′t	−1, 4, −3	+ 0,708 x	− 0,499 x
−2, 7, −2	+ 0,39 n′t	+ 0,04 n′t	−2, 5, −3	+ 0,004 x	− 0,005 x
1, 4, −2	− 96,00 n′t	+ 65,67 n′t	1, 2, −3	+ 0,240 x	− 0,160 x
2, 3, −2	− 6,72 n′t	+ 2,59 n′t	0, 3, −3	+ 38 n′t	− 30 n′t
3, 2, −2	− 0,72 n′t	− 0,08 n′t	−1, 4, −3	−107 n′t	+ 70 n′t
0, 5, −2	− 4753 xn′t	− 10046 xn′t	−2, 5, −3	+ 82 n′t	− 38 n′t
−1, 6, −2	+ 0,38 xn′t	+ 0,91 xn′t	1, 2, −3	− 5 n′t	− 5 n′t
1, 4, −2	+ 18,77 xn′t	+ 42,02 xn′t	2, 1, −3	− 1 n′t	+ 1 n′t
2, 3, −2	− 0,35 xn′t	+ 3,19 xn′t	0, 3, −3	− 30 xn′t	− 17 xn′t
3, 2, −2	− 0,16 xn′t	+ 0,22 xn′t	−1, 4, −3	+ 30 xn′t	+ 47 xn′t
0, 6, −2	− 0,188	− 0,149	1, 2, −3	− 1 xn′t	+ 5 xn′t
−1, 7, −2	+ 0,193	+ 0,112	0, 4, −3	− 0,137	+ 0,039
−2, 8, −2	− 0,006	− 0,003	−1, 5, −3	+ 0,264	− 0,028
1, 5, −2	+ 0,688	+ 0,017	−2, 6, −3	− 0,285	− 0,091
2, 4, −2	− 0,017	− 0,045	−3, 7, −3	+ 0,018	0,000
0, 6, −2	− 0,145 x	+ 0,259 x	1, 3, −3	+ 0,160	+ 0,093
−1, 7, −2	+ 0,004 x	− 0,011 x	2, 2, −3	+ 0,002	0,000
1, 5, −2	− 0,002 x	− 0,003 x	0, 4, −3	+ 0,023 x	+ 0,059 x
0, 6, −2	− 1 n′t	+ 7 n′t	−1, 5, −3	+ 0,259 x	− 0,459 x
−1, 7, −2	− 15 n′t	+ 22 n′t	−2, 6, −3	+ 0,004 x	+ 0,043 x
1, 5, −2	− 3620 n′t	+ 4931 n′t	1, 3, −3	+ 0,058 x	− 0,122 x
0, 6, −2	− 42 xn′t	− 29 xn′t	0, 4, −3	+420 n′t	− 985 n′t
1, 5, −2	− 176 xn′t	− 124 xn′t	−1, 5, −3	−619 n′t	+1434 n′t
0, 2, −3	− 0,128	+ 0,120	−2, 6, −3	+ 22 n′t	− 22 n′t
−1, 3, −3	+ 0,168	− 0,183	1, 3, −3	+ 88 n′t	− 221 n′t
−2, 4, −3	+ 0,021	+ 0,022	2, 2, −3	+ 8 n′t	− 19 n′t
1, 1, −3	+ 0,033	− 0,003	0, 4, −3	−912 xn′t	− 381 xn′t
2, 0, −3	− 0,082	+ 0,038	−1, 5, −3	+ 16 xn′t	+ 9 xn′t
0, 2, −3	+ 0,087 x	+ 0,054 x	1, 3, −3	−101 xn′t	− 40 xn′t
−1, 3, −3	+ 0,006 x	+ 0,061 x	0, 5, −3	− 0,952	+ 0,190

Digitized by Google

γ g′ g	sin	cos	γ g′ g	sin	cos
−1, 6, −3	+ 0″,057	− 0″,142	0, 8, −3	− 0″,371 x	+ 0″,254 x
−2, 7, −3	+ 0,386	− 0,042	0, 8, −3	− 16 $n't$	+ 3 $n't$
1, 4, −3	+ 0,175	− 0,013	−1, 9, −3	− 10 $n't$	+ 3 $n't$
2, 3, −3	+ 0,002	0,000	0, 8, −3	− 6 $xn't$	− 24 $xn't$
0, 5, −3	+ 0,030 x	+ 0,044 x	0, 3, −4	+ 7 $n't$	+ 53 $n't$
−1, 6, −3	+ 0,168 x	+ 1,471 x	−1, 4, −4	− 47 $n't$	− 132 $n't$
1, 4, −3	− 0,004 x	− 0,043 x	−2, 5, −4	+ 24 $n't$	+ 79 $n't$
0, 5, −3	− 72 $n't$	− 758 $n't$	1, 2, −4	+ 13 $n't$	+ 2 $n't$
−1, 6, −3	+ 128 $n't$	+ 1133 $n't$	0, 3, −4	+ 41 $xn't$	− 15 $xn't$
−2, 7, −3	+ 9 $n't$	+ 11 $n't$	−1, 4, −4	− 49 $xn't$	+ 15 $xn't$
1, 4, −3	− 23 $n't$	− 127 $n't$	0, 4, −4	+ 0,041	− 0,040
2, 3, −3	− 2 $n't$	− 9 $n't$	−1, 5, −4	+ 0,018	− 0,040
0, 5, −3	− 633 $xn't$	+ 68 $xn't$	−2, 6, −4	+ 0,024	− 0,029
1, 4, −3	− 55 $xn't$	+ 6 $xn't$	1, 3, −4	− 0,079	+ 0,105
0, 6, −3	− 2,699	+ 2,060	2, 2, −4	− 0,011	+ 0,012
−1, 7, −3	− 1,178	− 0,051	0, 4, −4	− 0,005 x	− 0,015 x
−2, 8, −3	+ 0,115	− 0,177	−1, 5, −4	+ 0,190 x	+ 0,150 x
1, 5, −3	+ 4,057	− 2,837	1, 3, −4	+ 0,099 x	+ 0,084 x
0, 6, −3	− 3,892 x	− 5,731 x	0, 4, −4	+ 18 $n't$	− 7 $n't$
−1, 7, −3	− 0,096 x	+ 0,165 x	−1, 5, −4	− 45 $n't$	− 21 $n't$
1, 5, −3	+ 0,100 x	+ 0;142 x	−2, 6, −4	+ 26 $n't$	+ 34 $n't$
0, 6, −3	− 266 $n't$	− 368 $n't$	1, 3, −4	+ 2 $n't$	− 10 $n't$
−1, 7, −3	+ 615 $n't$	+ 802 $n't$	0, 4, −4	− 19 $xn't$	− 19 $xn't$
1, 5, −3	− 30 $n't$	− 33 $n't$	−1, 5, −4	− 21 $xn't$	+ 21 $xn't$
2, 4, −3	− 3 $n't$	− 1 $n't$	1, 3, −4	− 4 $xn't$	+ 1 $xn't$
0, 6, −3	− 244 $xn't$	+ 181 $xn't$	0, 5, −4	− 0,062	− 0,093
1, 5, −3	− 16 $xn't$	+ 11 $xn't$	−1, 6, −4	+ 0,050	+ 0,044
0, 7, −3	+ 1,907	+ 4,267	−2, 7, −4	+ 0,023	− 0,008
−1, 8, −3	− 0,047	+ 1,644	1, 4, −4	− 0,024	+ 0,075
−2, 9, −3	+ 0,001	− 0,015	2, 3, −4	+ 0,001	+ 0,004
1, 6, −3	+ 0,174	− 0,084	0, 5, −4	− 0,039 x	+ 0,068 x
2, 5, −3	+ 0,113	− 0,080	−1, 6, −4	+ 0,131 x	+ 0,084 x
0, 7, −3	+ 0,644 x	− 1,420 x	1, 4, −4	+ 0,058 x	+ 0,014 x
−1, 8, −3	+ 0,058 x	+ 0,004 x	0, 5, −4	+ 482 $n't$	+ 89 $n't$
1, 6, −3	+ 0,003 x	+ 0,001 x	−1, 6, −4	− 670 $n't$	− 123 $n't$
2, 5, −3	+ 0,002 x	+ 0,004 x	−2, 7, −4	− 7 $n't$	+ 2 $n't$
0, 7, −3	− 582 $n't$	− 214 $n't$	1, 4, −4	+ 126 $n't$	+ 19 $n't$
−1, 8, −3	− 155 $n't$	− 58 $n't$	2, 3, −4	+ 11 $n't$	+ 2 $n't$
1, 6, −3	− 12 $n't$	− 7 $n't$	0, 5, −4	+ 85 $xn't$	− 505 $xn't$
0, 7, −3	− 71 $xn't$	+ 189 $xn't$	1, 4, −4	+ 8 $xn't$	− 50 $xn't$
1, 6, −3	− 3 $xn't$	+ 6 $xn't$	0, 6, −4	− 0,174	− 0,061
0, 8, −3	+ 0,337	+ 0,151	−1, 7, −4	+ 0,075	+ 0,484
−1, 9, −3	+ 0,068	+ 0,180	−2, 8, −4	− 0,091	− 0,326
1, 7, −3	+ 0,082	− 0,022	1, 5, −4	+ 0,179	− 0,129

Digitized by Google

γ g' g	sin	cos	γ g' g	sin	cos
0, 6, −4	− 0″,253 x	− 0″,194 x	0, 8, −4	+ 19 $n't$	− 71 $n't$
−1, 7, −4	+ 0,183 x	− 0,055 x	−1, 9, −4	− 22 $n't$	+ 113 $n't$
1, 5, −4	+ 0,019 x	+ 0,003 x	−2, 10, −4	− 3 $n't$	0 $n't$
0, 6, −4	+ 341 $n't$	− 110 $n't$	1, 7, −4	− 1 $n't$	− 8 $n't$
−1, 7, −4	− 468 $n't$	+ 162 $n't$	0, 8, −4	− 54 $xn't$	− 11 $xn't$
1, 5, −4	+ 73 $n't$	− 31 $n't$	1, 7, −4	− 3 $xn't$	0 $xn't$
2, 4, −4	+ 6 $n't$	− 2 $n't$	0, 9, −4	− 1,063	+ 0,278
0, 6, −4	− 114 $xn't$	− 339 $xn't$	−1, 10, −4	− 5,748	+ 1,721
1, 5, −4	− 9 $xn't$	− 28 $xn't$	1, 8, −4	− 0,013	+ 0,019
0, 7, −4	− 1,461	− 1,378	0, 9, −4	+ 0,144 x	+ 0,505 x
−1, 8, −4	+ 2,000	+ 1,850	−1, 10, −4	+ 0,037 x	+ 0,125 x
−2, 9, −4	− 0,128	− 0,144	0, 9, −4	− 14 $n't$	− 42 $n't$
−3, 10, −4	+ 0,020	+ 0,006	−1, 10, −4	− 107 $n't$	− 318 $n't$
1, 6, −4	− 0,080	− 0,080	1, 8, −4	− 1 $n't$	− 2 $n't$
0, 7, −4	− 0,972 x	+ 1,015 x	0, 9, −4	− 22 $xn't$	+ 9 $xn't$
−1, 8, −4	+ 0,077 x	− 0,079 x	0, 10, −4	− 13,415	+ 14,305
0, 7, −4	+ 111 $n't$	− 125 $n't$	−1, 11, −4	− 0,06258	+ 0,06946
−1, 8, −4	− 150 $n't$	+ 176 $n't$	1, 9, −4	+ 0,00023	+ 0,01047
1, 6, −4	+ 16 $n't$	− 24 $n't$	2, 8, −4	− 0,00022	+ 0,00034
2, 5, −4	+ 1 $n't$	− 2 $n't$	0, 10, −4	− 1,024 x	− 0,967 x
0, 7, −4	− 111 $xn't$	− 97 $xn't$	−1, 11, −4	+ 0,00046 x	+ 0,00043 x
1, 6, −4	− 8 $xn't$	− 5 $xn't$	1, 9, −4	− 0,00007 x	0,00000 x
0, 8, −4	− 1,487	− 0,392	0, 10, −4	− 634 $n't$	− 554 $n't$
−1, 9, −4	+ 2,299	+ 0,547	−1, 11, −4	− 2,74 $n't$	− 2,43 $n't$
−2, 10, −4	+ 0,514	+ 0,133	1, 9, −4	− 1,08 $n't$	− 0,56 $n't$
1, 7, −4	− 0,044	+ 0,012	2, 8, −4	− 0,03 $n't$	+ 0,02 $n't$
0, 8, −4	− 0,235 x	+ 0,940 x	0, 10, −4	+ 39 $xn't$	− 44 $xn't$
−1, 9, −4	+ 0,013 x	− 0,053 x	1, 9, −4	− 0,19 $xn't$	+ 0,20 $xn't$
−2, 10, −4	+ 0,001 x	+ 0,004 x			

$\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)$

γ g′ g	cos	sin	γ g′ g	cos	sin
0, 0, 0	+ 0,273	. . . .	−1, 4, 0	− 0,071	− 0,063
1,−1, 0	− 2,387	+ 0,13113	−2, 5, 0	+ 0,130	− 0,046
2,−2, 0	+ 2,084	− 0,05722	1, 2, 0	+ 0,066	− 2,095
3,−3, 0	+ 0,030	− 0,04162	3, 0, 0	− 104 n't	+ 88 n't
0, 0, 0	0,000	. . . .	0, 3, 0	+ 30 n't	+ 7 n't
1,−1, 0	− 0,69 n't	− 240,29 n't	−1, 4, 0	− 26 n't	− 6 n't
2,−2, 0	− 4,50 n't	+ 179,37 n't	1, 2, 0	+ 2 n't	+ 1 n't
3,−3, 0	+ 0,48 n't	+ 0,84 n't	3, 0, 0	− 1,11 n'^2t^2	− 1,86 n'^2t^2
	0,000	. . . .		+ 0,015	− 1,025
	− 4,71 n't	. . . .		− 0,00098 n't	+ 0,00090 n't
	(− 2,36 n'^2t^2	. . . .)		(− 0,005	+ 0,342
0, 1, 0	+ 0,873	− 0,371		− 0,00034 n't	− 0,00030 n't)
−1, 2, 0	− 0,429	+ 0,092	0, 4, 0	− 0,262	− 0,080
−2, 3, 0	+ 0,444	+ 0,626	−1, 5, 0	+ 0,218	+ 0,041
1, 0, 0	− 0,96887 n't	+ 1,07734 n't	1, 3, 0	+ 0,117	+ 0,042
2,−1, 0	− 0,176	− 0,030	2, 2, 0	+ 0,002	− 0,028
3,−2, 0	+ 0,141	− 0,003		+ 0,075	− 0,025
0, 1, 0	− 963 n't	−1562 n't		(+ 0,019	+ 0,006)
−1, 2, 0	− 773 n't	+1237 n't	0,−2,−1	− 0,778	− 0,184
−2, 3, 0	+ 6 n't	− 12 n't	−1,−1,−1	+ 1,138	+ 0,259
1, 0, 0	− 176,67 n'^2t^2	− 110,18 n'^2t^2	−2, 0,−1	+ 0,062	+ 0,022
2,−1, 0	−1609 n't	+2587 n't	1,−3,−1	+ 0,122	+ 0,028
3,−2, 0	+ 3 n't	+ 15 n't		+ 0,544	+ 0,125
	+ 0,853	+ 0,314		(− 0,121	+ 0,028)
	− 0,98297 n't	+ 1,09999 n't	0,−1,−1	− 0,873	− 0,727
	(+ 1,971	− 1,300	−1, 0,−1	+ 1,341	+ 1,160
	− 0,98517 n't	− 1,10352 n't)	−2, 1,−1	+ 0,040	+ 0,040
0, 2, 0	+ 1,022	+ 1,785	1,−2,−1	+ 0,101	+ 0,101
−1, 3, 0	− 0,134	− 0,195	2,−3,−1	+ 0,022	− 0,012
−2, 4, 0	− 0,018	+ 0,046	0,−1,−1	− 12 n't	− 6 n't
1, 1, 0	− 2,316	− 4,056	−1, 0,−1	+ 4 n't	+ 3 n't
2, 0, 0	− 0,02592 n't	+ 0,02506 n't	−2, 1,−1	+209 n't	−108 n't
0, 2, 0	+ 242 n't	− 94 n't	1,−2,−1	− 3 n't	+ 18 n't
−1, 3, 0	− 208 n't	+ 80 n't		+ 0,631	+ 0,562
1, 1, 0	+ 74 n't	− 63 n't		+198 n't	− 93 n't
2, 0, 0	− 18,36 n'^2t^2	− 29,96 n'^2t^2		(− 0,181	+ 0,162
3,−1, 0	− 108 n't	+ 174 n't		− 57 n't	− 27 n't)
	− 1,446	− 2,420	0, 0,−1	− 0,772	− 0,803
	− 0,02592 n't	+ 0,02603 n't	−1, 1,−1	+ 1,170	+ 1,203
	(− 0,717	+ 1,203	−2, 2,−1	+ 0,098	+ 0,097
	− 0,01311 n't	− 0,01311 n't)	1,−1,−1	+ 0,135	+ 0,303
0, 3, 0	− 0,110	+ 1,179	2,−2,−1	− 0,012	− 0,146

Digitized by Google

γ g′ g	cos	sin	γ g′ g	cos	sin
0, 0, −1	+ 5 n′t	− 1 n′t	1, 2, −1	+ 311 n′t	− 506 n′t
−1, 1, −1	+ 2590 n′t	− 923 n′t	2, 1, −1	− 17 n′t	− 38 n′t
−2, 2, −1	− 1536 n′t	+ 508 n′t	3, 0, −1	+ 231 n′t	+ 228 n′t
1, −1, −1	+ 97 n′t	− 34 n′t		+ 3,405	− 2,951
	+ 0,619	+ 0,654		+ 813 n′t	− 1058 n′t
	+ 1156 n′t	− 450 n′t		(+ 6,550	+ 5,743)
	(− 0,249	+ 0,266)		+ 1573 n′t	+ 2048 n′t)
	− 465 n′t	− 181 n′t)	0, 4, −1	− 6,353	− 1,226
0, 1, −1	− 0,147	− 0,658	−1, 5, −1	+ 4,785	+ 0,909
−1, 2, −1	+ 1,153	− 1,777	−2, 6, −1	− 0,008	+ 0,012
−2, 3, −1	+ 0,024	+ 0,002	1, 3, −1	+ 1,787	+ 0,271
1, 0, −1	− 0,666	+ 3,286	2, 2, −1	+ 0,124	− 0,070
2, −1, −1	+ 0,512	− 2,370	0, 4, −1	+ 75 n′t	− 114 n′t
0, 1, −1	− 255 n′t	+ 43 n′t	−1, 5, −1	− 45 n′t	+ 79 n′t
−1, 2, −1	− 195 n′t	− 1176 n′t	1, 3, −1	+ 60 n′t	− 82 n′t
−2, 3, −1	− 558 n′t	− 384 n′t	2, 2, −1	+ 20 n′t	− 12 n′t
1, 0, −1	+ 125 n′t	+ 33 n′t		+ 0,335	− 0,104
2, −1, −1	0 n′t	− 24 n′t		+ 110 n′t	− 129 n′t
	+ 0,876	− 1,517		(+ 0,221	+ 0,068)
	− 883 n′t	− 1508 n′t		+ 73 n′t	+ 85 n′t)
	(− 0,597	− 1,027)	0, −1, −2	− 0,212	+ 0,440
	+ 596 n′t	− 1018 n′t)	−1, 0, −2	+ 0,287	− 0,579
0, 2, −1	− 1,409	+ 1,488	−2, 1, −2	+ 0,018	− 0,014
−1, 3, −1	− 0,424	+ 0,377	1, −2, −2	+ 0,042	− 0,085
−2, 4, −1	+ 0,082	+ 0,225		+ 0,135	− 0,238
−3, 5, −1	+ 0,204	− 0,057		(− 0,023	− 0,040)
1, 1, −1	+ 0,535	− 0,333	0, 0, −2	− 0,574	+ 0,420
2, 0, −1	− 0,027	+ 0,079	−1, 1, −2	+ 0,757	− 0,553
3, −1, −1	+ 0,036	− 0,159	1, −1, −2	+ 0,097	− 0,060
0, 2, −1	− 1380 n′t	− 1213 n′t	2, −2, −2	+ 0,014	− 0,010
−1, 3, −1	+ 3164 n′t	+ 2947 n′t	0, 0, −2	0 n′t	− 2 n′t
−2, 4, −1	− 30 n′t	− 34 n′t	−1, 1, −2	+ 119 n′t	− 55 n′t
1, 1, −1	− 2335 n′t	− 2267 n′t	−2, 2, −2	− 106 n′t	+ 64 n′t
2, 0, −1	+ 3474 n′t	+ 3324 n′t	1, −2, −2	+ 5 n′t	+ 5 n′t
	− 1,003	+ 1,620		+ 0,294	− 0,203
	+ 2893 n′t	+ 2757 n′t		+ 18 n′t	+ 12 n′t
	(+ 2,194	+ 3,434)		(− 0,059	− 0,041)
	− 5987 n′t	+ 5705 n′t)		− 4 n′t	+ 2 n′t)
0, 3, −1	− 1,712	− 0,693	0, 1, −2	− 0,353	+ 0,243
−1, 4, −1	− 1,771	+ 0,619	−1, 2, −2	+ 0,463	− 0,313
−2, 5, −1	+ 3,094	− 0,860	−2, 3, −2	− 0,008	− 0,061
1, 2, −1	+ 3,794	− 2,017	1, 0, −2	+ 0,031	+ 0,063
0, 3, −1	+ 215 n′t	− 1440 n′t	2, −1, −2	+ 0,036	− 0,098
−1, 4, −1	+ 73 n′t	+ 698 n′t	0, 1, −2	− 10 n′t	− 25 n′t

Digitized by Google

γ g' g	cos	sin	γ g' g	cos	sin
−1, 2, −2	+ 127 $n't$	+ 755 $n't$	0, 4, −2	+ 1595 $n't$	− 138 $n't$
−2, 3, −2	− 172 $n't$	−1074 $n't$	−1, 5, −2	+ 44437 $n't$	− 3657 $n't$
1, 0, −2	+ 3 $n't$	+ 17 $n't$	−2, 6, −2	− 12 $n't$	+ 8 $n't$
	+ 0,169	− 0,166	1, 3, −2	− 98 $n't$	− 15 $n't$
	− 52 $n't$	− 327 $n't$	2, 2, −2	− 31 $n't$	− 4 $n't$
	(− 0,043	− 0,042)		− 7,535	− 19,199
	(+ 13 $n't$	− 83 $n't$)		+ 45891 $n't$	− 3806 $n't$
0, 2, −2	− 0,455	− 0,064		(+ 7,754	− 19,375)
−1, 3, −2	− 1,241	− 0,732		(− 47474 $n't$	− 3937 $n't$)
−2, 4, −2	+ 0,618	+ 0,254	0, 5, −2	+ 0,19997	+ 2,89762
−3, 5, −2	+ 0,027	+ 0,159	−1, 6, −2	− 0,18377	+ 0,22611
1, 1, −2	+ 2,411	+ 1,075	−2, 7, −2	+ 0,06300	− 0,08843
2, 0, −2	− 1,724	− 0,768	−3, 8, −2	+ 0,00042	− 0,00018
0, 2, −2	− 91 $n't$	− 147 $n't$	1, 4, −2	− 0,03662	+ 0,12790
−1, 3, −2	− 64 $n't$	+ 474 $n't$	2, 3, −2	− 0,00380	− 0,01939
−2, 4, −2	+ 128 $n't$	− 542 $n't$	3, 2, −2	− 0,00145	+ 0,00211
−3, 5, −2	− 135 $n't$	+ 150 $n't$	0, 5, −2	− 10045,92 $n't$	− 4753,22 $n't$
1, 1, −2	− 94 $n't$	− 90 $n't$	−1, 6, −2	+ 354,45 $n't$	+ 168,61 $n't$
2, 0, −2	+ 162 $n't$	+ 158 $n't$	−2, 7, −2	− 0,78 $n't$	+ 0,08 $n't$
	− 0,364	− 0,076	1, 4, −2	− 53,98 $n't$	− 46,90 $n't$
	− 94 $n't$	+ 3 $n't$	2, 3, −2	− 10,25 $n't$	− 5,53 $n't$
	(+ 0,123	− 0,026)	3, 2, −2	− 1,94 $n't$	+ 0,08 $n't$
	(+ 32 $n't$	+ − 1 $n't$)		+ 0,03775	+ 3,14574
0, 3, −2	+ 0,154	− 0,320		− 9768,42 $n't$	− 4636,88 $n't$
−1, 4, −2	− 0,568	− 0,195		(− 40,563	− 182,167)
−2, 5, −2	+ 0,139	− 0,252		(−292927 $n't$	+139047 $n't$)
−3, 6, −2	− 0,012	− 0,120	0, 6, −2	+ 0,259	− 0,145
1, 2, −2	+ 0,002	+ 0,458	−1, 7, −2	− 0,204	+ 0,116
2, 1, −2	+ 0,031	+ 0,026	−2, 8, −2	+ 0,012	− 0,006
3, 0, −2	− 0,117	− 0,051	1, 5, −2	+ 0,685	− 0,019
0, 3, −2	+1627 $n't$	−1183 $n't$	2, 4, −2	− 0,034	+ 0,090
−1, 4, −2	−3907 $n't$	+2802 $n't$	0, 6, −2	− 29 $n't$	− 42 $n't$
−2, 5, −2	−1788 $n't$	+2211 $n't$	−1, 7, −2	+ 15 $n't$	+ 22 $n't$
1, 2, −2	− 164 $n't$	+ 121 $n't$	1, 5, −2	− 3744 $n't$	− 5107 $n't$
2, 1, −2	− 38 $n't$	+ 30 $n't$		+ 0,718	+ 0,036
	− 0,371	− 0,454		− 3758 $n't$	− 5127 $n't$
	−4270 $n't$	+3981 $n't$		(+ 0,647	− 0,070)
	(+ 0,199	− 0,242)		(− 3637 $n't$	+ 4960 $n't$)
	(+2171 $n't$	+2025 $n't$)	0, 2, −3	+ 0,054	+ 0,087
0, 4, −2	+ 0,208	+ 1,318	−1, 3, −3	− 0,107	− 0,177
−1, 5, −2	− 7,384	− 17,736	−2, 4, −3	− 0,050	+ 0,055
−2, 6, −2	− 0,134	− 1,812	1, 1, −3	+ 0,200	+ 0,082
1, 3, −2	− 0,205	− 1,001	2, 0, −3	− 0,164	− 0,076
2, 2, −2	− 0,020	+ 0,004	0, 2, −3	− 48 $n't$	− 5 $n't$

Digitized by Google

γ g′ g	cos	sin	γ g′ g	cos	sin
− 1, 3, − 3	+ 374 n′t	+ 31 n′t	1, 4, − 3	− 17 n′t	+ 72 n′t
− 2, 4, − 3	− 396 n′t	− 26 n′t	2, 3, − 3	− 4 n′t	+ 18 n′t
1, 1, − 3	+ 8 n′t	0 n′t		+ 0,822	− 0,019
	− 0,067	− 0,029		− 99 n′t	+ 612 n′t
	− 62 n′t	0 n′t		(− 0,336	− 0,008)
	(+ 0,012	− 0,005)		(+ 40 n′t	+ 250 n′t)
	(+ 11 n′t	0 n′t)	0, 6, − 3	− 5,731	− 3,892
0, 3, − 3	+ 0,127	− 0,055	− 1, 7, − 3	+ 1,343	− 0,147
− 1, 4, − 3	− 0,728	+ 0,851	− 2, 8, − 3	− 0,230	− 0,354
− 2, 5, − 3	+ 0.343	− 0,524	1, 5, − 3	+ 4,199	+ 2,937
1, 2, − 3	+ 0,036	− 0,044	0, 6, − 3	+ 181 n′t	− 244 n′t
2, 1, − 3	+ 0,024	− 0,034	− 1, 7, − 3	− 615 n′t	+ 802 n′t
0, 3, − 3	− 17 n′t	− 30 n′t	− 1, 5, − 3	− 19 n′t	+ 17 n′t
− 1, 4, − 3	+ 154 n′t	+ 100 n′t	2, 4, − 3	− 6 n′t	+ 2 n′t
− 2, 5, − 3	− 164 n′t	− 76 n′t		− 0,419	− 1,456
1, 2, − 3	0 n′t	+ 4 n′t		− 459 n′t	+ 577 n′t
2, 1, − 3	− 2 n′t	− 2 n′t		(+ 0,292	− 1,007)
	− 0,198	+ 0,194		(+ 316 n′t	+ 398 n′t)
	− 29 n′t	− 4 n′t	0, 7, − 3	− 1,420	+ 0,644
	(+ 0,045	+ 0,041)	− 1, 8, − 3	+ 0,051	+ 1,702
	(+ 7 n′t	− 1 n′t)	− 2, 9, − 3	− 0,002	− 0,030
0, 4, − 3	+ 0,059	+ 0,023	1, 6, − 3	+ 0,175	+ 0,087
− 1, 5, − 3	− 0,723	+ 0,231	2, 5, − 3	+ 0,230	+ 0,162
− 2, 6, − 3	+ 0,613	− 0,178	0, 7, − 3	+ 189 n′t	− 71 n′t
− 3, 7, − 3	− 0,054	0,000	− 1, 8, − 3	+ 155 n′t	− 58 n′t
1, 3, − 3	+ 0,038	− 0,035	1, 6, − 3	− 6 n′t	+ 4 n′t
2, 2, − 3	+ 0,004	0,000		− 0,966	+ 2,565
0, 4, − 3	− 381 n′t	− 912 n′t		+ 338 n′t	− 125 n′t
− 1, 5, − 3	+ 628 n′t	+ 1450 n′t		(+ 2,147	+ 5,700)
− 2, 6, − 3	− 44 n′t	− 44 n′t		(− 751 n′t	− 278 n′t)
1, 3, − 3	+ 48 n′t	+ 120 n′t	0, 8, − 3	+ 0,254	− 0,371
2, 2, − 3	+ 16 n′t	+ 38 n′t	− 1, 9, − 3	− 0,068	+ 0,180
	− 0,063	+ 0,041	1, 7, − 3	+ 0,082	+ 0,022
	+ 267 n′t	+ 652 n′t	0, 8, − 3	− 24 n′t	− 6 n′t
	(+ 0,018	+ 0,012)	− 1, 9, − 3	+ 10 n′t	+ 3 n′t
	(− 78 n′t	+ 189 n′t)		+ 0,268	− 0,169
0, 5, − 3	+ 0,044	+ 0,030		− 14 n′t	− 3 n′t
− 1, 6, − 3	+ 1,414	+ 0,026		(+ 0,488	+ 0,307)
− 2, 7, − 3	− 0,772	− 0,084		(− 25 n′t	+ 5 n′t)
1, 4, − 3	+ 0,132	+ 0,009	0, 3, − 4	− 15 n′t	+ 41 n′t
2, 3, − 3	+ 0,004	0,000	− 1, 4, − 4	+ 62 n′t	− 181 n′t
0, 5, − 3	+ 68 n′t	− 633 n′t	− 2, 5, − 4	− 48 n′t	+ 158 n′t
− 1, 6, − 3	− 128 n′t	+ 1133 n′t	1, 2, − 4	+ 13 n′t	− 2 n′t
− 2, 7, − 3	− 18 n′t	+ 22 n′t		+ 12 n′t	+ 16 n′t

Digitized by Google

γ g′ g	cos	sin	γ g′ g	cos	sin
	(— 2″ n′t	+ 2″ n′t)	1, 6, — 4	— 0″,080	+ 0″,080
0, 4, — 4	— 0,015	— 0,005	0, 7, — 4	— 97 n′t	— 111 n′t
— 1, 5, — 4	+ 0,132	+ 0,150	— 1, 8, — 4	+ 150 n′t	+ 176 n′t
— 2, 6, — 4	— 0,048	— 0,058	1, 6, — 4	+ 11 n′t	+ 16 n′t
1, 3, — 4	+ 0,005	— 0,006	2, 5, — 4	+ 2 n′t	+ 4 n′t
2, 2, — 4	— 0,022	— 0,024		— 0,948	+ 0,775
0, 4, — 4	— 19 n′t	— 19 n′t		+ 66 n′t	+ 85 n′t
— 1, 5, — 4	+ 66 n′t	— 42 n′t		(+ 0,324	+ 0,264)
— 2, 6, — 4	— 52 n′t	+ 68 n′t		(— 23 n′t	+ 29 n′t)
1, 3, — 4	+ 5 n′t	+ 6 n′t	0, 8, — 4	+ 0,940	— 0,235
	+ 0,052	+ 0,057	— 1, 9, — 4	— 2,352	+ 0,558
	— 2 n′t	+ 13 n′t	— 2, 10, — 4	— 1,024	+ 0,267
	(— 0,009	+ 0,009)	1, 7, — 4	— 0,044	— 0,012
	(0 n′t	+ 2 n′t)	0, 8, — 4	— 11 n′t	— 54 n′t
0, 5, — 4	+ 0,068	— 0,039	— 1, 9, — 4	+ 22 n′t	+ 113 n′t
— 1, 6, — 4	+ 0,034	+ 0,175	— 2, 10, — 4	+ 6 n′t	0 n′t
— 2, 7, — 4	— 0,046	— 0,016	1, 7, — 4	— 1 n′t	+ 5 n′t
1, 4, — 4	— 0,010	— 0,017		— 2,480	+ 0,578
2, 3, — 4	+ 0,002	— 0,008		+ 16 n′t	+ 64 n′t
0, 5, — 4	— 505 n′t	+ 85 n′t		(+ 1,283	+ 0,300)
— 1, 6, — 4	+ 670 n′t	— 123 n′t		(— 8 n′t	+ 33 n′t)
— 2, 7, — 4	+ 14 n′t	+ 4 n′t	0, 9, — 4	+ 0,505	+ 0,144
1, 4, — 4	+ 76 n′t	— 11 n′t	— 1, 10, — 4	+ 5,873	+ 1,758
2, 3, — 4	+ 22 n′t	— 4 n′t	1, 8, — 4	— 0,013	— 0,019
	+ 0,048	+ 0,095	0, 9, — 4	+ 9 n′t	— 22 n′t
	+ 277 n′t	— 49 n′t	— 1, 10, — 4	+ 107 n′t	— 318 n′t
	(— 0,010	+ 0,019)	1, 8, — 4	— 1 n′t	+ 2 n′t
	(— 56 n′t	— 10 n′t)		+ 6,365	+ 1,883
0, 6, — 4	— 0,194	— 0,253		+ 115 n′t	— 338 n′t
— 1, 7, — 4	— 0,130	+ 0,667		(— 6,817	+ 2,016)
— 2, 8, — 4	+ 0,182	— 0,652		(— 123 n′t	— 362 n′t)
1, 5, — 4	+ 0,182	+ 0,148	0, 10, — 4	— 0,967	— 1,024
0, 6, — 4	— 339 n′t	— 114 n′t	— 1, 11, — 4	+ 0,06301	+ 0,06992
— 1, 7, — 4	+ 468 n′t	+ 162 n′t	1, 9, — 4	+ 0,00023	— 0,01054
1, 5, — 4	+ 45 n′t	+ 22 n′t	2, 8, — 4	— 0,00044	— 0,00068
2, 4, — 4	+ 12 n′t	+ 4 n′t	0, 10, — 4	— 44 n′t	+ 39 n′t
	+ 0,040	— 0,090	— 1, 11, — 4	+ 2,74 n′t	— 2,43 n′t
	+ 186 n′t	+ 74 n′t	1, 9, — 4	— 0,88 n′t	+ 0,37 n′t
	(— 0,010	— 0,023)	2, 8, — 4	— 0,06 n′t	— 0,04 n′t
	(— 47 n′t	+ 19 n′t)		— 0,90420	— 0,96530
0, 7, — 4	+ 1,015	— 0,972		— 42,20 n′t	+ 36,90 n′t
— 1, 8, — 4	— 2,079	+ 1,937		(— 13,475	+ 14,377)
— 2, 9, — 4	+ 0,256	— 0,288		(— 633 n′t	— 553 n′t)
— 3, 10, — 4	— 0,060	+ 0,018			

Digitized by Google

$$-\frac{1}{n'}\left(\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}\right)$$

γ g′ g	sin	cos	γ g′ g	sin	cos
1, −1, 0	− 6,410	− 0,18048		− 0,089	+ 0,026
2, −2, 0	+ 4,144	+ 0,10268	−1, −1, −1	− 1,124	+ 0,256
3, −3, 0	+ 0,090	+ 0,12498	−2, 0, −1	− 0,124	+ 0,044
1, −1, 0	− 11,34 n′t	+ 351,10 n′t	1, −3, −1	+ 0,122	− 0,028
2, −2, 0	− 9,16 n′t	− 358,40 n′t		− 1,126	+ 0,272
3, −3, 0	+ 1,44 n′t	− 2,52 n′t	−1, 0, −1	− 1,331	+ 1,150
	. . . .	+ 0,04718	−2, 1, −1	− 0,080	+ 0,080
	. . . .	− 9,82 n′t	1, −2, −1	+ 0,053	− 0,064
−1, 2, 0	+ 0,829	− 0,121	2, −3, −1	+ 0,044	+ 0,024
−2, 3, 0	− 0,888	+ 1,252	−1, 0, −1	− 4 n′t	+ 3 n′t
1, 0, 0	− 0,95600 n′t	− 1,05652 n′t	−2, 1, −1	− 552 n′t	− 264 n′t
2, −1, 0	− 0,580	+ 0,060	1, −2, −1	− 3 n′t	− 18 n′t
3, −2, 0	+ 0,423	+ 0,009		− 1,314	+ 1,190
−1, 2, 0	+ 778 n′t	+ 1244 n′t		− 559 n′t	− 279 n′t
−2, 3, 0	− 12 n′t	− 24 n′t	−1, 1, −1	− 1,103	+ 1,143
1, 0, 0	− 176,67 n'^2t^2	+ 110,18 n'^2t^2	−2, 2, −1	− 0,180	+ 0,268
2, −1, 0	−3216 n′t	−5180 n′t	1, −1, −1	+ 0,064	− 0,422
3, −2, 0	+ 9 n′t	− 45 n′t	2, −2, −1	− 0,024	+ 0,292
	− 0,216	+ 1,200	−1, 1, −1	−5008 n′t	−1789 n′t
	− 0,98041 n′t	− 1,09657 n′t	−2, 2, −1	+3072 n′t	+1016 n′t
−1, 3, 0	+ 0,060	− 0,158	1, −1, −1	+ 97 n′t	+ 34 n′t
−2, 4, 0	+ 0,036	+ 0,092		− 1,243	+ 1,281
1, 1, 0	− 2,322	+ 4,081		−1839 n′t	− 739 n′t
2, 0, 0	− 0,05112 n′t	− 0,04895 n′t	−1, 2, −1	− 0,823	− 0,447
−1, 3, 0	+ 208 n′t	+ 80 n′t	−2, 3, −1	− 0,072	+ 0,036
1, 1, 0	+ 178 n′t	+ 103 n′t	1, 0, −1	− 1,334	− 6,396
2, 0, 0	− 36,72 n'^2t^2	+ 59,92 n'^2t^2	2, −1, −1	+ 1,020	+ 4,736
3, −1, 0	− 324 n′t	− 522 n′t	−1, 2, −1	+ 122 n′t	−1437 n′t
	− 2,226	+ 4,015	−2, 3, −1	+1116 n′t	− 768 n′t
	−5050 n′t	−5234 n′t	1, 0, −1	+ 125 n′t	− 33 n′t
−1, 4, 0	+ 0,134	− 0,043	2, −1, −1	0 n′t	+ 48 n′t
−2, 5, 0	− 0,260	− 0,092		− 1,209	− 2,071
1, 2, 0	+ 0,065	+ 2,056		+1363 n′t	−2180 n′t
3, 0, 0	− 308 n′t	− 257 n′t	−1, 3, −1	+ 0,605	+ 0,360
−1, 4, 0	+ 26 n′t	− 6 n′t	−2, 4, −1	− 0,080	+ 0,476
1, 2, 0	0 n′t	− 9 n′t	−3, 5, −1	− 0,612	− 0,171
3, 0, 0	− 3,33 n'^2t^2	+ 5,58 n'^2t^2	1, 1, −1	+ 0,574	+ 0,163
	− 0,061	+ 1,921	2, 0, −1	− 0,092	− 0,332
	− 282 n′t	− 272 n′t	3, −1, −1	+ 0,108	+ 0,477
−1, 5, 0	− 0,210	+ 0,040	−1, 3, −1	−3185 n′t	+3003 n′t
1, 3, 0	+ 0,117	− 0,042	−2, 4, −1	+ 60 n′t	− 68 n′t
2, 2, 0	+ 0,004	+ 0,028	1, 1, −1	−4188 n′t	+4044 n′t

Digitized by Google

γ g′ g	sin	cos	γ g′ g	sin	cos
2, 0, −1	+ 6948″ n′t	− 6648″ n′t	−3, 5, −2	− 0″,081	+ 0″,477
	+ 0,503	+ 0,973	1, 1, −2	+ 4,122	− 1,843
	− 365 n′t	+ 331 n′t	2, 0, −2	− 3,448	+ 1,536
−1, 4, −1	+ 3,303	+ 1,108	−1, 3, −2	+ 104 n′t	+ 581 n′t
−2, 5, −1	− 6,188	− 1,720	−2, 4, −2	− 256 n′t	− 1084 n′t
1, 2, −1	+ 3,743	+ 2,012	−3, 5, −2	+ 405 n′t	+ 450 n′t
−1, 4, −1	− 73 n′t	+ 698 n′t	1, 1, −2	− 175 n′t	+ 165 n′t
1, 2, −1	+ 44 n′t	+ 456 n′t	2, 0, −2	+ 324 n′t	− 316 n′t
2, 1, −1	− 140 n′t	+ 176 n′t		+ 0,720	− 0,077
3, 0, −1	+ 693 n′t	− 684 n′t		+ 402 n′t	− 204 n′t
	+ 0,858	+ 1,400	−1, 4, −2	+ 0,687	− 0,220
	+ 524 n′t	+ 646 n′t	−2, 5, −2	− 0,288	− 0,424
−1, 5, −1	− 4,619	+ 0,876	−3, 6, −2	+ 0,036	− 0,360
−2, 6, −1	+ 0,016	+ 0,024	1, 2, −2	+ 0,183	− 0,310
1, 3, −1	+ 1,733	− 0,261	2, 1, −2	+ 0,156	− 0,096
2, 2, −1	+ 0,248	+ 0,140	3, 0, −2	− 0,351	+ 0,153
−1, 5, −1	+ 45 n′t	+ 79 n′t	−1, 4, −2	+ 3943 n′t	+ 2831 n′t
1, 3, −1	+ 101 n′t	+ 128 n′t	−2, 5, −2	+ 3564 n′t	+ 4420 n′t
2, 2, −1	+ 40 n′t	+ 24 n′t	1, 2, −2	+ 20 n′t	+ 21 n′t
	− 2,622	+ 0,779	2, 1, −2	− 76 n′t	− 60 n′t
	+ 186 n′t	+ 231 n′t		+ 0,423	− 1,257
−1, 0, −2	− 0,285	− 0,573		+ 7451 n′t	+ 7212 n′t
−2, 1, −2	− 0,036	− 0,028	−1, 5, −2	+ 7,201	− 16,295
1, −2, −2	+ 0,044	+ 0,087	−2, 6, −2	+ 0,268	− 3,624
	− 0,277	− 0,514	1, 3, −2	− 0,189	+ 0,973
−1, 1, −2	− 0,757	− 0,553	2, 2, −2	− 0,040	− 0,008
1, −1, −2	+ 0,071	+ 0,043	−1, 5, −2	− 44649 n′t	− 3689 n′t
2, −2, −2	+ 0,028	+ 0,020	−2, 6, −2	+ 24 n′t	+ 16 n′t
−1, 1, −2	− 222 n′t	− 94 n′t	1, 3, −2	− 17 n′t	+ 27 n′t
−2, 2, −2	+ 212 n′t	+ 128 n′t	2, 2, −2	− 52 n′t	+ 16 n′t
1, −1, −2	+ 5 n′t	− 5 n′t		+ 7,240	− 18,954
	− 0,658	− 0,490		− 44694 n′t	− 3630 n′t
	− 5 n′t	+ 29 n′t	−1, 6, −2	+ 0,26295	+ 0,37103
−1, 2, −2	− 0,350	− 0,265	−2, 7, −2	− 0,12540	− 0,17660
−2, 3, −2	+ 0,008	− 0,124	−3, 8, −2	− 0,00126	− 0,00054
1, 0, −2	− 0,020	− 0,208	1, 4, −2	− 0,08105	− 0,22863
2, −1, −2	+ 0,072	+ 0,196	2, 3, −2	− 0,00848	+ 0,03712
−1, 2, −2	− 168 n′t	+ 990 n′t	3, 2, −2	− 0,00366	− 0,00582
−2, 3, −2	+ 344 n′t	− 2148 n′t	−1, 6, −2	− 345,36 n′t	+ 168,99 n′t
1, 0, −2	+ 3 n′t	− 17 n′t	−2, 7, −2	+ 1,56 n′t	+ 0,16 n′t
	− 0,290	− 0,401	1, 4, −2	− 11,96 n′t	+ 28,13 n′t
	+ 179 n′t	− 1175 n′t	2, 3, −2	− 14,12 n′t	+ 11,76 n′t
−1, 3, −2	+ 1,373	− 0,755	3, 2, −2	− 5,16 n′t	+ 0,24 n′t
−2, 4, −2	− 1,236	+ 0,508		+ 0,04310	− 0,00390

γ	g′	g	sin	cos	γ	g′	g	sin	cos
			− 375″,04 n′t	+ 209″,28 n′t	− 2,	7,	− 3	+ 36 n′t	+ 44 n′t
− 1,	7,	− 2	+ 0,215	+ 0,120	1,	4,	− 3	− 11 n′t	− 17 n′t
− 2,	8,	− 2	− 0,024	− 0,012	2,	3,	− 3	− 8 n′t	− 36 n′t
1,	5,	− 2	+ 0,682	+ 0,021				− 1,244	+ 0,021
2,	4,	− 2	− 0,068	− 0,180				+ 145 n′t	+ 1124 n′t
− 1,	7,	− 2	− 15 n′t	+ 22 n′t	− 1,	7,	− 3	− 1,508	− 0,243
1,	5,	− 2	− 3868 n′t	+ 5283 n′t	− 2,	8,	− 3	+ 0,460	− 0,708
			+ 0,805	− 0,051	1,	5,	− 3	+ 4,341	− 3,037
			− 3883 n′t	+ 5305 n′t	− 1,	7,	− 3	+ 615 n′t	+ 802 n′t
− 1,	3,	− 3	+ 0,046	− 0,171	1,	5,	− 3	− 8 n′t	− 1 n′t
− 2,	4,	− 3	+ 0,116	+ 0,132	2,	4,	− 3	− 12 n′t	− 4 n′t
1,	1,	− 3	+ 0,367	− 0,161				+ 3,293	− 3,988
2,	0,	− 3	− 0,328	+ 0,152				+ 595 n′t	+ 797 n′t
− 1,	3,	− 3	− 482 n′t	+ 40 n′t	− 1,	8,	− 3	− 0,055	+ 1,760
− 2,	4,	− 3	+ 792 n′t	− 52 n′t	− 2,	9,	− 3	+ 0,004	− 0,060
1,	1,	− 3	+ 8 n′t	0 n′t	1,	6,	− 3	+ 0,176	− 0,090
			+ 0,201	− 0,048	2,	5,	− 3	+ 0,468	− 0,328
			+ 318 n′t	− 12 n′t	− 1,	8,	− 3	− 155 n′t	− 58 n′t
− 1,	4,	− 3	+ 1,227	+ 1,559	1,	6,	− 3	0 n′t	− 1 n′t
− 2,	5,	− 3	− 0,676	− 1,040				+ 0,593	+ 1,282
1,	2,	− 3	− 0,124	− 0,196				− 155 n′t	− 59 n′t
2,	1,	− 3	+ 0,048	+ 0,068	− 1,	9,	− 3	+ 0,068	+ 0,180
− 1,	4,	− 3	− 201 n′t	+ 130 n′t	1,	7,	− 3	+ 0,082	− 0,022
− 2,	5,	− 3	+ 328 n′t	− 152 n′t	− 1,	9,	− 3	− 10 n′t	+ 3 n′t
1,	2,	− 3	+ 5 n′t	− 3 n′t				+ 0,150	+ 0,158
2,	1,	− 3	− 4 n′t	+ 4 n′t				− 10 n′t	+ 3 n′t
			+ 0,475	+ 0,391	− 1,	4,	− 4	− 77 n′t	− 230 n′t
			+ 128 n′t	− 21 n′t	− 2,	5,	− 4	+ 96 n′t	+ 316 n′t
− 1,	5,	− 3	+ 1,182	+ 0,490	1,	2,	− 4	+ 13 n′t	+ 2 n′t
− 2,	6,	− 3	− 1,312	− 0,348				+ 32 n′t	+ 88 n′t
− 3,	7,	− 3	+ 0,162	0,000	− 1,	5,	− 4	− 0,282	+ 0,340
1,	3,	− 3	− 0,084	− 0,023	− 2,	6,	− 4	+ 0,096	− 0,116
2,	2,	− 3	+ 0,008	0,000	1,	3,	− 4	+ 0,089	− 0,093
− 1,	5,	− 3	− 637 n′t	+ 1466 n′t	2,	2,	− 4	− 0,044	+ 0,048
− 2,	6,	− 3	+ 88 n′t	− 88 n′t	− 1,	5,	− 4	− 87 n′t	− 63 n′t
1,	3,	− 3	+ 8 n′t	− 19 n′t	− 2,	6,	− 4	+ 104 n′t	+ 136 n′t
2,	2,	− 3	+ 32 n′t	− 76 n′t	1,	3,	− 4	+ 4 n′t	− 2 n′t
			− 0,044	+ 0,119				− 0,141	+ 0,179
			− 509 n′t	+ 1283 n′t				+ 21 n′t	+ 75 n′t
− 1,	6,	− 3	− 2,885	+ 0,194	− 1,	6,	− 4	− 0,118	+ 0,306
− 2,	7,	− 3	+ 1,544	− 0,168	− 2,	7,	− 4	+ 0,092	− 0,032
1,	4,	− 3	+ 0,089	− 0,005	1,	4,	− 4	+ 0,004	− 0,041
2,	3,	− 3	+ 0,008	0,000	2,	3,	− 4	+ 0,004	+ 0,016
− 1,	6,	− 3	+ 128 n′t	+ 1133 n′t	− 1,	6,	− 4	− 670 n′t	− 123 n′t

γ g′ g	sin	cos	γ g′ g	sin	cos
− 2, 7, − 4	− 28 n′t	+ 8 n′t	− 1, 9, − 4	+ 2,405″	+ 0,571″
1, 4, − 4	+ 26 n′t	+ 3 n′t	− 2, 10, − 4	+ 2,040	+ 0,536
2, 3, − 4	+ 44 n′t	+ 8 n′t	1, 7, − 4	− 0,044	+ 0,012
	− 0,018	+ 0,249	− 1, 9, − 4	− 22 n′t	+ 113 n′t
	− 628 n′t	− 104 n′t	− 2, 10, − 4	− 12 n′t	0 n′t
− 1, 7, − 4	+ 0,185	+ 0,850	1, 7, − 4	− 1 n′t	− 2 n′t
− 2, 8, − 4	− 0,364	− 1,304		+ 4,401	+ 1,119
1, 5, − 4	+ 0,185	− 0,167		− 35 n′t	+ 111 n′t
− 1, 7, − 4	− 468 n′t	+ 162 n′t	− 1, 10, − 4	− 5,998	+ 1,795
1, 5, − 4	+ 17 n′t	− 13 n′t	1, 8, − 4	− 0,013	+ 0,019
2, 4, − 4	+ 24 n′t	− 8 n′t	− 1, 10, − 4	− 107 n′t	− 318 n′t
	+ 0,006	− 0,621	1, 8, − 4	− 1 n′t	− 2 n′t
	− 427 n′t	+ 141 n′t		− 6,011	+ 1,814
− 1, 8, − 4	+ 2,158	+ 2,014		− 108 n′t	− 320 n′t
− 2, 9, − 4	− 0,512	− 0,576	− 1, 11, − 4	− 0,06344	+ 0,07038
− 3, 10, − 4	+ 0,180	+ 0,054	1, 9, − 4	+ 0,00023	+ 0,01061
1, 6, − 4	− 0,080	− 0,080	2, 8, − 4	− 0,00088	+ 0,00136
− 1, 8, − 4	− 150 n′t	+ 176 n′t	− 1, 11, − 4	− 2,74 n′t	− 2,43 n′t
1, 6, − 4	+ 6 n′t	− 8 n′t	1, 9, − 4	− 0,68 n′t	− 0,18 n′t
2, 5, − 4	+ 4 n′t	− 8 n′t	2, 8, − 4	− 0,12 n′t	+ 0,08 n′t
	+ 1,746	+ 1,412		− 0,06409	+ 0,08235
	− 140 n′t	+ 160 n′t		− 3,54 n′t	− 2,53 n′t

Digitized by Google

$$\int T_1' \left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right) dt$$

γ g′ g	cos	sin	γ g′ g	cos	sin
1, −1, 0	− 4″,021	+ 0″,04745	3, 0, 0	− 0″,30 n'^2t^2	− 0″,60 n'^2t^2
2, −2, 0	+ 0,828	− 0,01128		+ 0,017	+ 0,022
3, −3, 0	+ 0,010	− 0,01412		+ 4 $n't$	− 2 $n't$
0, 0, 0	+ 12,02 n'^2t^2	. . . .	0, 4, 0	+ 0,010	− 0,014
1, −1, 0	− 28,71 $n't$	− 140,09 $n't$	−1, 5, 0	− 0,008	− 0,001
2, −2, 0	+ 6,77 $n't$	+ 85,57 $n't$		+ 0,002	− 0,015
3, −3, 0	+ 0,24 $n't$	+ 0,31 $n't$	0, −2, −1	+ 0,009	+ 0,002
	− 3,183	. . . .	−1, −1, −1	− 0,014	− 0,003
	− 21,70 $n't$	. . . .		− 0,005	− 0,001
0, 1, 0	+ 0,281	− 0,106	0, −1, −1	+ 0,077	+ 0,070
−1, 2, 0	− 0,410	− 0,212	−1, 0, −1	− 0,010	− 0,006
−2, 3, 0	+ 0,178	+ 0,251	1, −2, −1	− 0,048	− 0,037
1, 0, 0	+ 0,01287 $n't$	− 0,02082 $n't$	2, −3, −1	+ 0,008	− 0,005
2, −1, 0	− 0,166	− 0,013	0, −1, −1	+ 9 $n't$	+ 3 $n't$
3, −2, 0	+ 0,047	− 0,001	−1, 0, −1	− 47 $n't$	+ 17 $n't$
0, 1, 0	−644 $n't$	+1043 $n't$	−2, 1, −1	+ 138 $n't$	− 63 $n't$
−1, 2, 0	− 8 $n't$	+ 7 $n't$		+ 0,027	+ 0,022
−2, 3, 0	+ 4 $n't$	− 6 $n't$		+ 100 $n't$	− 43 $n't$
1, 0, 0	+ 0,66 n'^2t^2	0	0, 0, −1	+ 0,163	− 0,015
2, −1, 0	−644 $n't$	+1035 $n't$	−1, 1, −1	− 0,059	− 0,079
3, −2, 0	+ 1 $n't$	+ 5 $n't$	−2, 2, −1	+ 0,027	+ 0,072
	− 0,070	− 0,081	1, −1, −1	− 0,071	+ 0,119
	− 4 $n't$	+ 2 $n't$	2, −2, −1	− 0,005	− 0,059
0, 2, 0	− 0,126	− 0,164	0, 0, −1	−1808 $n't$	+649 $n't$
−1, 3, 0	+ 0,074	+ 0,037	−1, 1, −1	+2418 $n't$	−867 $n't$
−2, 4, 0	− 0,007	+ 0,019	−2, 2, −1	− 614 $n't$	+203 $n't$
1, 1, 0	− 0,003	− 0,023		+ 0,055	+ 0,038
2, 0, 0	+ 0,00036 $n't$	− 0,00058 $n't$		− 4 $n't$	− 15 $n't$
0, 2, 0	− 80 $n't$	+ 32 $n't$	0, 1, −1	+ 0,762	− 3,466
1, 1, 0	+ 86 $n't$	− 11 $n't$	−1, 2, −1	− 0,329	+ 1,330
2, 0, 0	− 5,37 n'^2t^2	− 10,75 n'^2t^2	−2, 3, −1	− 0,005	+ 0,042
3, −1, 0	− 36 $n't$	+ 58 $n't$	1, 0, −1	− 0,668	+ 3,110
	− 0,062	− 0,131	2, −1, −1	+ 0,201	− 0,948
	+ 6 $n't$	+ 21 $n't$	0, 1, −1	− 98 $n't$	− 28 $n't$
0, 3, 0	+ 0,029	− 0,026	−1, 2, −1	+ 73 $n't$	−261 $n't$
−1, 4, 0	− 0,063	+ 0,027	−2, 3, −1	− 258 $n't$	−180 $n't$
−2, 5, 0	+ 0,052	− 0,018	1, 0, −1	− 52 $n't$	+ 18 $n't$
1, 2, 0	− 0,001	+ 0,039	2, −1, −1	− 1 $n't$	− 9 $n't$
3, 0, 0	+ 1 $n't$	− 2 $n't$		− 0,039	+ 0,068
0, 3, 0	− 7 $n't$	− 1 $n't$		− 336 $n't$	−480 $n't$
1, 2, 0	+ 6 $n't$	+ 3 $n't$	0, 2, −1	+ 0,077	− 0,482
2, 1, 0	+ 4 $n't$	− 2 $n't$	−1, 3, −1	− 0,181	− 0,017

Digitized by Google

γ g′ g	cos	sin	γ g′ g	cos	sin
−2, 4, −1	+ 0″,015	+ 0″,093	−1, 2, −2	− 0″,120	+ 0″,041
−3, 5, −1	+ 0,062	− 0,021	−2, 3, −2	+ 0,002	− 0,015
1, 1, −1	+ 0,047	+ 0,138	1, 0, −2	− 0,015	+ 0,145
2, 0, −1	− 0,018	+ 0,073	2,−1, −2	+ 0,013	− 0,039
3,−1, −1	+ 0,012	− 0,053	0, 1, −2	− 3 n′t	− 19 n′t
0, 2, −1	+ 449 n′t	+ 463 n′t	−1, 2, −2	+ 40 n′t	+ 236 n′t
−1, 3, −1	+ 21 n′t	+ 56 n′t	−2, 3, −2	− 69 n′t	− 434 n′t
−2, 4, −1	− 12 n′t	− 21 n′t		− 0,017	− 0,023
1, 1, −1	− 1853 n′t	− 1777 n′t		− 32 n′t	− 217 n′t
2, 0, −1	+ 1389 n′t	+ 1328 n′t	0, 2, −2	− 1,121	− 0,538
	+ 0,014	− 0,269	−1, 3, −2	− 0,132	− 0,023
	− 6 n′t	+ 49 n′t	−2, 4, −2	+ 0,249	+ 0,099
0, 3, −1	+ 0,459	− 0,104	−3, 5, −2	+ 0,007	+ 0,006
−1, 4, −1	− 1,532	+ 0,489	1, 1, −2	+ 1,701	+ 0,768
−2, 5, −1	+ 1,130	− 0,366	2, 0, −2	− 0,690	− 0,307
1, 2, −1	− 0,051	+ 0,005	0, 2, −2	+ 44 n′t	+ 23 n′t
0, 3, −1	− 45 n′t	+ 312 n′t	−1, 3, −2	− 50 n′t	+ 114 n′t
1, 2, −1	− 255 n′t	+ 62 n′t	−2, 4, −2	+ 94 n′t	− 246 n′t
2, 1, −1	− 23 n′t	− 30 n′t	−3, 5, −2	− 65 n′t	+ 52 n′t
3, 0, −1	+ 77 n′t	+ 76 n′t	1, 1, −2	− 81 n′t	− 75 n′t
	+ 0,066	+ 0,024	2, 0, −2	+ 65 n′t	+ 63 n′t
	− 246 n′t	+ 420 n′t		+ 0,014	+ 0,005
0, 4, −1	+ 0,172	+ 0,051		+ 7 n′t	− 69 n′t
−1, 5, −1	− 0,166	− 0,033	0, 3, −2	− 0,127	+ 0,140
−2, 6, −1	− 0,003	+ 0,004	−1, 4, −2	− 0,121	− 0,048
1, 3, −1	− 0,054	− 0,097	−2, 5, −2	+ 0,122	+ 0,132
0, 4, −1	− 12 n′t	+ 21 n′t	−3, 6, −2	− 0,004	− 0,040
1, 3, −1	+ 41 n′t	− 45 n′t	1, 2, −2	+ 0,170	− 0,153
2, 2, −1	+ 8 n′t	− 4 n′t	2, 1, −2	+ 0,019	+ 0,015
	− 0,051	− 0,075	3, 0, −2	− 0,039	− 0,017
	+ 37 n′t	− 28 n′t	0, 3, −2	− 356 n′t	+ 255 n′t
0,−1, −2	+ 0,002	0,000	−1, 4, −2	− 43 n′t	+ 29 n′t
−1, 0, −2	− 0,002	+ 0,005	−2, 5, −2	− 1137 n′t	+ 906 n′t
1,−2, −2	+ 0,002	− 0,002	1, 2, −2	+ 192 n′t	− 142 n′t
	+ 0,002	+ 0,003	2, 1, −2	− 16 n′t	+ 12 n′t
0, 0, −2	+ 0,033	− 0,023		+ 0,020	+ 0,029
1,−1, −2	− 0,025	+ 0,017		− 1360 n′t	+ 1060 n′t
2,−2, −2	+ 0,005	− 0,003	0, 4, −2	− 0,059	− 0,725
0, 0, −2	− 85 n′t	+ 30 n′t	−1, 5, −2	+ 0,183	+ 1,441
−1, 1, −2	+ 104 n′t	− 38 n′t	−2, 6, −2	− 0,066	− 0,695
−2, 2, −2	− 11 n′t	+ 23 n′t	1, 3, −2	− 0,017	+ 0,021
	+ 0,013	− 0,009	2, 2, −2	− 0,006	+ 0,001
	+ 8 n′t	+ 15 n′t	0, 4, −2	− 261 n′t	+ 25 n′t
0, 1, −2	+ 0,138	− 0,155	−1, 5, −2	+ 249 n′t	− 15 n′t

Digitized by Google

γ g′ g	cos	sin	γ g′ g	cos	sin
− 2, 6, − 2	− 8 $n't$	+ 1 $n't$	0, 3, − 3	− 13 $n't$	− 8 $n't$
1, 3, − 2	+ 104 $n't$	− 5 $n't$	− 1, 4, − 3	+ 47 $n't$	+ 30 $n't$
2, 2, − 2	− 1 $n't$	− 7 $n't$	− 2, 5, − 3	− 72 $n't$	− 46 $n't$
	+ 0,035	+ 0,043	1, 2, − 3	+ 5 $n't$	− 1 $n't$
	+ 83 $n't$	− 1 $n't$	2, 1, − 3	− 1 $n't$	− 1 $n't$
0, 5, − 2	+ 0,083	− 0,207		− 0,007	− 0,008
− 1, 6, − 2	− 0,07922	+ 0,14501		− 34 $n't$	− 26 $n't$
− 2, 7, − 2	+ 0,02501	− 0,03528	0, 4, − 3	+ 0,434	− 0,234
− 3, 8, − 2	+ 0,00014	− 0,00007	− 1, 5, − 3	− 0,493	+ 0,257
1, 4, − 2	− 0,04683	+ 0,08001	− 2, 6, − 3	+ 0,283	− 0,062
2, 3, − 2	− 0,00009	+ 0,00120	− 3, 7, − 3	− 0,018	0,000
3, 2, − 2	− 0,00012	− 0,00003	1, 3, − 3	− 0,119	+ 0,053
0, 5, − 2	+ 1320 $n't$	+ 615 $n't$	2, 2, − 3	+ 0,003	− 0,001
− 1, 6, − 2	+ 1,03 $n't$	+ 0,55 $n't$	0, 4, − 3	+ 60 $n't$	+ 146 $n't$
− 2, 7, − 2	− 0,48 $n't$	− 0,22 $n't$	− 1, 5, − 3	+ 9 $n't$	+ 16 $n't$
1, 4, − 2	+ 34,69 $n't$	+ 19,47 $n't$	− 2, 6, − 3	− 16 $n't$	− 30 $n't$
2, 3, − 2	+ 1,49 $n't$	− 2,15 $n't$	1, 3, − 3	− 40 $n't$	− 101 $n't$
3, 2, − 2	− 0,16 $n't$	− 0,32 $n't$	2, 2, − 3	+ 6 $n't$	+ 15 $n't$
	− 0,018	− 0,016		+ 0,090	+ 0,013
	+ 1356 $n't$	+ 632 $n't$		+ 19 $n't$	+ 46 $n't$
0, 6, − 2	+ 0,008	− 0,001	0, 5, − 3	− 1,082	− 0,114
− 1, 7, − 2	− 0,011	+ 0,004	− 1, 6, − 3	+ 1,471	+ 0,168
− 2, 8, − 2	+ 0,005	− 0,003	− 2, 7, − 3	− 0,305	− 0,027
1, 5, − 2	+ 0,003	− 0,002	1, 4, − 3	− 0,043	− 0,004
2, 4, − 2	+ 0,001	0,000	2, 3, − 3	+ 0,002	0,000
0, 6, − 2	+ 4 $n't$	+ 6 $n't$	0, 5, − 3	− 9 $n't$	+ 85 $n't$
1, 5, − 2	− 86 $n't$	− 158 $n't$	1, 4, − 3	+ 6 $n't$	− 55 $n't$
	+ 0,006	− 0,002	2, 3, − 3	− 2 $n't$	+ 6 $n't$
	− 82 $n't$	− 152 $n't$		+ 0,043	+ 0,023
0, 2, − 3	− 0,158	− 0,066		− 5 $n't$	+ 36 $n't$
− 1, 3, − 3	+ 0,065	+ 0,001	0, 6, − 3	− 0,214	− 0,132
− 2, 4, − 3	− 0,023	+ 0,027	− 1, 7, − 3	+ 0,165	− 0,096
1, 1, − 3	+ 0,167	+ 0,079	− 2, 8, − 3	− 0,091	− 0,153
2, 0, − 3	− 0,066	− 0,030	1, 5, − 3	+ 0,109	+ 0,097
0, 2, − 3	− 16 $n't$	− 1 $n't$	0, 6, − 3	− 20 $n't$	+ 27 $n't$
− 1, 3, − 3	+ 109 $n't$	+ 9 $n't$	1, 5, − 3	+ 11 $n't$	− 16 $n't$
− 2, 4, − 3	− 159 $n't$	− 12 $n't$	2, 4, − 3	− 2 $n't$	+ 1 $n't$
	− 0,015	+ 0,011		− 0,031	− 0,284
	− 66 $n't$	− 4 $n't$		− 11 $n't$	+ 12 $n't$
0, 3, − 3	+ 0,500	− 0,738	0, 7, − 3	− 0,033	+ 0,013
− 1, 4, − 3	− 0,499	+ 0,710	− 1, 8, − 3	+ 0,004	+ 0,058
− 2, 5, − 3	+ 0,141	− 0,208	− 2, 9, − 3	0,000	− 0,014
1, 2, − 3	− 0,160	+ 0,240	1, 6, − 3	+ 0,001	+ 0,003
2, 1, − 3	+ 0,011	− 0,012	2, 5, − 3	+ 0,004	+ 0,002

Digitized by Google

γ g′ g	cos	sin	γ g′ g	cos	sin
0, 7, − 3	− 18 $n't$	+ 7 $n't$	2, 4, − 4	+ 4 $n't$	+ 2 $n't$
1, 6, − 3	+ 6 $n't$	− 3 $n't$		+ 0,041	− 0,135
	− 0,024	+ 0,062		+ 14 $n't$	+ 5 $n't$
	− 12 $n't$	+ 4 $n't$	0, 7, − 4	+ 0,020	− 0,017
0, 3, − 4	− 3 $n't$	+ 8 $n't$	− 1, 8, − 4	− 0,079	+ 0,077
− 1, 4, − 4	+ 15 $n't$	− 49 $n't$	− 2, 9, − 4	+ 0,120	− 0,115
− 2, 5, − 4	− 19 $n't$	+ 63 $n't$	− 3, 10, − 4	− 0,024	+ 0,005
	− 7 $n't$	+ 22 $n't$	1, 6, − 4	− 0,001	+ 0,001
0, 4, − 4	− 0,203	− 0,246	0, 7, − 4	+ 10 $n't$	+ 11 $n't$
− 1, 5, − 4	+ 0,150	+ 0,190	1, 6, − 4	− 7 $n't$	− 8 $n't$
− 2, 6, − 4	− 0,019	− 0,025	2, 5, − 4	+ 1 $n't$	+ 1 $n't$
1, 3, − 4	+ 0,084	+ 0,099		+ 0,036	− 0,049
2, 2, − 4	− 0,009	− 0,010		+ 4 $n't$	+ 4 $n't$
0, 4, − 4	− 6 $n't$	+ 9 $n't$	0, 8, − 4	+ 0,010	− 0,003
− 1, 5, − 4	+ 21 $n't$	− 21 $n't$	− 1, 9, − 4	− 0,053	+ 0,013
− 2, 6, − 4	− 28 $n't$	+ 28 $n't$	− 2, 10, − 4	− 0,428	+ 0,104
1, 3, − 4	+ 1 $n't$	− 4 $n't$	1, 7, − 4	− 0,001	0,000
2, 2, − 4	0 $n't$	+ 1 $n't$	0, 8, − 4	+ 1 $n't$	+ 5 $n't$
	+ 0,003	+ 0,008	− 2, 10, − 4	+ 1 $n't$	+ 4 $n't$
	− 12 $n't$	+ 13 $n't$	1, 7, − 4	− 1 $n't$	− 3 $n't$
0, 5, − 4	− 0,093	− 0,172		− 0,472	+ 0,114
− 1, 6, − 4	+ 0,084	+ 0,134		+ 1 $n't$	+ 6 $n't$
− 2, 7, − 4	− 0,021	− 0,011	0, 9, − 4	0,000	0,000
1, 4, − 4	+ 0,014	+ 0,058	− 1, 10, − 4	+ 0,119	+ 0,037
2, 3, − 4	+ 0,001	− 0,003	0, 9, − 4	− 1 $n't$	+ 2 $n't$
0, 5, − 4	+ 67 $n't$	− 12 $n't$		+ 0,119	+ 0,037
1, 4, − 4	− 50 $n't$	+ 8 $n't$		− 1 $n't$	+ 2 $n't$
2, 3, − 4	+ 9 $n't$	− 1 $n't$	0, 10, − 4	− 0,007	− 0,007
	− 0,015	+ 0,006	− 1, 11, − 4	+ 0,00043	+ 0,00046
	+ 26 $n't$	− 5 $n't$	1, 9, − 4	0,00000	− 0,00008
0, 6, − 4	+ 0,008	− 0,063	0, 10, − 4	+ 3 $n't$	− 3 $n't$
− 1, 7, − 4	− 0,055	+ 0,182	1, 9, − 4	+ 0,20 $n't$	− 0,19 $n't$
− 2, 8, − 4	+ 0,085	− 0,273	2, 8, − 4	− 0,02 $n't$	+ 0,01 $n't$
1, 5, − 4	+ 0,003	+ 0,019		− 0,007	− 0,007
0, 6, − 4	+ 38 $n't$	+ 12 $n't$		+ 3 $n't$	− 3 $n't$
1, 5, − 4	− 28 $n't$	− 9 $n't$			

Digitized by Google

g′	g	$l(r')$ cos	$l(r')$ sin	S' cos	S' sin
0,	0	+ 1″,622	. . . .	+ 2″,709	. . . .
		+ 0,01486 $n't$	. . . .	+ 2988 $n't$	. . . .
		+ 5,54 $n't$	. . . .	− 0,94 n'^2t^2	. . . .
1,	0	− 0,510	− 0,051	− 0,097	+ 0,294
		+ 49132 $n't$	− 55002 $n't$	− 30 $n't$	− 7 $n't$
		+ 88,67 n'^2t^2	+ 55,09 n'^2t^2		
2,	0	+ 0,535	+ 0,973	− 0,315	− 0,344
		+ 1285 $n't$	− 1304 $n't$	− 29 $n't$	− 25 $n't$
		+ 6,50 n'^2t^2	+ 9,61 n'^2t^2		
3,	0	+ 0,003	+ 0,328	+ 0,004	− 0,391
		+ 50 $n't$	− 47 $n't$	− 2 $n't$	− 1 $n't$
		+ 0,41 n'^2t^2	+ 0,63 n'^2t^2		
4,	0	+ 0,012	+ 0,004	+ 0,097	− 0,003
− 2,	− 1	− 0,127	− 0,031	+ 0,296	+ 0,065
− 1,	− 1	− 0,186	− 0,165	+ 0,233	+ 0,211
		− 48 $n't$	+ 25 $n't$	+ 3 $n't$	− 1 $n't$
0,	− 1	− 0,236	− 0,245	+ 0,094	+ 0,126
		− 131 $n't$	+ 56 $n't$	+ 899 $n't$	− 323 $n't$
1,	− 1	− 0,436	+ 0,768	+ 0,044	− 0,050
		+ 328 $n't$	+ 526 $n't$	+ 108 $n't$	+ 23 $n't$
2,	− 1	+ 0,534	− 1,054	+ 0,050	− 0,218
		− 1338 $n't$	− 1237 $n't$	+ 224 $n't$	+ 234 $n't$
3,	− 1	− 1,568	+ 1,606	+ 0,263	+ 0,238
		− 575 $n't$	+ 848 $n't$	− 91 $n't$	+ 218 $n't$
4,	− 1	+ 0,904	+ 0,232	+ 2,194	+ 0,435
		− 43 $n't$	+ 58 $n't$	− 12 $n't$	+ 17 $n't$
− 1,	− 2	− 0,024	+ 0,044	+ 0,086	− 0,154
0,	− 2	− 0,065	+ 0,048	+ 0,152	− 0,098
		+ 8 $n't$	− 5 $n't$	+ 26 $n't$	− 12 $n't$
1,	− 2	− 0,048	+ 0,080	+ 0,090	− 0,056
		+ 11 $n't$	+ 68 $n't$	+ 1 $n't$	+ 26 $n't$
2,	− 2	+ 0,133	+ 0,020	− 0,112	− 0,042
		+ 50 $n't$	− 12 $n't$	− 1 $n't$	+ 49 $n't$
3,	− 2	+ 0,119	+ 0,395	− 0,153	+ 0,306
		+ 1265 $n't$	− 1336 $n't$	− 388 $n't$	+ 249 $n't$
4,	− 2	+ 3,767	+ 9,565	− 0,037	− 0,016
		− 23051 $n't$	+ 1881 $n't$	− 293 $n't$	− 44 $n't$
5,	− 2	+ 0,080	− 1,791	+ 0,215	− 0,419
		+ 6180 $n't$	+ 3349 $n't$	+ 1234 $n't$	+ 1429 $n't$
6,	− 2	− 0,363	− 0,043	− 0,013	− 0,048
		+ 1838 $n't$	+ 2491 $n't$	0 $n't$	+ 7 $n't$
2,	− 3	+ 0,017	+ 0,008	− 0,018	− 0,025

Digitized by Google

g'	g	$l(r')$ cos	$l(r')$ sin	S' cos	S' sin
		+ 25″ $n't$	+ 1″ $n't$	+ 53″ $n't$	+ 6″ $n't$
3,	− 3	+ 0,045	− 0,036	− 0,102	+ 0,131
		+ 3 $n't$	− 5 $n't$	+ 11 $n't$	+ 13 $n't$
4,	− 3	+ 0,013	− 0,006	− 0,127	+ 0,017
		− 73 $n't$	− 182 $n't$	+ 103 $n't$	+ 243 $n't$
5,	− 3	− 0,069	+ 0,020	+ 0,641	− 0,002
		+ 29 $n't$	− 221 $n't$	− 36 $n't$	+ 135 $n't$
6,	− 3	+ 1,094	+ 1,204	+ 1,800	+ 1,236
		+ 203 $n't$	− 271 $n't$	− 42 $n't$	+ 24 $n't$
7,	− 3	+ 0,648	− 1,403	+ 0,353	− 0,303
		− 179 $n't$	+ 69 $n't$	− 8 $n't$	+ 9 $n't$
8,	− 3	− 0,137	+ 0,144	− 0,005	+ 0,118
		+ 9 $n't$	+ 4 $n't$	+ 4 $n't$	+ 4 $n't$
4,	− 4	− 0,008	− 0,010	+ 0,033	+ 0,029
		− 2 $n't$	− 3 $n't$	+ 7 $n't$	− 6 $n't$
5,	− 4	+ 0,001	− 0,019	+ 0,065	+ 0,051
		− 61 $n't$	+ 10 $n't$	+ 130 $n't$	− 24 $n't$
6,	− 4	+ 0,015	+ 0,030	+ 0,029	+ 0,107
		− 52 $n't$	− 18 $n't$	+ 68 $n't$	+ 34 $n't$
7,	− 4	+ 0,314	− 0,265	− 0,357	+ 0,295
		− 23 $n't$	− 27 $n't$	+ 16 $n't$	+ 28 $n't$
8,	− 4	+ 0,904	− 0,232	− 0,201	0,000
		− 9 $n't$	− 26 $n't$	− 2 $n't$	+ 6 $n't$
9,	− 4	− 3,158	− 0,953	− 0,072	− 0,061
		− 58 $n't$	+ 172 $n't$	0 $n't$	+ 3 $n't$
10,	− 4	+ 0,476	+ 0,614	+ 0,047	+ 0,260
		+ 28 $n't$	− 35 $n't$	+ 11 $n't$	− 30 $n't$

Digitized by Google

$n'\zeta'$

γ g' g	sin	cos	γ g' g	sin	cos
0, 0, 0	. . . .	+ 0″,340 x	1, −3, −1	+ 0″,051	− 0″,012
1, −1, 0	− 0,339	− 0,00495	0, −2, −1	− 0,079 x	− 0,341 x
2, −2, 0	− 0,001	+ 0,00292	0, −1, −1	+ 0,245	− 0,218
0, 0, 0	. . . .	− 2,89 n'^2t^2	−1, 0, −1	− 0,313	+ 0,252
1, −1, 0	+ 4,27 $n't$	− 10,81 $n't$	1, −2, −1	+ 0,030	− 0,003
2, −2, 0	− 4,99 $n't$	+ 2,91 $n't$	0, −1, −1	− 0,143 x	− 0,208 x
3, −3, 0	− 0,02 $n't$	0,00 $n't$	0, −1, −1	− 3 $n't$	+ 17 $n't$
0, 1, 0	+ 0,745	− 0,680	−1, 0, −1	+ 6 $n't$	− 11 $n't$
−1, 2, 0	+ 0,051	+ 0,209	1, −2, −1	− 1 $n't$	− 7 $n't$
1, 0, 0	− 0,28680 $n't$	− 0,40845 $n't$	0, −1, −1	− 1 $xn't$	+ 5 $xn't$
0, 1, 0	− 0,025 x	+ 0,438 x	0, 0, −1	+ 0,157	− 0,245
0, 1, 0	− 333 $n't$	− 196 $n't$	−1, 1, −1	− 0,266	+ 0,419
−1, 2, 0	+ 357 $n't$	+ 208 $n't$	−2, 2, −1	− 0,017	− 0,029
1, 0, 0	− 27,59 n'^2t^2	+ 46,62 n'^2t^2	1, −1, −1	+ 0,048	− 0,074
0, 1, 0	− 275 $xn't$	+ 473 $xn't$	0, 0, −1	− 0,259 x	− 0,158 x
0, 2, 0	+ 0,321	− 0,602	0, 0, −1	+ 84 $n't$	+ 95 $n't$
−1, 3, 0	+ 0,017	− 0,002	−1, 1, −1	− 72 $n't$	− 80 $n't$
1, 1, 0	− 0,484	+ 0,855	1, −1, −1	− 29 $n't$	− 33 $n't$
2, 0, 0	− 402 $n't$	− 572 $n't$	0, 0, −1	0 $xn't$	0 $xn't$
0, 2, 0	+ 0,350 x	+ 0,202 x	0, 1, −1	+ 0,130	+ 0,273
0, 2, 0	− 67 $n't$	− 3 $n't$	−1, 2, −1	− 0,204	− 0,310
−1, 3, 0	+ 64 $n't$	− 8 $n't$	1, 0, −1	− 0,027	− 0,144
1, 1, 0	+ 15 $n't$	+ 18 $n't$	0, 1, −1	− 0,093 x	− 0,028 x
2, 0, 0	− 0,39 n'^2t^2	+ 0,65 n'^2t^2	0, 1, −1	+ 83 $n't$	+ 24 $n't$
0, 2, 0	+ 10 $xn't$	+ 75 $xn't$	−1, 2, −1	− 64 $n't$	+ 21 $n't$
0, 3, 0	− 0,005	− 0,742	−2, 3, −1	− 9 $n't$	+ 23 $n't$
−1, 4, 0	− 0,001	− 0,042	1, 0, −1	− 67 $n't$	− 24 $n't$
1, 2, 0	+ 0,008	+ 0,935	0, 1, −1	− 20 $xn't$	+ 69 $xn't$
2, 1, 0	− 0,006	+ 0,012	0, 2, −1	+ 0,844	+ 0,764
3, 0, 0	− 11 $n't$	− 16 $n't$	−1, 3, −1	+ 0,100	+ 0,102
0, 3, 0	+ 0,510 x	− 0,011 x	1, 1, −1	+ 0,158	+ 0,192
0, 3, 0	− 6 $n't$	+ 6 $n't$	2, 0, −1	− 0,001	− 0,003
−1, 4, 0	+ 6 $n't$	− 6 $n't$	0, 2, −1	+ 0,570 x	− 0,523 x
3, 0, 0	− 0,01 n'^2t^2	+ 0,02 n'^2t^2	0, 2, −1	− 1827 $n't$	+ 5440 $n't$
0, 3, 0	+ 6 $xn't$	+ 7 $xn't$	−1, 3, −1	− 654 $n't$	+ 1959 $n't$
0, 4, 0	+ 0,107	− 0,012	1, 1, −1	− 18 $n't$	+ 45 $n't$
−1, 5, 0	− 0,191	+ 0,036	0, 2, −1	+ 1685 $xn't$	+ 571 $xn't$
1, 3, 0	+ 0,098	− 0,036	0, 3, −1	+ 2,311	+ 1,348
2, 2, 0	0,000	+ 0,013	−1, 4, −1	− 0,001	+ 0,017
0, 4, 0	− 0,049 x	− 0,231 x	−2, 5, −1	− 0,029	+ 0,005
0, −2, −1	+ 0,401	− 0,091	1, 2, −1	+ 1,145	+ 0,548
−1, −1, −1	− 0,499	+ 0,113	0, 3, −1	− 0,471 x	+ 0,573 x

Digitized by Google

γ g' g	sin	cos	γ g' g	sin	cos
0, 3, −1	+ 143 $n't$	+ 456 $n't$	0, 3, −2	− 45 $xn't$	+ 435 $xn't$
−1, 4, −1	+ 55 $n't$	+ 201 $n't$	0, 4, −2	+ 0,075	− 0,117
1, 2, −1	+ 46 $n't$	+ 25 $n't$	−1, 5, −2	− 0,551	− 4,126
0, 3, −1	− 528 $xn't$	+ 136 $xn't$	1, 3, −2	− 0,036	+ 0,153
0, 4, −1	+ 1,342	− 0,257	0, 4, −2	+ 0,214 x	+ 0,028 x
−1, 5, −1	− 2,044	+ 0,383	0, 4, −2	− 664 $n't$	+ 290 $n't$
1, 3, −1	+ 0,751	− 0,120	−1, 5, −2	− 10542 $n't$	+ 4564 $n't$
2, 2, −1	+ 0,016	+ 0,007	1, 3, −2	− 20 $n't$	+ 17 $n't$
0, 4, −1	− 0,511 x	− 2,728 x	0, 4, −2	+ 158 $xn't$	+ 328 $xn't$
0, 4, −1	− 14 $n't$	− 12 $n't$	0, 5, −2	− 30,758	− 26,443
−1, 5, −1	+ 20 $n't$	+ 17 $n't$	−1, 6, −2	+ 0,00496	− 0,00121
1, 3, −1	− 4 $n't$	+ 4 $n't$	1, 4, −2	+ 0,00488	− 0,00714
0, 4, −1	− 27 $xn't$	+ 27 $xn't$	2, 3, −2	− 0,00050	+ 0,00214
0, 0, −2	+ 5 $n't$	− 10 $n't$	0, 5, −2	+ 0,456 x	− 0,418 x
−1, 1, −2	− 13 $n't$	+ 19 $n't$	0, 5, −2	− 42434 $n't$	+ 60468 $n't$
1, −1, −2	+ 5 $n't$	− 5 $n't$	−1, 6, −2	− 52,24 $n't$	+ 70,93 $n't$
0, 0, −2	0 $xn't$	0 $xn't$	1, 4, −2	− 2,60 $n't$	+ 11,30 $n't$
0, 1, −2	+ 0,082	+ 0,048	2, 3, −2	− 0,28 $n't$	+ 0,23 $n't$
−1, 2, −2	− 0,114	− 0,087	0, 5, −2	− 2078 $xn't$	− 1466 $xn't$
1, 0, −2	+ 0,018	+ 0,030	1, 5, −2	+ 0,025	− 0,003
0, 1, −2	+ 0,081 x	− 0,079 x	1, 5, −2	− 28 $n't$	− 55 $n't$
0, 1, −2	+ 237 $n't$	− 327 $n't$	0, 1, −3	+ 17 $n't$	− 25 $n't$
−1, 2, −2	+ 210 $n't$	− 291 $n't$	−1, 2, −3	+ 22 $n't$	− 34 $n't$
1, 0, −2	− 417 $n't$	+ 572 $n't$	1, 0, −3	− 37 $n't$	+ 55 $n't$
0, 1, −2	+ 702 $xn't$	+ 514 $xn't$	0, 1, −3	+ 55 $xn't$	+ 47 $xn't$
0, 2, −2	− 0,192	+ 0,106	0, 2, −3	+ 39 $n't$	+ 21 $n't$
−1, 3, −2	+ 0,032	− 0,048	−1, 3, −3	− 50 $n't$	− 26 $n't$
1, 1, −2	+ 0,167	− 0,065	1, 1, −3	+ 6 $n't$	+ 3 $n't$
0, 2, −2	− 0,041 x	− 0,154 x	0, 2, −3	+ 21 $xn't$	− 34 $xn't$
0, 2, −2	− 9 $n't$	+ 42 $n't$	0, 3, −3	+ 0,124	+ 0,202
−1, 3, −2	+ 3 $n't$	− 67 $n't$	−1, 4, −3	+ 0,096	+ 0,122
−2, 4, −2	+ 15 $n't$	+ 2 $n't$	1, 2, −3	− 0,208	− 0,307
1, 1, −2	− 2 $n't$	+ 6 $n't$	0, 3, −3	− 0,353 x	+ 0,248 x
2, 0, −2	− 3 $n't$	+ 11 $n't$	0, 3, −3	− 4 $n't$	+ 24 $n't$
0, 2, −2	+ 66 $xn't$	+ 32 $xn't$	−1, 4, −3	+ 5 $n't$	− 29 $n't$
0, 3, −2	− 0,014	+ 0,225	−2, 5, −3	0 $n't$	+ 4 $n't$
−1, 4, −2	+ 0,118	− 0,065	1, 2, −3	− 1 $n't$	− 1 $n't$
−2, 5, −2	− 0,009	− 0,060	0, 3, −3	+ 14 $xn't$	+ 4 $xn't$
1, 2, −2	− 0,073	− 0,218	0, 4, −3	− 0,199	− 0,049
0, 3, −2	− 0,245 x	+ 0,129 x	−1, 5, −3	+ 0,058	− 0,027
0, 3, −2	− 652 $n't$	− 69 $n't$	1, 3, −3	+ 0,139	+ 0,067
−1, 4, −2	+ 1002 $n't$	+ 111 $n't$	0, 4, −3	+ 0,062 x	− 0,061 x
−2, 5, −2	− 147 $n't$	+ 65 $n't$	0, 4, −3	− 12 $n't$	− 243 $n't$
1, 2, −2	− 49 $n't$	− 5 $n't$	−1, 5, −3	+ 20 $n't$	+ 328 $n't$

Digitized by Google

γ	g'	g	sin	cos	γ	g'	g	sin	cos
1,	3,	− 3	− 5 n't	− 35 n't	0,	5,	− 4	− 0″,081 x	+ 0″,001 x
0,	4,	− 3	− 199 xn't	+ 17 xn't	0,	5,	− 4	+ 124 n't	− 24 n't
0,	5,	− 3	− 0,025	+ 0,040	−1,	6,	− 4	− 153 n't	+ 36 n't
−1,	6,	− 3	+ 0,039	− 0,083	1,	4,	− 4	+ 18 n't	− 8 n't
−2,	7,	− 3	− 0,007	+ 0,005	0,	5,	− 4	− 31 xn't	− 115 xn't
1,	4,	− 3	+ 0,012	+ 0,013	0,	6,	− 4	− 0,168	− 0,072
0,	5,	− 3	+ 0,031 x	− 0,036 x	−1,	7,	− 4	− 0,091	− 0,119
0,	5,	− 3	− 107 n't	− 154 n't	−2,	8,	− 4	+ 0,009	+ 0,009
−1,	6,	− 3	+ 151 n't	+ 208 n't	1,	5,	− 4	+ 0,239	+ 0,169
1,	4,	− 3	− 15 n't	− 12 n't	0,	6,	− 4	+ 0,223 x	− 0,270 x
0,	5,	− 3	− 114 xn't	+ 85 xn't	0,	6,	− 4	+ 59 n't	− 63 n't
0,	6,	− 3	− 1,139	+ 0,812	−1,	7,	− 4	− 75 n't	+ 83 n't
−1,	7,	− 3	− 0,518	+ 0,340	1,	5,	− 4	+ 8 n't	− 11 n't
1,	5,	− 3	+ 1,693	− 1,188	0,	6,	− 4	− 58 xn't	− 52 xn't
0,	6,	− 3	− 1,579 x	− 2,264 x	0,	7,	− 4	− 0,540	− 0,498
0,	6,	− 3	− 101 n't	− 46 n't	−1,	8,	− 4	+ 0,690	+ 0,639
−1,	7,	− 3	+ 218 n't	+ 91 n't	1,	6,	− 4	− 0,029	− 0,030
1,	5,	− 3	− 7 n't	− 1 n't	0,	7,	− 4	− 0,341 x	+ 0,364 x
0,	6,	− 3	− 27 xn't	+ 64 xn't	0,	7,	− 4	+ 9 n't	− 41 n't
0,	7,	− 3	+ 0,413	+ 0,731	−1,	8,	− 4	− 11 n't	+ 53 n't
−1,	8,	− 3	− 0,002	+ 0,320	1,	6,	− 4	0 n't	− 6 n't
1,	6,	− 3	+ 0,036	− 0,017	0,	7,	− 4	− 34 xn't	− 8 xn't
2,	5,	− 3	+ 0,024	− 0,016	0,	8,	− 4	− 0,394	− 0,117
0,	7,	− 3	+ 0,091 x	− 0,298 x	−1,	9,	− 4	+ 0,573	+ 0,143
0,	7,	− 3	− 151 n't	+ 29 n't	−2,	10,	− 4	− 0,020	+ 0,006
−1,	8,	− 3	− 42 n't	+ 7 n't	1,	7,	− 4	− 0,014	+ 0,010
1,	6,	− 3	− 1 n't	0 n't	0,	8,	− 4	− 0,064 x	+ 0,259 x
0,	7,	− 3	+ 9 xn't	+ 47 xn't	0,	8,	− 4	− 4 n't	− 17 n't
0,	3,	− 4	− 7 n't	+ 35 n't	−1,	9,	− 4	+ 6 n't	+ 24 n't
−1,	4,	− 4	+ 9 n't	− 44 n't	1,	7,	− 4	− 1 n't	− 1 n't
1,	2,	− 4	− 1 n't	+ 7 n't	0,	8,	− 4	− 13 xn't	+ 4 xn't
0,	3,	− 4	+ 34 xn't	+ 7 xn't	0,	9,	− 4	− 0,216	+ 0,063
0,	4,	− 4	+ 0,008	− 0,019	−1,	10,	− 4	− 1,521	+ 0,449
−1,	5,	− 4	− 0,048	+ 0,041	0,	9,	− 4	+ 0,028 x	+ 0,100 x
1,	3,	− 4	+ 0,037	− 0,018	0,	9,	− 4	− 10 n't	− 6 n't
0,	4,	− 4	− 0,042 x	− 0,061 x	−1,	10,	− 4	− 75 n't	− 49 n't
0,	4,	− 4	− 8 n't	+ 6 n't	0,	9,	− 4	− 3 xn't	+ 4 xn't
−1,	5,	− 4	+ 12 n't	− 6 n't	0,	10,	− 4	− 2,219	+ 2,350
−2,	6,	− 4	− 2 n't	+ 1 n't	−1,	11,	− 4	− 0,01046	+ 0,01173
1,	3,	− 4	− 1 n't	0 n't	1,	9,	− 4	+ 0,00004	+ 0,00183
0,	4,	− 4	+ 5 xn't	+ 6 xn't	0,	10,	− 4	− 0,170 x	− 0,159 x
0,	5,	− 4	− 0,016	− 0,092	0,	10,	− 4	− 190 n't	− 51 n't
−1,	6,	− 4	+ 0,014	+ 0,118	−1,	11,	− 4	− 0,82 n't	− 0,15 n't
1,	4,	− 4	+ 0,004	− 0,015	1,	9,	− 4	− 0,20 n't	+ 0,06 n't

Digitized by Google

γ	g′	g	sin	cos	γ	g′	g	sin	cos
0,	10,	− 4	+ 4″ $xn't$	− 13″ $xn't$	1,	8,	− 5	− 0″,004	− 0″,021
0,	8,	− 5	+ 0,222	− 0,365	0,	9,	− 5	− 0,182 x	− 0,009 x
− 1,	9,	− 5	− 0,274	+ 0,453	0,	10,	− 5	− 0,034	− 0,075
1,	7,	− 5	+ 0,027	− 0,046	− 1,	11,	− 5	+ 0,050	+ 0,100
0,	8,	− 5	− 0,309 x	− 0,184 x	1,	9,	− 5	− 0,004	− 0,004
0,	9,	− 5	+ 0,015	− 0,225	0,	10,	− 5	− 0,055 x	+ 0,027 x
− 1,	10,	− 5	− 0,012	+ 0,282					

Tafel XLII.

$$\left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)$$

γ	g′	g	cos	sin	γ	g′	g	cos	sin
0,	0,	0	+ 0″,340	. . . .	1,	1,	0	+ 15″ $n't$	− 18″ $n't$
1,	− 1,	0	− 0,339	+ 0″,00495	2,	0,	0	− 0,78 n'^2t^2	− 1,30 n'^2t^2
2,	− 2,	0	− 0,002	− 0,00584				− 0,299	− 0,507
1,	− 1,	0	+ 4,27 $n't$	+ 10,18 $n't$				− 778 $n't$	+ 1128 $n't$
2,	− 2,	0	− 9,98 $n't$	− 5,82 $n't$				(− 0,147	+ 0,254)
3,	− 3,	0	− 0,06 $n't$	0,00 $n't$				(− 390 $n't$	− 564 $n't$)
			0	. . . .	0,	3,	0	− 0,011	+ 0,510
			(− 5,77 $n't$	. . . .)	− 1,	4,	0	+ 0,001	− 0,042
0,	1,	0	+ 0,438	− 0,025	1,	2,	0	+ 0,008	− 0,935
− 1,	2,	0	− 0,051	+ 0,209	2,	1,	0	− 0,012	− 0,024
1,	0,	0	− 0,28680 $n't$	+ 0,40845 $n't$	3,	0,	0	− 33 $n't$	+ 48 $n't$
0,	1,	0	+ 473 $n't$	− 275 $n't$	0,	3,	0	+ 7 $n't$	+ 6 $n't$
− 1,	2,	0	− 357 $n't$	+ 208 $n't$	− 1,	4,	0	− 6 $n't$	− 6 $n't$
1,	0,	0	− 27,59 n'^2t^2	− 46,62 n'^2t^2	3,	0,	0	− 0,03 n'^2t^2	− 0,06 n'^2t^2
			+ 0,387	+ 0,184				− 0,014	− 0,491
			− 28564 $n't$	+ 40778 $n't$				− 32 $n't$	+ 48 $n't$
			(+ 0,795	− 0,471)				(− 0,005	+ 0,164)
			(− 28657 $n't$	− 40833 $n't$)				(− 11 $n't$	− 16 $n't$)
0,	2,	0	+ 0,202	+ 0,350	0,	4,	0	− 0,231	− 0,049
− 1,	3,	0	− 0,017	− 0,002	− 1,	5,	0	+ 0,191	+ 0,036
1,	1,	0	− 0,484	− 0,855	1,	3,	0	+ 0,098	+ 0,036
2,	0,	0	− 804 $n't$	+ 1144 $n't$	2,	2,	0	0,000	− 0,026
0,	2,	0	+ 75 $n't$	+ 10 $n't$				+ 0,058	− 0,003
− 1,	3,	0	− 64 $n't$	− 8 $n't$				(+ 0,015	+ 0,001)

Digitized by Google

γ g′ g	cos	sin	γ g′ g	cos	sin
0, −2, −1	− 0″,341	− 0″,079		+ 1207 n′t	+ 3599 n′t
−1, −1, −1	+ 0,499	+ 0,113		(+ 1,103	+ 1,057)
1, −3, −1	+ 0,051	+ 0,012		(− 2498 n′t	+ 7445 n′t)
	+ 0,209	+ 0,046	0, 3, −1	+ 0,573	− 0,471
	(− 0,047	+ 0,010)	−1, 4, −1	+ 0,001	+ 0,017
0, −1, −1	− 0,208	− 0,143	−2, 5, −1	+ 0,058	+ 0,010
−1, 0, −1	+ 0,313	+ 0,252	1, 2, −1	+ 1,145	− 0,548
1, −2, −1	+ 0,030	+ 0,003	0, 3, −1	+ 136 n′t	− 528 n′t
0, −1, −1	+ 5 n′t	− 1 n′t	−1, 4, −1	− 55 n′t	+ 201 n′t
−1, 0, −1	− 6 n′t	− 11 n′t	1, 2, −1	+ 46 n′t	− 25 n′t
1, −2, −1	− 1 n′t	+ 7 n′t		+ 1,777	− 0,992
	+ 0,135	+ 0,112		+ 127 n′t	− 352 n′t
	− 2 n′t	− 5 n′t		(+ 3,426	+ 1,924)
	(− 0,038	+ 0,032)		(+ 246 n′t	+ 681 n′t)
	(+ 1 n′t	− 1 n′t)	0, 4, −1	− 2,728	− 0,511
0, 0, −1	− 0,158	− 0,259	−1, 5, −1	+ 2,044	+ 0,383
−1, 1, −1	+ 0,266	+ 0,419	1, 3, −1	+ 0,751	+ 0,120
−2, 2, −1	+ 0,034	− 0,058	2, 2, −1	+ 0,032	− 0,014
1, −1, −1	+ 0,048	+ 0,074	0, 4, −1	+ 27 n′t	− 27 n′t
−1, 1, −1	+ 72 n′t	− 80 n′t	−1, 5, −1	− 20 n′t	+ 17 n′t
1, −1, −1	− 29 n′t	+ 33 n′t	1, 3, −1	− 4 n′t	− 4 n′t
	+ 0,190	+ 0,176		+ 0,099	− 0,022
	+ 43 n′t	− 47 n′t		+ 3 n′t	− 14 n′t
	(− 0,077	+ 0,071)		(+ 0,065	+ 0,014)
	(− 18 n′t	− 19 n′t)		(+ 2 n′t	+ 9 n′t)
0, 1, −1	− 0,028	− 0,093	−1, 1, −2	+ 13 n′t	+ 19 n′t
−1, 2, −1	+ 0,204	− 0,310	1, −1, −2	+ 5 n′t	+ 5 n′t
1, 0, −1	− 0,027	+ 0,144		+ 18 n′t	+ 24 n′t
0, 1, −1	+ 69 n′t	− 20 n′t		(− 4 n′t	+ 5 n′t)
−1, 2, −1	+ 64 n′t	+ 21 n′t	0, 1, −2	− 0,079	+ 0,081
−2, 3, −1	+ 18 n′t	+ 46 n′t	−1, 2, −2	+ 0,114	− 0,087
1, 0, −1	− 67 n′t	+ 24 n′t	1, 0, −2	+ 0,018	− 0,030
	+ 0,149	− 0,259	0, 1, −2	+ 514 n′t	+ 702 n′t
	+ 84 n′t	+ 71 n′t	−1, 2, −2	− 210 n′t	− 291 n′t
	(− 0,100	− 0,176)	1, 0, −2	− 417 n′t	− 572 n′t
	(− 57 n′t	+ 47 n′t)		+ 0,053	− 0,036
0, 2, −1	− 0,523	+ 0,570		− 113 n′t	− 161 n′t
−1, 3, −1	− 0,100	+ 0,102		(− 0,013	+ 0,009)
1, 1, −1	+ 0,158	− 0,192		(+ 28 n′t	− 41 n′t)
2, 0, −1	− 0,002	+ 0,006	0, 2, −2	− 0,154	− 0,041
0, 2, −1	+ 571 n′t	+ 1685 n′t	−1, 3, −2	− 0,032	− 0,048
−1, 3, −1	+ 654 n′t	+ 1959 n′t	1, 1, −2	+ 0,167	+ 0,065
1, 1, −1	− 18 n′t	− 45 n′t	0, 2, −2	+ 32 n′t	+ 66 n′t
	− 0,467	+ 0,486	−1, 3, −2	− 3 n′t	− 67 n′t

Digitized by Google

γ	g'	g	cos	sin
−2,	4,	−2	− 30 $n't$	+ 4 $n't$
1,	1,	−2	− 2 $n't$	− 6 $n't$
2,	0,	−2	− 6 $n't$	− 22 $n't$
			− 0,019	− 0,024
			− 9 $n't$	− 25 $n't$
			(+ 0,007	− 0,008
			+ 3 $n't$	− 8 $n't$)
0,	3,	−2	+ 0,129	− 0,245
−1,	4,	−2	− 0,118	− 0,065
−2,	5,	−2	+ 0,018	− 0,120
1,	2,	−2	− 0,073	+ 0,218
0,	3,	−2	+ 435 $n't$	− 45 $n't$
−1,	4,	−2	− 1002 $n't$	+ 111 $n't$
−2,	5,	−2	+ 294 $n't$	+ 130 $n't$
1,	2,	−2	− 49 $n't$	+ 5 $n't$
			− 0,044	− 0,212
			− 322 $n't$	+ 201 $n't$
			(+ 0,022	− 0,108
			+ 163 $n't$	+ 101 $n't$)
0,	4,	−2	+ 0,028	+ 0,214
−1,	5,	−2	+ 0,551	− 4,126
1,	3,	−2	− 0,036	− 0,153
0,	4,	−2	+ 328 $n't$	+ 158 $n't$
−1,	5,	−2	+10542 $n't$	+ 4564 $n't$
1,	3,	−2	− 20 $n't$	− 17 $n't$
			+ 0,543	− 4,065
			+10850 $n't$	+ 4705 $n't$
			(− 0,511	− 4,092
			−11222 $n't$	+ 4868 $n't$)
0,	5,	−2	− 0,418	+ 0,456
−1,	6,	−2	− 0,00496	− 0,00121
1,	4,	−2	+ 0,00488	+ 0,00714
2,	3,	−2	− 0,00100	− 0,00428
0,	5,	−2	− 1466 $n't$	− 2078 $n't$
−1,	6,	−2	+ 52,24 $n't$	+ 70,93 $n't$
1,	4,	−2	− 2,60 $n't$	− 11,30 $n't$
2,	3,	−2	− 0,56 $n't$	− 0,46 $n't$
			− 0,41908	+ 0,45765
			− 1416,92 $n't$	− 2018,83 $n't$
			(− 30,725	− 26,464
			−42488 $n't$	+60539 $n't$)
0,	1,	−3	+ 47 $n't$	+ 55 $n't$
−1,	2,	−3	− 22 $n't$	− 34 $n't$
1,	0,	−3	− 37 $n't$	− 55 $n't$
			− 12 $n't$	− 34 $n't$
			(+ 2 $n't$	− 4 $n't$)
0,	2,	−3	− 34 $n't$	+ 21 $n't$
−1,	3,	−3	+ 50 $n't$	− 26 $n't$
1,	1,	−3	+ 6 $n't$	− 3 $n't$
			+ 22 $n't$	− 8 $n't$
			(− 4 $n't$	− 1 $n't$)
0,	3,	−3	+ 0,248	− 0,353
−1,	4,	−3	− 0,096	+ 0,122
1,	2,	−3	− 0,208	+ 0,307
0,	3,	−3	+ 4 $n't$	+ 14 $n't$
−1,	4,	−3	− 5 $n't$	− 29 $n't$
−2,	5,	−3	0 $n't$	+ 8 $n't$
1,	2,	−3	− 1 $n't$	+ 1 $n't$
			− 0,056	+ 0,076
			0 $n't$	− 6 $n't$
			(+ 0,012	+ 0,017
			0 $n't$	− 1 $n't$)
0,	4,	−3	− 0,061	+ 0,062
−1,	5,	−3	− 0,058	− 0,027
1,	3,	−3	+ 0,139	− 0,067
0,	4,	−3	+ 17 $n't$	− 199 $n't$
−1,	5,	−3	− 20 $n't$	+ 328 $n't$
1,	3,	−3	− 5 $n't$	+ 35 $n't$
			+ 0,020	− 0,032
			− 8 $n't$	+ 164 $n't$
			(− 0,006	− 0,009
			+ 2 $n't$	+ 48 $n't$)
0,	5,	−3	− 0,036	+ 0,031
−1,	6,	−3	− 0,039	− 0,083
−2,	7,	−3	+ 0,014	+ 0,010
1,	4,	−3	+ 0,012	− 0,013
0,	5,	−3	+ 85 $n't$	− 114 $n't$
−1,	6,	−3	− 151 $n't$	+ 208 $n't$
1,	4,	−3	− 15 $n't$	+ 12 $n't$
			− 0,049	− 0,055
			− 81 $n't$	+ 106 $n't$
			(+ 0,020	− 0,022
			+ 33 $n't$	+ 43 $n't$)
0,	6,	−3	− 2,264	− 1,579
−1,	7,	−3	+ 0,518	+ 0,340
1,	5,	−3	+ 1,693	+ 1,188
0,	6,	−3	+ 64 $n't$	− 27 $n't$
−1,	7,	−3	− 218 $n't$	+ 91 $n't$

Digitized by Google

γ g′ g	cos	sin	γ g′ g	cos	sin
1, 5, − 3	− 7 n′t	+ 1 n′t	− 2, 8, − 4	− 0,018	+ 0,018
	− 0,053	− 0,051	1, 5, − 4	+ 0,239	− 0,169
	− 161 n′t	+ 65 n′t	0, 6, − 4	− 52 n′t	− 58 n′t
	(+ 0,037	− 0,037)	− 1, 7, − 4	+ 75 n′t	+ 83 n′t
	(+ 112 n′t	+ 45 n′t)	1, 5, − 4	+ 8 n′t	+ 11 n′t
0, 7, − 3	− 0,298	+ 0,091		+ 0,042	− 0,047
− 1, 8, − 3	+ 0,002	+ 0,320		+ 31 n′t	+ 36 n′t
1, 6, − 3	+ 0,036	+ 0,017		(− 0,011	− 0,012)
2, 5, − 3	+ 0,048	+ 0,032		(− 8 n′t	+ 9 n′t)
0, 7, − 3	+ 47 n′t	+ 9 n′t	0, 7, − 4	+ 0,364	− 0,341
− 1, 8, − 3	+ 42 n′t	+ 7 n′t	− 1, 8, − 4	− 0,690	+ 0,639
1, 6, − 3	− 1 n′t	0 n′t	1, 6, − 4	− 0,029	+ 0,030
	− 0,212	+ 0,460	0, 7, − 4	− 8 n′t	− 34 n′t
	+ 88 n′t	+ 16 n′t	− 1, 8, − 4	+ 11 n′t	+ 53 n′t
	(+ 0,470	+ 1,021)	1, 6, − 4	0 n′t	+ 5 n′t
	(− 195 n′t	+ 35 n′t)		− 0,355	+ 0,328
0, 3, − 4	+ 7 n′t	+ 34 n′t		+ 3 n′t	+ 24 n′t
− 1, 4, − 4	− 9 n′t	− 44 n′t		(+ 0,120	+ 0,111)
1, 2, − 4	− 1 n′t	− 7 n′t		(− 1 n′t	+ 7 n′t)
	− 3 n′t	− 17 n′t	0, 8, − 4	+ 0,259	− 0,064
	(0 n′t	− 2 n′t)	− 1, 9, − 4	− 0,573	+ 0,143
0, 4, − 4	− 0,061	− 0,042	− 2, 10, − 4	+ 0,040	+ 0,012
− 1, 5, − 4	+ 0,048	+ 0,041	1, 7, − 4	− 0,014	− 0,010
1, 3, − 4	+ 0,037	+ 0,018	0, 8, − 4	+ 4 n′t	− 13 n′t
0, 4, − 4	+ 6 n′t	+ 5 n′t	− 1, 9, − 4	− 6 n′t	+ 24 n′t
− 1, 5, − 4	− 12 n′t	− 6 n′t	1, 7, − 4	− 1 n′t	+ 1 n′t
− 2, 6, − 4	+ 4 n′t	+ 2 n′t		− 0,288	+ 0,081
1, 3, − 4	− 1 n′t	0 n′t		− 3 n′t	+ 12 n′t
	+ 0,024	+ 0,017		(+ 0,150	+ 0,043)
	− 3 n′t	+ 1 n′t		(+ 2 n′t	+ 7 n′t)
	(− 0,004	+ 0,003)	0, 9, − 4	+ 0,100	+ 0,028
	(+ 1 n′t	0 n′t)	− 1, 10, − 4	+ 1,521	+ 0,449
0, 5, − 4	+ 0,001	− 0,081	0, 9, − 4	+ 4 n′t	− 3 n′t
− 1, 6, − 4	− 0,014	+ 0,118	− 1, 10, − 4	+ 75 n′t	− 49 n′t
1, 4, − 4	+ 0,004	+ 0,015		+ 1,621	+ 0,477
0, 5, − 4	− 115 n′t	− 31 n′t		+ 79 n′t	− 52 n′t
− 1, 6, − 4	+ 153 n′t	+ 36 n′t		(− 1,749	+ 0,513)
1, 4, − 4	+ 18 n′t	+ 8 n′t		(− 84 n′t	− 56 n′t)
	− 0,009	+ 0,052	0, 10, − 4	− 0,159	− 0,170
	+ 56 n′t	+ 13 n′t	− 1, 11, − 4	+ 0,01046	+ 0,01173
	(+ 0,002	+ 0,010)	1, 9, − 4	+ 0,00004	− 0,00183
	(− 11 n′t	+ 3 n′t)	0, 10, − 4	− 13 n′t	+ 4 n′t
0, 6, − 4	− 0,270	+ 0,223	− 1, 11, − 4	+ 0,82 n′t	− 0,15 n′t
− 1, 7, − 4	+ 0,091	− 0,119	1, 9, − 4	− 0,20 n′t	− 0,06 n′t

γ	g′	g	cos	sin	γ	g′	g	cos	sin
			— 0″,14850	— 0″,16010	— 1,	10,	— 5	+ 0″,012	+ 0″,282
			— 12,38 $n't$	+ 3,79 $n't$	1,	8,	— 5	— 0,004	+ 0,021
			(— 2,220	+ 2,378)				— 0,001	+ 0,121
			(— 186 $n't$	— 57 $n't$)				(0,000	+ 0,035)
0,	8,	— 5	— 0,184	— 0,309	0,	10,	— 5	+ 0,027	— 0,055
— 1,	9,	— 5	+ 0,274	+ 0,453	— 1,	11,	— 5	— 0,050	+ 0,100
1,	7,	— 5	+ 0,027	+ 0,046	1,	9,	— 5	— 0,004	+ 0,004
			+ 0,111	+ 0,190				— 0,027	+ 0,049
			(— 0,024	+ 0,042)				(+ 0,011	+ 0,020)
0,	9,	— 5	— 0,009	— 0,182					

Digitized by Google

$$-\frac{1}{n'}\left(\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}\right)$$

γ g′ g	sin	cos	γ g′ g	sin	cos
1, −1, 0	− 0″,339	− 0″,00495		− 0″,283	+ 0″,249
2, −2, 0	− 0,004	+ 0,01168		+ 5 n′t	− 18 n′t
1, −1, 0	+ 4,27 n′t	− 10,18 n′t	−1, 1, −1	− 0,266	+ 0,419
2, −2, 0	− 19,96 n′t	+ 11,64 n′t	−2, 2, −1	− 0,086	− 0,116
3, −3, 0	− 0,19 n′t	− 0,02 n′t	1, −1, −1	+ 0,048	− 0,074
	. . . .	+ 0,00673	−1, 1, −1	− 72 n′t	− 80 n′t
	. . . .	+ 1,44 n′t	1, −1, −1	− 29 n′t	− 33 n′t
−1, 2, 0	+ 0,051	+ 0,209		− 0,286	+ 0,229
1, 0, 0	− 0,28680 n′t	− 0,40845 n′t		− 101 n′t	− 113 n′t
2, −1, 0	− 0,019	0,000	−1, 2, −1	− 0,204	− 0,310
−1, 2, 0	+ 357 n′t	+ 208 n′t	−2, 3, −1	+ 0,014	+ 0,016
−2, 3, 0	+ 4 n′t	0 n′t	1, 0, −1	− 0,027	− 0,144
1, 0, 0	− $27{,}59\,n'^2t^2$	+ $46{,}62\,n'^2t^2$	−1, 2, −1	− 64 n′t	+ 21 n′t
	+ 0,032	+ 0,209	−2, 3, −1	− 36 n′t	+ 92 n′t
	−28319 n′t	−40637 n′t	1, 0, −1	− 67 n′t	− 24 n′t
−1, 3, 0	+ 0,017	− 0,002		− 0,217	− 0,438
1, 1, 0	− 0,484	+ 0,855		− 167 n′t	+ 89 n′t
2, 0, 0	− 1608 n′t	− 2288 n′t	−1, 3, −1	+ 0,100	+ 0,102
−1, 3, 0	+ 64 n′t	− 8 n′t	1, 1, −1	+ 0,158	+ 0,192
1, 1, 0	+ 15 n′t	+ 18 n′t	2, 0, −1	− 0,004	− 0,012
2, 0, 0	− $1{,}56\,n'^2t^2$	+ $2{,}60\,n'^2t^2$	−1, 3, −1	− 654 n′t	+ 1959 n′t
	− 0,467	+ 0,853	−2, 4, −1	+ 2 n′t	+ 1 n′t
	− 1529 n′t	− 2278 n′t	1, 1, −1	− 18 n′t	+ 45 n′t
−1, 4, 0	− 0,001	− 0,042	2, 0, −1	− 4 n′t	− 2 n′t
1, 2, 0	+ 0,008	+ 0,935		+ 0,254	+ 0,282
2, 1, 0	− 0,026	+ 0,047		− 674 n′t	+ 2003 n′t
3, 0, 0	− 99 n′t	− 144 n′t	−1, 4, −1	− 0,001	+ 0,017
−1, 4, 0	+ 6 n′t	− 6 n′t	−2, 5, −1	− 0,115	+ 0,021
3, 0, 0	− $0{,}09\,n'^2t^2$	+ $0{,}18\,n'^2t^2$	1, 2, −1	+ 1,145	+ 0,548
	− 0,019	+ 0,940	2, 1, −1	+ 0,008	+ 0,011
	− 93 n′t	− 150 n′t	−1, 4, −1	+ 55 n′t	+ 201 n′t
−1, 5, 0	− 0,191	+ 0,036	1, 2, −1	+ 46 n′t	+ 25 n′t
1, 3, 0	+ 0,098	− 0,036	2, 1, −1	− 1 n′t	+ 3 n′t
2, 2, 0	0,000	+ 0,052		+ 1,037	+ 0,597
	− 0,093	+ 0,052		+ 100 n′t	+ 229 n′t
−1, −1, −1	− 0,499	− 0,091	−1, 5, −1	− 2,044	+ 0,383
1, −3, −1	+ 0,051	− 0,012	1, 3, −1	+ 0,751	− 0,120
	− 0,448	− 0,103	2, 2, −1	+ 0,064	+ 0,029
−1, 0, −1	− 0,313	+ 0,252	−1, 5, −1	+ 20 n′t	+ 17 n′t
1, −2, −1	+ 0,030	− 0,003	1, 3, −1	− 4 n′t	+ 4 n′t
−1, 0, −1	+ 6 n′t	− 11 n′t		− 1,229	+ 0,292
1, −2, −1	− 1 n′t	− 7 n′t		+ 16 n′t	+ 21 n′t

γ g′ g	sin	cos	γ g′ g	sin	cos
− 1, 1, − 2	− 13 n′t	+ 19 n′t	1, 5, − 2	− 28 n′t	− 55 n′t
− 2, 2, − 2	+ 11 n′t	− 17 n′t		+ 0,025	− 0,003
1, −1, − 2	+ 5 n′t	− 5 n′t		− 28 n′t	− 55 n′t
	+ 3 n′t	− 3 n′t	− 1, 3, − 3	− 50 n′t	− 26 n′t
− 1, 2, − 2	− 0,114	− 0,087	1, 1, − 3	+ 6 n′t	+ 3 n′t
− 2, 3, − 2	+ 0,011	− 0,007		− 44 n′t	− 23 n′t
1, 0, − 2	+ 0,018	+ 0,030	− 1, 4, − 3	+ 0,096	+ 0,122
− 1, 2, − 2	+ 210 n′t	− 291 n′t	1, 2, − 3	− 0,208	− 0,307
1, 0, − 2	− 417 n′t	+ 572 n′t	− 1, 4, − 3	+ 5 n′t	− 29 n′t
	− 0,085	− 0,064	− 2, 5, − 3	0 n′t	+ 16 n′t
	− 207 n′t	+ 281 n′t	1, 2, − 3	− 1 n′t	− 1 n′t
− 1, 3, − 2	+ 0,032	− 0,048		− 0,112	− 0,185
1, 1, − 2	+ 0,167	− 0,065		+ 4 n′t	− 14 n′t
− 1, 3, − 2	+ 3 n′t	− 67 n′t	− 1, 5, − 3	+ 0,058	− 0,027
− 2, 4, − 2	+ 54 n′t	+ 6 n′t	1, 3, − 3	+ 0,139	+ 0,067
1, 1, − 2	− 2 n′t	+ 6 n′t	2, 2, − 3	− 0,008	− 0,017
2, 0, − 2	− 12 n′t	+ 43 n′t	− 1, 5, − 3	+ 20 n′t	+ 328 n′t
	+ 0,199	− 0,113	− 2, 6, − 3	+ 8 n′t	+ 12 n′t
	+ 43 n′t	− 12 n′t	1, 3, − 3	− 5 n′t	− 35 n′t
− 1, 4, − 2	+ 0,118	− 0,065		+ 0,189	+ 0,023
− 2, 5, − 1	− 0,036	− 0,240		+ 23 n′t	+ 305 n′t
1, 2, − 2	− 0,073	− 0,218	− 1, 6, − 3	+ 0,039	− 0,083
2, 1, − 2	+ 0,009	− 0,003	− 2, 7, − 3	− 0,028	+ 0,020
− 1, 4, − 2	+ 1002 n′t	+ 111 n′t	1, 4, − 3	+ 0,012	+ 0,013
− 2, 5, − 2	− 588 n′t	+ 260 n′t	− 1, 6, − 3	+ 151 n′t	+ 208 n′t
1, 2, − 2	− 49 n′t	− 5 n′t	− 2, 7, − 3	+ 12 n′t	+ 5 n′t
	+ 0,018	− 0,526	1, 4, − 3	− 15 n′t	− 12 n′t
	+ 365 n′t	+ 366 n′t		+ 0,023	− 0,050
− 1, 5, − 2	− 0,551	− 4,126		+ 148 n′t	+ 201 n′t
1, 3, − 2	− 0,036	+ 0,153	− 1, 7, − 3	− 0,518	+ 0,340
2, 2, − 2	− 0,004	− 0,012	− 2, 8, − 3	0,000	+ 0,018
− 1, 5, − 2	−10542 n′t	+ 4564 n′t	1, 5, − 3	+ 1,693	− 1,188
1, 3, − 2	− 20 n′t	+ 17 n′t	− 1, 7, − 3	+ 218 n′t	+ 91 n′t
	− 0,591	− 3,985	1, 5, − 3	− 7 n′t	− 1 n′t
	−10562 n′t	+ 4581 n′t		+ 1,175	− 0,830
− 1, 6, − 2	+ 0,00496	− 0,00121		+ 211 n′t	+ 90 n′t
1, 4, − 2	+ 0,00448	− 0,00714	− 1, 8, − 3	− 0,002	+ 0,320
2, 3, − 2	− 0,00200	+ 0,00856	1, 6, − 3	+ 0,036	− 0,017
− 1, 6, − 2	− 52,24 n′t	+ 70,93 n′t	2, 5, − 3	+ 0,095	− 0,066
1, 4, − 2	− 2,60 n′t	+ 11,30 n′t	− 1, 8, − 3	− 42 n′t	+ 7 n′t
2, 3, − 2	− 1,12 n′t	+ 0,92 n′t	1, 6, − 3	− 1 n′t	0 n′t
	+ 0,00784	+ 0,00021		+ 0,129	+ 0,237
	− 55,96 n′t	+ 83,25 n′t		− 43 n′t	+ 7 n′t
1, 5, − 2	+ 0,025	− 0,003	− 1, 4, − 4	+ 9 n′t	− 44 n′t

Digitized by Google

γ	g′	g	sin	cos	γ	g′	g	sin	cos
1,	2,	− 4	− 1 *n′t*	+ 7 *n′t*				− 11 *n′t*	+ 48 *n′t*
			+ 8 *n′t*	− 37 *n′t*	− 1,	9,	− 4	+ 0,573	+ 0,143
− 1,	5,	− 4	− 0,048	+ 0,041	− 2,	10,	− 4	− 0,080	+ 0,024
1,	3,	− 4	+ 0,037	− 0,018	1,	7,	− 4	− 0,014	+ 0,010
− 1,	5,	− 4	+ 12 *n′t*	− 6 *n′t*	− 1,	9,	− 4	+ 6 *n′t*	+ 24 *n′t*
− 2,	6,	− 4	− 8 *n′t*	+ 4 *n′t*	1,	7,	− 4	− 1 *n′t*	− 1 *n′t*
1,	3,	− 4	− 1 *n′t*	0 *n′t*				+ 0,479	+ 0,177
			− 0,011	+ 0,023				+ 5 *n′t*	+ 23 *n′t*
			+ 3 *n′t*	− 2 *n′t*	− 1,	10,	− 4	− 1,521	+ 0,049
− 1,	6,	− 4	+ 0,014	+ 0,118	− 1,	10,	− 4	− 75 *n′t*	− 49 *n′t*
1,	4,	− 4	+ 0,004	− 0,015				− 1,521	+ 0,049
− 1,	6,	− 4	− 153 *n′t*	+ 36 *n′t*				− 75 *n′t*	− 49 *n′t*
1,	4,	− 4	+ 18 *n′t*	− 8 *n′t*	− 1,	11,	− 4	− 0,01046	+ 0,01173
			+ 0,018	+ 0,103	1,	9,	− 4	+ 0,00004	+ 0,00183
			− 135 *n′t*	+ 28 *n′t*	− 1,	11,	− 4	− 0,82 *n′t*	− 0,15 *n′t*
− 1,	7,	− 4	− 0,091	− 0,119	1,	9,	− 4	− 0,20 *n′t*	+ 0,06 *n′t*
− 2,	8,	− 4	+ 0,036	+ 0,036				− 0,01042	+ 0,01356
1,	5,	− 4	+ 0,239	+ 0,169				− 1,02 *n′t*	− 0,09 *n′t*
− 1,	7,	− 4	− 75 *n′t*	+ 83 *n′t*	− 1,	9,	− 5	− 0,274	+ 0,453
1,	5,	− 4	+ 8 *n′t*	− 11 *n′t*	1,	7,	− 5	+ 0,027	− 0,046
			+ 0,184	+ 0,086				− 0,247	+ 0,407
			− 67 *n′t*	+ 72 *n′t*	− 1,	10,	− 5	− 0,012	+ 0,282
− 1,	8,	− 4	+ 0,690	+ 0,639	1,	8,	− 5	− 0,004	− 0,021
− 2,	9,	− 4	+ 0,031	+ 0,008				− 0,016	+ 0,261
1,	6,	− 4	− 0,029	− 0,030	− 1,	11,	− 5	+ 0,050	+ 0,100
− 1,	8,	− 4	− 11 *n′t*	+ 53 *n′t*	1,	9,	− 5	− 0,004	− 0,004
1,	6,	− 4	0 *n′t*	− 5 *n′t*				+ 0,046	+ 0,096
			+ 0,692	+ 0,617					

Digitized by Google

g'	g	$l(r')$ cos	$l(r')$ sin	S' cos	S' sin
0,	0	− 0,057	. . . .	− 0,114	. . . .
		+ 337 $n't$	. . . .	+ 667 $n't$	. . . .
		+ 0,36 n'^2t^2	. . . .	+ 0,72 n'^2t^2	. . . .
1,	0	− 0,229	− 0,038	− 0,070	+ 0,105
		+ 14206 $n't$	− 20346 $n't$	− 152 $n't$	+ 86 $n't$
		+ 13,80 n'^2t^2	+ 23,31 n'^2t^2	0	0
2,	0	+ 0,115	+ 0,212	− 0,070	− 0,084
		+ 383 $n't$	− 570 $n't$	− 12 $n't$	− 12 $n't$
		+ 0,39 n'^2t^2	+ 0,65 n'^2t^2	0	0
3,	0	+ 0,003	+ 0,157	− 0,008	− 0,178
		+ 16 $n't$	− 25 $n't$	− 1 $n't$	− 2 $n't$
		+ 0,02 n'^2t^2	+ 0,03 n'^2t^2	0	0
4,	0	+ 0,012	+ 0,007	+ 0,081	+ 0,010
− 2,	− 1	− 0,050	+ 0,012	+ 0,110	+ 0,069
− 1,	− 1	− 0,042	− 0,037	+ 0,052	+ 0,039
		+ 1 $n't$	+ 3 $n't$	− 1 $n't$	0 $n't$
0,	− 1	− 0,058	− 0,046	+ 0,075	+ 0,084
		− 20 $n't$	+ 23 $n't$	+ 3 $n't$	− 2 $n't$
1,	− 1	− 0,073	+ 0,147	+ 0,003	+ 0,035
		− 57 $n't$	− 30 $n't$	− 29 $n't$	+ 11 $n't$
2,	− 1	+ 0,309	− 0,307	+ 0,149	− 0,129
		− 698 $n't$	− 2073 $n't$	− 188 $n't$	− 546 $n't$
3,	− 1	− 0,999	+ 0,580	− 0,221	+ 0,167
		− 97 $n't$	+ 222 $n't$	− 67 $n't$	+ 92 $n't$
4,	− 1	+ 0,405	+ 0,096	+ 0,909	+ 0,170
		− 5 $n't$	+ 7 $n't$	− 7 $n't$	− 1 $n't$
0,	− 2	+ 1 $n't$	+ 1 $n't$	+ 19 $n't$	+ 25 $n't$
1,	− 2	− 0,011	+ 0,008	+ 0,032	− 0,020
		− 27 $n't$	− 35 $n't$	− 166 $n't$	− 231 $n't$
2,	− 2	+ 0,034	+ 0,020	+ 0,049	+ 0,015
		+ 7 $n't$	+ 2 $n't$	+ 5 $n't$	− 21 $n't$
3,	− 2	+ 0,005	+ 0,134	− 0,034	+ 0,056
		+ 93 $n't$	− 93 $n't$	− 137 $n't$	+ 15 $n't$
4,	− 2	− 0,281	+ 2,005	− 0,019	− 0,055
		− 5463 $n't$	− 2370 $n't$	− 76 $n't$	− 34 $n't$
5,	− 2	+ 0,257	− 0,248	+ 0,095	− 0,039
		+ 839 $n't$	+ 1248 $n't$	+ 261 $n't$	+ 478 $n't$
6,	− 2	− 0,012	− 0,002	+ 0,001	0,000
		+ 14 $n't$	− 27 $n't$	− 1 $n't$	+ 2 $n't$
2,	− 3	− 4 $n't$	+ 2 $n't$	+ 14 $n't$	− 4 $n't$
3,	− 3	− 0,012	+ 0,021	− 0,080	+ 0,117
		+ 1 $n't$	+ 2 $n't$	+ 1 $n't$	− 3 $n't$

g'	g	$l(r')$ cos	$l(r')$ sin	S' cos	S' sin
4,	− 3	+ 0″,028	− 0″,004	+ 0″,075	− 0″,039
		+ 4 $n't$	− 45 $n't$	− 1 $n't$	+ 75 $n't$
5,	− 3	+ 0,005	+ 0,011	− 0,040	− 0,034
		+ 30 $n't$	− 41 $n't$	− 21 $n't$	+ 24 $n't$
6,	− 3	+ 0,405	+ 0,286	+ 0,757	+ 0,521
		+ 73 $n't$	− 31 $n't$	− 15 $n't$	+ 3 $n't$
7,	− 3	+ 0,144	− 0,264	+ 0,075	− 0,067
		− 48 $n't$	− 8 $n't$	− 8 $n't$	0 $n't$
3,	− 4	+ 1 $n't$	+ 2 $n't$	− 2 $n't$	− 13 $n't$
4,	− 4	− 0,001	− 0,002	+ 0,022	+ 0,013
		+ 1 $n't$	0 $n't$	− 2 $n't$	+ 1 $n't$
5,	− 4	+ 0,002	− 0,011	− 0,005	+ 0,031
		− 14 $n't$	− 3 $n't$	+ 29 $n't$	+ 7 $n't$
6,	− 4	+ 0,023	− 0,011	+ 0,088	− 0,069
		− 9 $n't$	− 9 $n't$	+ 14 $n't$	+ 18 $n't$
7,	− 4	+ 0,118	− 0,106	− 0,119	+ 0,117
		− 2 $n't$	− 8 $n't$	− 1 $n't$	+ 8 $n't$
8,	− 4	+ 0,123	− 0,046	− 0,042	− 0,010
		+ 2 $n't$	− 6 $n't$	0 $n't$	0 $n't$
9,	− 4	− 0,815	− 0,240	− 0,009	− 0,003
		− 40 $n't$	+ 26 $n't$	− 1 $n't$	0 $n't$
10,	− 4	+ 0,078	+ 0,101	+ 0,007	+ 0,042
		+ 8 $n't$	− 1 $n't$	+ 4 $n't$	+ 3 $n't$
8,	− 5	− 0,026	− 0,046	+ 0,058	+ 0,099
9,	− 5	− 0,003	− 0,038	− 0,006	+ 0,045
10,	− 5	+ 0,010	− 0,020	− 0,008	+ 0,010

Digitized by Google

$n\zeta'$

γ	g'	g	sin	cos	γ	g'	g	sin	cos
0,	0,	0	. . . .	$- 0{,}04\, n'^2t^2$	-1,	5,	-2	$+ 0''{,}009$	$+ 0''{,}121$
1,	-1,	0	$- 0{,}08\, n't$	$+ 0{,}01\, n't$	0,	4,	-2	$+ 25\, n't$	$- 2\, n't$
1,	0,	0	$+ 1{,}14\, n'^2t^2$	$- 0{,}05\, n'^2t^2$	-1,	5,	-2	$+ 404\, n't$	$- 29\, n't$
2,	0,	0	$+ 0{,}02\, n'^2t^2$	$0{,}00\, n'^2t^2$	0,	4,	-2	$- 1\, xn't$	$- 11\, xn't$
0,	2,	-1	$+ 8\, n't$	$+ 6\, n't$	0,	5,	-2	$+ 1{,}589$	$+ 2{,}632$
-1,	3,	-1	$+ 4\, n't$	$+ 2\, n't$	0,	5,	-2	$- 0{,}045\, x$	$+ 0{,}027\, x$
0,	2,	-1	$+ 2\, xn't$	$- 2\, xn't$	0,	5,	-2	$+ 4308\, n't$	$- 2603\, n't$
0,	3,	-1	$+ 3\, n't$	$- 20\, n't$	-1,	6,	-2	$+ 5{,}60\, n't$	$- 3{,}45\, n't$
-1,	4,	-1	$+ 1\, n't$	$- 12\, n't$	1,	4,	-2	$+ 0{,}41\, n't$	$- 0{,}44\, n't$
0,	3,	-1	$+ 27\, xn't$	$+ 4\, xn't$	0,	5,	-2	$+ 90\, xn't$	$+ 149\, xn't$

Tafel XLVI.

g'	g	$l(r')$		S'	
		cos	sin	cos	sin
1,	0	$- 0{,}57\, n'^2t^2$	$- 0{,}03\, n'^2t^2$	0	0
2,	0	$- 0{,}02\, n'^2t^2$	$0{,}00\, n'^2t^2$	0	0
2,	-1	$+ 4\, n't$	$- 2\, n't$	$+ 2\, n't$	$0\, n't$
3,	-1	$- 1\, n't$	$- 12\, n't$	$+ 1\, n't$	$- 9\, n't$
4,	-2	$+ 0{,}005$	$- 0{,}060$	$0{,}000$	$0{,}000$
		$+ 209\, n't$	$+ 15\, n't$	$+ 2\, n't$	$0\, n't$
5,	-2	$- 0{,}018$	$+ 0{,}027$	$- 0{,}008$	$+ 0{,}009$
		$- 90\, n't$	$- 58\, n't$	$- 37\, n't$	$- 29\, n't$

Digitized by Google

g'	g	cos	sin
		$\frac{1}{n'}\left(\frac{d^2\overset{1}{p'}}{dg'dt}\right) n'(z')$	
0,	0	− 0,01142	....
0,	0	− 1,02 $n't$	....
10,	− 4	− 0,00509	− 0,00712
		$-\frac{1}{n'}\left(\frac{d\overset{1}{p}}{dt}\right) S + \frac{1}{n'} r'\left(\frac{d^2\overset{1}{p}}{dr'dt}\right) l(r')$	
0,	0	− 0,01567	....
0,	0	+ 2,08 $n't$	....
		$\frac{1}{n'}\left(\frac{d^2\overset{1}{p'}}{dgdt}\right) n(z)$	
0,	0	− 0,00473	....
0,	0	− 0,37 $n't$	....
10,	− 4	− 0,00085	− 0,00119
		$\frac{1}{n'} r\left(\frac{d^2\overset{1}{p'}}{drdt}\right) l(r)$	
0,	0	− 0,00141	....
0,	0	+ 0,97 $n't$	....
		$-A(p'+p) - B(q'+q)$	
0,	0	− 5,33 $n't$	....
5,	− 2	+ 15,06 $n't$	+ 9,17 $n't$

g'	g	cos	sin
		$\frac{1}{n'}\left(\frac{d^2\overset{1}{q'}}{dg'dt}\right) n'(z')$	
0,	0	− 0,00185	....
0,	0	− 0,51 $n't$	....
10,	− 4	− 0,00776	+ 0,00539
		$-\frac{1}{n'}\left(\frac{d\overset{1}{q}}{dt}\right) S + \frac{1}{n'} r'\left(\frac{d^2\overset{1}{q'}}{dr'dt}\right) l(r')$	
0,	0	− 0,00059	....
0,	0	+ 1,43 $n't$	....
		$\frac{1}{n'}\left(\frac{d^2\overset{1}{q'}}{dgdt}\right) n(z)$	
0,	0	− 0,00028	....
0,	0	+ 0,68 $n't$	....
10,	− 4	− 0,00130	+ 0,00090
		$\frac{1}{n'} r\left(\frac{d^2\overset{1}{q'}}{drdt}\right) l(r)$	
0,	0	− 0,00017	....
0,	0	− 0,19 $n't$	....
		$-C(p'+p) - D(q'+q)$	
0,	0	+ 110,26 $n't$	....
5,	− 2	+ 10,04 $n't$	− 16,12 $n't$
		$(m^2)\, S_2$ tg. $\frac{1}{2}$ I	
0,	0	+ 33 $n't$	....
0,	0	+ 0,12 n'^2t^2	....
5,	− 2	+ 27 $n't$	+ 21 $n't$
		$(m'm)\, S_2$ tg. $\frac{1}{2}$ I	
0,	0	+ 9 $n't$	....
0,	0	+ 0,01 n'^2t^2	....
5,	− 2	+ 3 $n't$	+ 5 $n't$

Digitized by Google

Nachschrift.

Da die Königliche Akademie mir auf meine Bitte diese Abhandlung, nachdem ihr der Preis zuerkannt worden, wieder auf einige Zeit zustellte, so benutzte ich diese Güte, um die Störungen der Breite, die vorher auf eine etwas verschiedene Art berechnet waren, so zu berechnen, wie man es in dem Vorstehenden findet, und um die numerische Rechnung der Störungen zweiter Ordnung des Saturns einer Hauptcontrolle zu unterwerfen, welches bis dahin aus Mangel an Zeit dazu nicht geschehen war. Zugleich habe ich bei der Anführung meiner Abhandlung in Schumacher's Astron. Nachr., die der gegenwärtigen Abhandlung zur Grundlage dient, statt der dritten Person, in welcher ich der zu beobachtenden Anonymität wegen von mir selbst reden muſste, die erste Person des Pronomens gesetzt. Ich ergreife diese Gelegenheit, um der Königl. Akademie für die Zurückstellung der Abhandlung meinen verbindlichsten Dank darzubringen.

Ich habe mittlerweile die Störungen zweiter Ordnung des Jupiters schon berechnet, und hätte daher die Prüfung der numerischen Rechnung vermittelst der im Artikel 27. auseinander gesetzten Bedingungsgleichung bewerkstelligen können, allein ich habe dieses Verfahren nicht gewählt, obgleich dadurch vollkommene Sicherheit herbeigeführt werden kann. Denn wenn man findet, daſs hie und da der Bedingungsgleichung nicht Genüge geleistet ist, und daſs also Fehler in der numerischen Rechnung vorhanden sind, so kann es sehr mühsam werden den begangenen Fehler aufzusuchen, weil man gemeiniglich nicht im Voraus wissen kann, ob er bei dem einen oder dem andern der beiden Planeten liegt, und man daher in die Nothwendigkeit versetzt werden kann, die

Digitized by Google

bezüglichen Rechnungen beider Planeten durchzusehen. Bei den Störungen erster Ordnung verhält sich die Sache anders, denn dort ist die Rechnung unabhängig von dieser Bedingungsgleichung, vorher fast schon gänzlich controllirt. Ich habe aus dem angeführten Grunde mich zur Prüfung der numerischen Rechnung der Störungen zweiter Ordnung des Saturns unmittelbar der Gleichung

$$S = \int \frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{d\Omega}{dv}\right) dt$$

welche strenge statt findet, bedient, und werde hier die Resultate derselben beifügen.

Man findet leicht durch Hülfe des in dieser Abhandlung Vorgetragenen für die Störungen zweiter Ordnung in S:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} = -S\frac{dS}{dt} &+ \frac{d^2S}{dtdg}\,n(z) + r\frac{d^2S}{dtdr}\,l(r) \\ &+ \frac{d^2S}{dtdg'}\,n'(z') + r'\frac{d^2S}{dtdr'}\,l(r') + \text{etc.} \\ &- \frac{d^2S}{dtdP}\,(p+p') - \frac{d^2S}{dtdQ}\,(q+q') + \text{etc.} \end{aligned}$$

in welcher Gleichnng die uncommatisirten Gröſsen, wie immer, dem gestörten Planeten angehören. Das erste Glied der rechten Seite ist integrabel und fügt dem Werthe von S den Ausdruck $-\frac{1}{2}S^2$ hinzu; es ist vortheilhaft, diesen unmittelbar zu berechnen. Die erforderlichen Differentialquotienten von S sind leicht zu haben, denn da T nach der Verwandelung von τ in t in $\frac{dS}{dt}$ übergeht, so braucht man nur in dem numerischen Werthe von T diese Verwandelung auszuführen, um darauf durch einfache Differentiation $\frac{d^2S}{dtdg}$, $\frac{d^2S}{dtdg'}$, etc. zu bekommen. Die Gröſse V des Art. 18. geht nach derselben Verwandelung in $r\frac{d^2S}{drdt}$ über, und hieraus bekommt man $r'\frac{d^2S}{dr'dt}$ etc. durch die Gleichung

$$-\frac{dS}{dt} = r\frac{d^2S}{drdt} + r'\frac{d^2S}{dr'dt} + r''\frac{d^2S}{dr''dt} + \text{etc.}$$

Die noch übrigen Differentialquotienten ergeben sich auf gleiche Weise aus $\frac{dT}{dP}$ und $\frac{dT}{dQ}$, etc. Nur muſs man vor allen diesen Verwandelungen, den gegebenen Regeln gemäſs, die Glieder ergänzen, in welche $\kappa > \pm 1$ ist. An-

Digitized by Google

statt $\frac{d^2S}{dtdg}$, $\frac{d^2S}{dtdg'}$, etc. aus T zu berechnen, kann man auch unmittelbar den aus der ersten Approximation ohnehin schon bekannten Werth von S dazu benutzen.

Ich lasse nach dieser Erklärung die numerischen Werthe für den Saturn folgen, habe aber hierbei, wie allenthalben in den numerischen Rechnungen, die uncommatisirten Gröſsen auf den Jupiter, und die commatisirten auf den Saturn bezogen.

$$-\frac{1}{2}S'^2$$

g'	g	cos	sin	g'	g	cos	sin
0,	0	$-\ 12\ n't$	0	2,	$-\ 2$	$+\ 0'',104$	$+\ 0'',045$
0,	0	$-\ 0,01\ n'^2t^2$	$0''$	3,	$-\ 2$	$+\ 0,022$	$-\ 0,019$
1,	0	$+\ 0,009$	$+\ 0'',019$	4,	$-\ 2$	$-\ 0,003$	$+\ 0,002$
2,	0	$+\ 0,003$	$-\ 0,004$	5,	$-\ 2$	$-\ 0,012$	$+\ 0,008$
0,	$-\ 1$	$-\ 0,001$	$-\ 0,015$	2,	$-\ 3$	$+\ 0,013$	$+\ 0,005$
1,	$-\ 1$	$-\ 0,055$	$+\ 0,256$	3,	$-\ 3$	$-\ 0,024$	$+\ 0,034$
1,	$-\ 1$	$-\ 6\ n't$	$+\ 24\ n't$	4,	$-\ 3$	$-\ 0,015$	$+\ 0,003$
2,	$-\ 1$	$+\ 0,022$	$+\ 0,006$	5,	$-\ 3$	$-\ 0,003$	$-\ 0,002$
4,	$-\ 1$	$-\ 0,011$	$-\ 0,009$	6,	$-\ 3$	$+\ 0,007$	$+\ 0,013$
1,	$-\ 2$	$-\ 0,017$	$-\ 0,008$	4,	$-\ 4$	$+\ 0,008$	$+\ 0,009$

Digitized by Google

$$\frac{d^2 S'}{dg'\,dt} \times n'(z')$$

g'	g	sin	cos	g'	g	sin	cos
0,	0		+ 0,04452″	5,	− 2	+ 0,02463″	− 0,00489″
			+ 7,80 $n't$			− 28,06 $n't$	+ 26,98 $n't$
1,	0	+ 0,034″	+ 0,482	6,	− 2	+ 0,039	− 0,049
		+ 6 $n't$	− 1 $n't$			− 2 $n't$	+ 7 $n't$
2,	0	+ 0,451	− 0,545	2,	− 3	− 0,108	+ 0,129
		+ 17 $n't$	− 15 $n't$			+ 502 $n't$	− 35 $n't$
3,	0	− 0,102	− 1,255	3,	− 3	− 0,046	− 0,013
		+ 2 $n't$	− 5 $n't$			+ 134 $n't$	− 128 $n't$
4,	0	− 0,369	+ 0,085	4,	− 3	− 0,202	+ 0,073
− 2,	− 1	+ 1,209	− 0,275			+ 196 $n't$	− 498 $n't$
− 1,	− 1	+ 0,603	− 0,560	5,	− 3	+ 0,782	− 0,009
		+ 15 $n't$	+ 6 $n't$			− 50 $n't$	− 212 $n't$
0,	− 1	+ 0,207	− 0,354	6,	− 3	+ 2,720	− 1,844
		+ 1199 $n't$	+ 429 $n't$			− 40 $n't$	− 33 $n't$
1,	− 1	− 0,005	− 0,042	7,	− 3	+ 0,152	+ 0,113
		+ 7 $n't$	+ 78 $n't$			− 10 $n't$	− 1 $n't$
2,	− 1	− 0,036	+ 0,103	8,	− 3	+ 0,045	+ 0,029
		+ 922 $n't$	− 860 $n't$	3,	− 4	+ 113 $n't$	+ 366 $n't$
3,	− 1	− 0,830	− 0,076	4,	− 4	− 0,015	+ 0,020
		+ 88 $n't$	+ 21 $n't$			+ 145 $n't$	+ 98 $n't$
4,	− 1	− 3,231	+ 0,643	5,	− 4	− 0,028	− 0,162
		+ 19 $n't$	+ 9 $n't$			+ 457 $n't$	+ 75 $n't$
− 1,	− 2	+ 0,445	+ 0,925	6,	− 4	+ 0,136	− 0,535
0,	− 2	+ 0,667	+ 0,430			+ 201 $n't$	− 83 $n't$
		+ 138 $n't$	+ 48 $n't$	7,	− 4	− 0,992	− 0,902
1,	− 2	+ 0,234	+ 0,167			+ 32 $n't$	− 51 $n't$
		+ 73 $n't$	− 470 $n't$	8,	− 4	− 0,448	− 0,013
2,	− 2	+ 0,098	+ 0,003			+ 3 $n't$	− 8 $n't$
		+ 20 $n't$	− 236 $n't$	9,	− 4	− 0,076	+ 0,065
3,	− 2	− 0,101	− 0,539			− 1 $n't$	− 3 $n't$
		− 422 $n't$	− 287 $n't$	10,	− 4	− 0,00433	+ 0,01726
4,	− 2	− 0,056	− 0,028			− 0,45 $n't$	− 0,16 $n't$
		− 175 $n't$	+ 17 $n't$				

$$r' \frac{d^2 S'}{d r' dt} \times l(r')$$

g′	g	sin	cos	g′	g	sin	cos
0,	0		− 0″,01466	4,	− 2	+ 0″,012	+ 0″,020
			− 9,03 n′t			− 107 n′t	+ 20 n′t
1,	0	+ 0″,048	− 0,292	5,	− 2	− 0,01632	+ 0,00062
		− 3 n′t	0 n′t			− 13,07 n′t	+ 18,51 n′t
2,	0	+ 0,125	− 0,172	6,	− 2	+ 1 n′t	+ 4 n′t
		+ 20 n′t	− 19 n′t	2,	− 3	− 0,031	+ 0,011
3,	0	+ 0,049	+ 0,059			− 352 n′t	+ 25 n′t
		+ 1 n′t	− 5 n′t	3,	− 3	− 0,194	− 0,284
− 2,	− 1	− 0,047	+ 0,003			− 105 n′t	+ 87 n′t
− 1,	− 1	+ 0,154	− 0,156	4,	− 3	− 0,068	− 0,077
		− 27 n′t	− 7 n′t			+ 126 n′t	− 302 n′t
0,	− 1	+ 0,079	− 0,122	5,	− 3	+ 0,718	− 0,081
		+ 1050 n′t	+ 376 n′t			− 39 n′t	− 110 n′t
1,	− 1	+ 0,104	+ 0,426	6,	− 3	− 0,058	+ 0,031
		+ 114 n′t	− 82 n′t			− 18 n′t	− 5 n′t
2,	− 1	+ 0,067	+ 0,026	7,	− 3	0,000	+ 0,009
		− 805 n′t	+ 758 n′t			− 5 n′t	+ 1 n′t
3,	− 1	+ 0,660	+ 0,225	4,	− 4	+ 0,113	− 0,120
		− 20 n′t	+ 101 n′t			− 113 n′t	− 109 n′t
4,	− 1	− 0,144	+ 0,019	5,	− 4	+ 0,208	− 0,012
		+ 11 n′t	+ 6 n′t			+ 238 n′t	+ 54 n′t
− 1,	− 2	− 0,010	− 0,025	6,	− 4	+ 0,100	+ 0,243
0,	− 2	+ 0,128	+ 0,094			+ 98 n′t	− 52 n′t
		+ 73 n′t	+ 31 n′t	7,	− 4	+ 0,030	+ 0,001
1,	− 2	+ 0,142	+ 0,081			+ 11 n′t	− 27 n′t
		− 51 n′t	+ 391 n′t	8,	− 4	+ 0,001	− 0,002
2,	− 2	− 0,561	+ 0,266			− 2 n′t	− 6 n′t
		+ 18 n′t	+ 135 n′t	10,	− 4	− 0,17 n′t	+ 0,05 n′t
3,	− 2	− 0,096	− 0,152				
		− 308 n′t	− 225 n′t				

$$\frac{d^2 S'}{dg\,dt} \times n(z)$$

g′	g	sin	cos
0,	0		+ 0″,00676
			+ 25,49 n′t
1,	0	+ 0″,079	+ 0,162
		− 421 n′t	− 241 n′t
2,	0	+ 0,115	− 0,175
		0 n′t	− 13 n′t
3,	0	− 0,003	− 0,509
		+ 1 n′t	− 3 n′t
4,	0	− 0,321	+ 0,071
− 2,	− 1	+ 0,512	− 0,101
− 1,	− 1	+ 0,169	− 0,137
		+ 5 n′t	− 3 n′t
0,	− 1	+ 0,112	− 0,136
		+ 8 n′t	+ 5 n′t
1,	− 1	+ 0,056	+ 0,262
		− 94 n′t	− 58 n′t
2,	− 1	− 0,051	− 0,066
		− 60 n′t	+ 171 n′t
3,	− 1	+ 0,052	+ 0,065
		+ 16 n′t	+ 38 n′t
4,	− 1	− 1,344	+ 0,225
		+ 6 n′t	+ 4 n′t
− 1,	− 2	+ 0,214	+ 0,356
0,	− 2	+ 0,153	+ 0,088
		+ 30 n′t	− 41 n′t
1,	− 2	+ 0,108	+ 0,056
		− 286 n′t	+ 391 n′t
2,	− 2	+ 0,071	− 0,002
		− 15 n′t	− 3 n′t
3,	− 2	− 0,045	− 0,128
		− 184 n′t	− 20 n′t
4,	− 2	+ 0,016	− 0,214

g′	g	sin	cos
		− 50 n′t	+ 29 n′t
5,	− 2	− 0,00256	+ 0,01758
		− 5,14 n′t	+ 10,40 n′t
2,	− 3	+ 0,038	+ 0,013
		+ 164 n′t	+ 77 n′t
3,	− 3	− 0,182	− 0,275
		+ 26 n′t	− 3 n′t
4,	− 3	+ 0,038	+ 0,057
		− 13 n′t	− 158 n′t
5,	− 3	− 0,103	+ 0,098
		− 38 n′t	− 47 n′t
6,	− 3	+ 1,124	− 0,796
		− 14 n′t	− 4 n′t
7,	− 3	+ 0,036	+ 0,021
		− 3 n′t	+ 1 n′t
8,	− 3	+ 0,006	+ 0,004
3,	− 4	− 0,032	− 0,048
		− 39 n′t	+ 179 n′t
4,	− 4	0,000	+ 0,035
		+ 10 n′t	+ 41 n′t
5,	− 4	− 0,048	− 0,098
		+ 119 n′t	− 33 n′t
6,	− 4	+ 0,309	− 0,005
		+ 36 n′t	− 44 n′t
7,	− 4	− 0,374	− 0,353
		+ 4 n′t	− 14 n′t
8,	− 4	− 0,118	− 0,005
		− 1 n′t	− 3 n′t
9,	− 4	− 0,016	+ 0,013
10,	− 4	− 0,00072	+ 0,00289
		− 0,14 n′t	+ 0,02 n′t

Digitized by Google

$$r \frac{d^2 S'}{dr\,dt} \times l(r)$$

g'	g	sin	cos	g'	g	sin	cos
0,	0		+ 0″,00047			− 28 $n't$	+ 23 $n't$
			− 23,97 $n't$	5,	− 2	+ 0,00450	− 0,01679
1,	0	+ 0″,049	− 0,123			− 3,80 $n't$	+ 5,88 $n't$
		+ 592 $n't$	+ 344 $n't$	2,	− 3	+ 0,023	+ 0,019
2,	0	+ 0,033	− 0,019			− 97 $n't$	− 43 $n't$
		+ 28 $n't$	− 3 $n't$	3,	− 3	− 0,221	− 0,310
3,	0	+ 1 $n't$	− 3 $n't$			− 41 $n't$	+ 21 $n't$
− 1,	− 1	+ 0,024	− 0,028	4,	− 3	+ 0,114	+ 0,052
		− 9 $n't$	+ 5 $n't$			− 10 $n't$	− 79 $n't$
0,	− 1	+ 0,032	− 0,058	5,	− 3	+ 0,019	− 0,004
		− 3 $n't$	− 2 $n't$			− 26 $n't$	− 25 $n't$
1,	− 1	− 0,067	− 0,321	6,	− 3	− 0,027	+ 0,027
		+ 57 $n't$	+ 45 $n't$			− 10 $n't$	0 $n't$
2,	− 1	+ 0,110	+ 0,138	3,	− 4	− 0,020	− 0,026
		− 33 $n't$	+ 101 $n't$			+ 23 $n't$	− 101 $n't$
3,	− 1	+ 0,048	+ 0,011	4,	− 4	+ 0,067	− 0,080
		+ 17 $n't$	+ 24 $n't$			− 31 $n't$	− 36 $n't$
4,	− 1	− 0,038	+ 0,036	5,	− 4	0,000	− 0,031
		+ 6 $n't$	+ 1 $n't$			+ 52 $n't$	− 22 $n't$
0,	− 2	+ 28 $n't$	− 39 $n't$	6,	− 4	+ 0,084	+ 0,274
1,	− 2	+ 0,015	+ 0,012			+ 17 $n't$	− 26 $n't$
		− 406 $n't$	+ 551 $n't$	7,	− 4	+ 0,008	+ 0,008
2,	− 2	+ 0,093	− 0,038			− 1 $n't$	− 10 $n't$
		0 $n't$	+ 31 $n't$	8,	− 4	− 2 $n't$	− 2 $n't$
3,	− 2	− 0,015	− 0,064	10,	− 4	+ 0,00002	+ 0,00006
		− 100 $n't$	− 10 $n't$			− 0,05 $n't$	+ 0,05 $n't$
4,	− 2	− 0,029	+ 0,281				

Hieraus ergiebt sich S', und somit die Unterschiede mit dem aus den Störungen der Länge und des Radius berechneten Werthe derselben Gröſse.

Der mit m^2 multiplicirte Theil von S' und Differenz mit Tafel XL.

g'	g	cos	Diff.	sin	Diff.
0,	0	$+ 2986\, n't$	− 2		
		$- 0{,}62\, n'^2t^2$	+ 32		
1,	0	− 0,073	+ 24	+ 0,″209	− 85
		$- 3\, n't$	+ 27	$- 1\, n't$	+ 6
2,	0	− 0,298	+ 17	− 0,359	− 15
		$- 19\, n't$	+ 10	$- 17\, n't$	+ 8
3,	0	+ 0,018	+ 14	− 0,399	− 8
		$- 1\, n't$	+ 1	$- 3\, n't$	− 2
4,	0	+ 0,092	− 5	+ 0,021	+ 24
− 2,	− 1	+ 0,258	− 38	+ 0,061	− 4
− 1,	− 1	+ 0,218	− 15	+ 0,206	− 5
		$- 4\, n't$	− 7	$0\, n't$	+ 1
0,	− 1	+ 0,115	+ 21	+ 0,177	+ 51
		$+ 906\, n't$	+ 7	$- 324\, n't$	− 1
1,	− 1	+ 0,012	− 32	− 0,013	+ 37
		$+ 80\, n't$	− 28	$+ 5\, n't$	− 18
2,	− 1	+ 0,079	+ 29	− 0,258	− 40
		$+ 244\, n't$	+ 20	$+ 216\, n't$	− 18
3,	− 1	+ 0,294	+ 31	+ 0,289	+ 51
		$- 112\, n't$	− 21	$+ 236\, n't$	+ 18
4,	− 1	+ 2,225	+ 31	+ 0,411	− 24
		$- 20\, n't$	− 8	$+ 10\, n't$	− 7
− 1,	− 2	+ 0,073	− 13	− 0,151	+ 3
0,	− 2	+ 0,160	+ 8	− 0,106	− 8
		$+ 43\, n't$	+ 17	$- 16\, n't$	− 4
1,	− 2	+ 0,078	− 12	− 0,071	− 15
		$+ 6\, n't$	+ 5	$+ 20\, n't$	− 6
2,	− 2	− 0,052	+ 60	− 0,046	− 4
		$+ 7\, n't$	+ 8	$+ 36\, n't$	− 13
3,	− 2	− 0,078	+ 75	+ 0,333	+ 27
		$- 371\, n't$	+ 17	$+ 261\, n't$	+ 12
4,	− 2	− 0,048	− 11	+ 0,007	+ 23
		$- 292\, n't$	+ 1	$- 38\, n't$	+ 6
5,	− 2	+ 0,147	− 68	− 0,490	− 71
		$+ 1233\, n't$	− 1	$+ 1364\, n't$	− 65
6,	− 2	− 0,047	− 34	− 0,033	+ 15
		$+ 1\, n't$	+ 1	$+ 11\, n't$	+ 4
2,	− 3	− 0,012	+ 6	− 0,020	+ 5
		$+ 28\, n't$	− 25	$+ 2\, n't$	− 4
3,	− 3	− 0,078	+ 24	+ 0,101	− 30
		$+ 7\, n't$	− 4	$+ 9\, n't$	− 4
4,	− 3	− 0,093	+ 34	+ 0,004	− 13

Digitized by Google

g'	g	cos	Diff.	sin	Diff.
		+ 93 $n't$	− 10	+ 232 $n't$	− 11
5,	− 3	+ 0,609	− 32	+ 0,039	+ 41
		− 36 $n't$	0	+ 132 $n't$	− 3
6,	− 3	+ 1,843	+ 43	+ 1,235	− 1
		− 40 $n't$	+ 2	+ 26 $n't$	+ 2
7,	− 3	+ 0,338	− 15	− 0,272	+ 31
		− 31 $n't$	− 23	0 $n't$	− 9
8,	− 3	− 0,019	− 14	+ 0,074	− 44
		0 $n't$	− 4	0 $n't$	− 4
4,	− 4	+ 0,032	− 1	+ 0,035	+ 6
		+ 7 $n't$	0	+ 3 $n't$	+ 9
5,	− 4	+ 0,037	− 28	+ 0,036	− 15
		+ 141 $n't$	+ 11	− 26 $n't$	− 2
6,	− 4	+ 0,060	+ 31	+ 0,074	− 33
		+ 76 $n't$	+ 8	+ 34 $n't$	0
7,	− 4	− 0,328	+ 29	+ 0,308	+ 13
		+ 15 $n't$	− 1	+ 27 $n't$	− 1
8,	− 4	− 0,231	− 30	+ 0,008	+ 8
		+ 1 $n't$	+ 3	+ 7 $n't$	+ 1
9,	− 4	− 0,081	− 9	− 0,070	− 9
		+ 1 $n't$	+ 1	+ 2 $n't$	− 1
10,	− 4	+ 0,065	+ 18	+ 0,258	− 2
		+ 9 $n't$	− 2	− 17 $n't$	+ 13

Digitized by Google

Der mit $m'm$ multiplicirte Theil von S' und Differenz mit Tafel XLIV.

g'	g	cos	Diff.	sin	Diff.
0,	0	+ 723 $n't$	+ 56		
		+ 0,76 n'^2t^2	+ 4		
1,	0	− 0,128	− 58	+ 0″,039	− 66
		− 171 $n't$	− 19	+ 103 $n't$	+ 17
2,	0	− 0,074	− 4	− 0,097	− 13
		− 14 $n't$	− 2	− 8 $n't$	+ 4
3,	0	+ 0,001	+ 9	− 0,170	+ 8
		− 1 $n't$	0	− 2 $n't$	0
4,	0	+ 0,080	− 1	+ 0,018	+ 8
− 2,	− 1	+ 0,114	+ 4	+ 0,023	− 46
− 1,	− 1	+ 0,055	+ 3	+ 0,047	+ 8
		− 1 $n't$	0	− 1 $n't$	− 1
0,	− 1	+ 0,058	− 17	+ 0,078	− 6
		+ 3 $n't$	0	− 2 $n't$	0
1,	− 1	− 0,008	− 11	+ 0,040	+ 5
		− 25 $n't$	+ 4	+ 9 $n't$	− 2
2,	− 1	+ 0,134	− 15	− 0,153	− 24
		− 192 $n't$	− 4	− 563 $n't$	− 17
3,	− 1	− 0,194	+ 27	+ 0,147	− 20
		− 64 $n't$	+ 3	+ 120 $n't$	+ 28
4,	− 1	+ 0,912	+ 3	+ 0,172	+ 2
		− 8 $n't$	− 1	+ 3 $n't$	+ 4
− 1,	− 2	+ 0,036	. . . . .	− 0,060	. . . .
0,	− 2	+ 0,031	. . . . .	− 0,018	. . . .
		+ 12 $n't$	− 7	+ 16 $n't$	− 9
1,	− 2	+ 0,031	− 1	− 0,017	+ 3
		− 175 $n't$	− 9	− 238 $n't$	− 7
2,	− 2	+ 0,055	+ 6	+ 0,014	− 1
		− 5 $n't$	− 10	− 9 $n't$	+ 12
3,	− 2	− 0,030	+ 4	+ 0,097	+ 41
		− 144 $n't$	− 7	+ 15 $n't$	0
4,	− 2	− 0,013	+ 6	− 0,069	− 14
		− 81 $n't$	− 5	− 54 $n't$	− 20
5,	− 2	+ 0,089	− 6	− 0,057	− 18
		+ 268 $n't$	+ 7	+ 489 $n't$	+ 11
2,	− 3	+ 12 $n't$	− 2	− 6 $n't$	− 2
3,	− 3	− 0,091	− 11	+ 0,132	+ 15
		− 3 $n't$	− 4	− 4 $n't$	− 1
4,	− 3	− 0,044	− 31	− 0,031	+ 8
		− 6 $n't$	− 5	+ 69 $n't$	− 6
5,	− 3	− 0,034	+ 6	− 0,038	− 4
		− 30 $n't$	− 9	+ 29 $n't$	+ 5

Digitized by Google

g'	g	cos	Diff.	sin	Diff.
6,	− 3	+ 0″,758	+ 1	+ 0″,530	+ 9
		− 17 $n't$	− 2	+ 3 $n't$	0
7,	− 3	+ 0,080	+ 5	− 0,049	+ 18
		− 6 $n't$	+ 2	− 2 $n't$	− 2
3,	− 4	− 2 $n't$	0	− 11 $n't$	+ 2
4,	− 4	+ 0,011	− 11	+ 0,008	− 5
		− 3 $n't$	− 1	− 1 $n't$	− 2
5,	− 4	− 0,010	− 5	+ 0,026	− 5
		+ 35 $n't$	+ 6	+ 11 $n't$	+ 4
6,	− 4	+ 0,100	+ 12	− 0,068	+ 1
		+ 13 $n't$	− 1	+ 18 $n't$	0
7,	− 4	− 0,125	− 6	+ 0,118	+ 1
		+ 1 $n't$	+ 2	+ 8 $n't$	0
8,	− 4	− 0,060	− 18	+ 0,003	+ 13
		− 2 $n't$	− 2	+ 3 $n't$	+ 3
9,	− 4	− 0,017	− 8	− 0,014	− 11
		0 $n't$	+ 1	0 $n't$	0
10,	− 4	+ 0,010	+ 3	+ 0,044	+ 2
		+ 3 $n't$	− 1	+ 1 $n't$	− 2

Da die von den Breitenstörungen abhängigen Störungen zweiter Ordnung des Saturns so sehr klein sind, so habe ich nicht für nöthig erachtet, sie einer solchen Prüfung zu unterwerfen, und habe daher die in dem vorstehenden analytischen Ausdrucke enthaltenen, von $(p+p')$ und $(q+q')$ abhängigen Glieder hier übergangen.

Berichtigungen.

Seite 30	Zeile 1	v. u.	statt	$-\frac{1}{2}\int\overline{\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}}$	lies: $-\frac{1}{2}\int\overline{\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}}\,dt$
- 31	- 16	v. o.	-	$-\frac{1}{2}\int\overline{\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}}$	lies: $-\frac{1}{2}\int\overline{\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}}\,dt$
- 40	- 1	v. o.	-	ν und ν'	lies: u und u'
- 40	- 5	v. o.	-	$\sin\Theta$	lies: $\cos\Theta$
- 40	- 9	v. o.	-	$\left(\frac{d\Omega,}{dr}\right)$	lies: $\left(\frac{d\Omega,}{d\nu}\right)$
- 40	- 9	v. u.	-	daſs daſs	lies: daſs
- 42	- 14	v. o.	-	$-\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dQ}\right)$	lies: $-\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dQ}\right)\cos I$
- 46	- 9	v. o.	-	$-(\nu'-\pi)$	lies: $-(\nu'-\pi')$
- 51	- 3	v. u.	-	$\left(\frac{2}{8}\right)=\frac{(2)}{(6)}-\frac{(6)}{(8)}$	lies: $\left(\frac{2}{4}\right)=\frac{(2)}{(8)}-\frac{(6)}{(5)}$
- 55	- 6	v. o.	-	$-\left(\frac{0}{1}\right)\cos$	lies: $-\left(\frac{0}{1}\right)\sin$
- 61	- 1	v. o.	-	$\left(\frac{1}{8}\right)$	lies: $\left(\frac{1}{4}\right)$
- 61	- 2	v. o.	-	$\left(\frac{3}{8}\right)$	lies: $\left(\frac{3}{4}\right)$
- 61	- 5	v. o.	-	$(2, c)$	lies: $(3, c)$
- 61	- 6	v. o.	-	$\frac{(1,c)+(13,c)-(5,c)-(11,c)}{4}$	lies: $\frac{-(1,s)+(13,s)+(5,s)-(11,s)}{4}$
- 61	- 7	v. u.	-	$x=g'$	lies: $x'=g'$
- 84	- 9	v. o.	-	$+r'\left(\frac{d^2\Omega}{drdr'}\right)+r''\left(\frac{d^2\Omega}{drdr''}\right)$	lies: $+rr'\left(\frac{d^2\Omega}{drdr'}\right)+rr''\left(\frac{d^2\Omega}{drdr''}\right)$
- 96	- 2	v. o.	-	$e\left(\frac{d.\frac{p^2}{a^2}}{de}\right)$	lies: $-\frac{1}{2}e\left(\frac{d.\frac{p^2}{a^2}}{de}\right)$
- 109	- 15	v. u.	-	nach, nach	lies: noch nach
- 110	- 13	v. o.	-	βt^2	lies: βt

Digitized by Google

Seite 111 Zeile 9 v. u. statt Producte vorkommen. lies: Producte der Massen vorkommen.

\- 117 - 3 v. o. - $+\int\overline{\left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right)\left(\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}\right)}\,dt$ lies: $+\frac{1}{2}\int\overline{\left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right)\left(\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}\right)}\,dt$

\- 118 - 6 v. u. - $\int\overline{\left(\frac{\int T_1\left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right)dt}{d\tau}\right)}$ lies: $\int\overline{\left(\frac{d\,.\int T_1\left(\frac{d(\zeta)}{d\tau}\right)dt}{d\tau}\right)}\,dt$

\- 146 - 6 v. u. - + 351 lies: + 35

\- 147 - 12 v. o. - | — 0,08223 | — 0,05631 | + 2,90338 | lies: | — 0,08201 | — 0,05601 | + 2,90022 |

\- 147 - 12 v. u. - — 30 lies: — 297

\- 147 - 11 v. u. - — 15 lies: — 149

\- 147 - 5 v. u. - + 505 lies: + 715

\- 148 - 1 v. u. - | + 0,04267 | + 0,08177 | + 0,02121 | lies: | + 0,04134 | + 0,07510 | + 0,02331 |

\- 151 - 8 v. u. - — 0,00502 lies: — 0,00302

\- 152 - 16 v. o. - — 52 lies: 0

\- 152 - 6 v. u. - + 425 lies: + 43

\- 153 - 8 v. o. - | + 0,00781 | — 0,01591 | lies: | + 0,00665 | — 0,02221 |

\- 154 - 11 v. o. - Summen lies: Summe.

\- 156 - 4 v. u. - β lies: β''

\- 176 - 7 v. o. - abhängigen lies: unabhängigen

\- 180 - 9 v. o. - (35) lies: (55)

\- 189 - 11 v. o. - — lies: +

\- 202 - 4 v. o. - 9,42212 lies: 9,52388

\- 251 - 16 v. u. - + 0,00338 lies: + 0,03338

\- 256 - 6 v. o. - | — 0,08223 | — 0,05631 | lies: | — 0,08201 | — 0,05601 |

\- 256 - 8 v. o. - + 2,90338 lies: + 2,90022

\- 259 - 17 v. o. - | + 0,04134 | + 0,07910 | lies: | + 0,03906 | + 0,07455 |

\- 259 - 18 v. o. - + 0,02331 lies: + 0,03255

\- 299 - 5 v. o. - + 5,54 $n't$ lies: + 5,54 n'^2t^2.

Digitized by Google

DEC 2 7 199[illegible]

Digitized by Google